$\mathbb{Q}$ ist abzählbar:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{-5}{5} & \frac{-4}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{0}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{5}{5} \\
\frac{-5}{4} & \frac{-4}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{0}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} \\
\frac{-5}{3} & \frac{-4}{3} & \frac{-3}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{0}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\
\frac{-5}{2} & \frac{-4}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-2}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{0}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} \\
\frac{-5}{1} & \frac{-4}{1} & \frac{-3}{1} & \frac{-2}{1} & \frac{-1}{1} & \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1}
\end{array}
$$

Damit ist auch $\mathbb{Q}$ gleich mächtig wie $\mathbb{N}$.

1.6.2 $\mathbb{Q}$ ist löchrig wie Schweizer Käse

Aufgabe 1.18 Berechnen Sie das Resultat folgender Summe als Dezimalbruch, wenn man a) nur die ersten drei Summanden, b) nur die ersten 6 Summanden und c) nur die ersten zehn Summanden addiert. Und d) was erhält man, wenn man alle (unendlich viele) Summanden addiert?

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10'000} + \ldots$$

Gedankenexperiment
Stellen Sie sich vor, Sie hätten einen Tipp-Ex-Roller. Mit diesem Roller wird auf der Zahlengeraden eine Zahl $q \in \mathbb{Q}$ (also ein Punkt) mit einem kleinen Streifen Tipp-Ex einer gewissen Länge $l \in \mathbb{Q}$ übermalt:

✎

Die rationalen Zahlen (Bruchzahlen) sind abzählbar, d.h. man kann sie durchnummerieren. Die erste Bruchzahl in dieser Nummerierung wird mit einem Streifen der Länge $\frac{3}{10}$ übermalt, die zweite mit einem Streifen der Länge $\frac{3}{100}$, die dritte mit $\frac{3}{1000}$ und so weiter.
Frage 1 Wie lange ist der Streifen für die n-te Bruchzahl?
Frage 2 Wie viel «Gesamtlänge Tipp-Ex» braucht man so, um *alle* Bruchzahlen zu übermalen?
Frage 3 Kann das sein? Haben Sie eine Vermutung, wo das «Problem» liegen könnte?

✎

1.6.3 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\sqrt{2}$ ist jene Zahl, die
Schon die Pythagoräer wussten, dass nicht alles als Verhältnis von ganzen Zahlen beschrieben werden kann, wie z.B. die Länge der Diagonale des Einheitsquadrates.

Aufgabe 1.19 Berechnen Sie die Länge der Diagonalen in einem Quadrat mit der Seitenlänge 1.

Der folgende Beweis geht zurück auf den griechischen Mathematiker Euklid von Alexandria (ca. 300 v.Chr.).

Beweis: Zu zeigen ist, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Um das zu beweisen, werden wir (fälschlicherweise) zuerst das Gegenteil annehmen, nämlich dass $\sqrt{2} = \frac{z}{n} \in \mathbb{Q}$. Wir werden zeigen, dass sich damit ein Widerspruch konstruieren lässt und damit unsere Annahme falsch sein muss.

Wir können natürlich annehmen, dass $\frac{z}{n}$ vollständig gekürzt ist. (Sollte das nicht so sein, kürzen wir vollständig