Vorzeichen	z.B. $-15 = (-1) \cdot 15$
Operationszeichen	$a - b = a + (-b) = a + (-1) \cdot b$
Bilden der Gegenzahl	z.B. $-(4+2) = (-1) \cdot (4+2)$

Merke Subtraktionen sind auch nur Additionen

Eine Subtraktion kann (und soll) als Addition der Gegenzahl aufgefasst werden.

Mit dieser Sichtweise kann von Summen und Summanden gesprochen werden, auch wenn Subtraktionen vorkommen.
Die Multiplikation in $\mathbb{Z}$ muss nun so definiert werden, dass die bekannten Rechengesetze erhalten bleiben.
Multiplikation von zwei negativen Zahlen
Wie ist nun aber das Produkt $(-a) \cdot (-b)$ zu definieren, wenn $a, b \in \mathbb{N}$? Notieren zu den folgenden Gleichheitszeichen die angewandten Gesetze!

$$(-a) \cdot (-b) = ((-1) \cdot a) \cdot ((-1) \cdot b) = (-1) \cdot (-1) \cdot a \cdot b$$

Es bleibt also nur noch eine sinnvolle Definition für $(-1) \cdot (-1)$ zu finden. Die Multiplikation mit -1 bildet die Gegenzahl. Das soll auch in ganz $\mathbb{Z}$ gültig sein. Damit muss $(-1) \cdot (-1) = 1$ sein. Es gilt also

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

oder salopp ausgedrückt: **«Minus mal Minus gibt Plus»**.
Für diesen Sachverhalt gibt es noch weitere intuitive Erklärungen. Z.B. könnte man die negative Anzahl Strecken als «in die andere Richtung abtragen» interpretieren.
Oder man stellt sich ein kurzes Video vor, in dem ein fahrendes Fahrzeug zu sehen ist. Je nach Richtung, in der es fährt, ist die Geschwindigkeit positiv oder negativ. Die Zeit läuft positiv, es sei denn, man schaut das Video rückwärts an. Weiter gilt:

$$\text{Strecke} = \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Zeit}$$

Fährt das Fahrzeug rückwärts (negative Geschwindigkeit) und man schaut das Video rückwärts (negative Zeit), legt das Fahrzeug eine positive Strecke zurück.

1.3.3 Ausmultiplizieren und Klammern auflösen

Merke Distributivgesetz

Es gilt das Distributivgesetz:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

D.h. man kann ausmultiplizieren.
Engl. distribute, *bzw. frz.* distribuer *heisst «verteilen»*.

Aufgabe 1.4 «Beweisen» Sie das Distributivgesetz für natürliche Zahlen.
Damit können wir Klammern auflösen:

Merke Klammern auflösen

$$a + (b + c - d) = a + b + c - d \qquad a - (b + c - d) = a - b - c + d$$

Folgt eine Klammer auf ein + (Pluszeichen), darf diese weggelassen werden.
Folgt eine Klammer auf ein − (Minuszeichen), darf diese weggelassen werden, wenn alle + und − in der Klammer vertauscht werden.