1.5.2 Dividieren ist Multiplizieren mit dem Kehrwert

Seien $a, b \in Q$ zwei Bruchzahlen mit $b \neq 0$ und mit $b = \frac{z}{n}$ mit $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Welcher Bruchzahl r entspricht die Division $a : b$? Dazu formen wir folgende Gleichung um:

$$\begin{aligned} r &= a : b && | \cdot b \\ r \cdot b &= a && |\text{TU} \\ r \cdot \frac{z}{n} &= a && |\text{TU} \\ (r \cdot z) : n &= a && | \cdot n \\ r \cdot z &= a \cdot n && | : z \\ r &= (a \cdot n) : z = a \cdot (n : z) = a \cdot \frac{n}{z} \end{aligned}$$

Womit wir gezeigt haben, dass Dividieren durch $\frac{z}{n}$ das Gleiche ergibt, wie Multiplizieren mit dem **Kehrwert** $\frac{n}{z}$. Setzt man für $a = 1$ ein, hat man auch noch bewiesen, dass $1 : b = \frac{1}{b}$ der Kehrwert von b ist.

Merke Kehrwert

Der **Kehrwert** einer Zahl q ist $\frac{1}{q}$.
Ist q als Bruch $\frac{z}{n}$ geschrieben, ist der Kehrwert $\frac{1}{q} = \frac{n}{z}$.
Anstatt durch q zu dividieren, kann mit dem Kehrwert $\frac{1}{q}$ multipliziert werden.
Wird eine Zahl mit Ihrem eigenen Kehrwert multipliziert, erhält man 1.

Aufgabe 1.16

a) $\dfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{\frac{2}{3}}{4}}$

b) $\dfrac{2 - \frac{4}{3}}{\frac{2}{\frac{3}{4}} + 2} - \dfrac{2}{3}$

c) $\dfrac{\frac{8^2+6^2+5^2}{2\cdot(2^5-3^3)^2}}{\left(\frac{5}{4}\right)^3}$

d) $-2 - \dfrac{-2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}{-\frac{2}{-\frac{-3}{-2}}}$

e) $1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}$

f) $\dfrac{\left(\frac{117}{127}\right)^4}{\frac{117^3}{127^5}} \cdot \dfrac{\frac{1}{117}}{127}$

Aufgabe 1.17 Berechnen Sie im Kopf, aber vereinfachen Sie zuerst mit den Potenzgesetzen!

Beispiel: $\frac{\frac{20^6}{2^8}}{5^5} = \frac{\left(2^2\cdot 5\right)^6}{2^8} \cdot \frac{1}{5^5} = \frac{\left(2^2\right)^6\cdot 5^6}{2^8\cdot 5^5} = \frac{2^{12}}{2^8} \cdot \frac{5^6}{5^5} = 2^4 \cdot 5 = 2^3 \cdot 2 \cdot 5 = 8 \cdot 10 = 80$

a) $\frac{\frac{100^4}{2^7}}{25^3}$

b) $\frac{16^5}{8^6}$

c) $\frac{3^{3^2}}{(3^3)^2}$

1.6 Wie viele Zahlen gibt es?

Es ist klar, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt. Es scheint auch klar, dass es irgendwie mehr ganze Zahlen und noch viel mehr Bruchzahlen zu geben scheint.

Leider versagt unsere Intuition gründlichst, wenn es um den Begriff der Unendlichkeit geht.

1.6.1 Abzählbarkeit

Eine (unendliche) Menge M ist abzählbar, wenn man alle Elemente komplett durchnummerieren kann. Mit anderen Worten, M hat in diesem Sinne «gleich viele» Elemente wie $\mathbb{N}$. In der Mathematik spricht man von **Mächtigkeit** und sagt, M und $\mathbb{N}$ sind **gleich mächtig**.

$\mathbb{Z}$ ist abzählbar:

✎

In diesem Sinne hat $\mathbb{Z}$ gleich viele Elemente wie $\mathbb{N}$, oder korrekter: $\mathbb{Z}$ ist gleich mächtig wie $\mathbb{N}$.