und nehmen dann den gekürzten Bruch.) Verwenden wir die Definition von $\sqrt{2}$: ✎

1.7 Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Auf der Zahlengeraden entspricht $\mathbb{R}$ der Menge *aller Punkte*. Dargestellt werden reelle Zahlen meistens als Dezimalbrüche, z.B. $\pi = 3.141592653589793\ldots$. Oder aber als ganze Zahlen, Brüche oder Symbole, wie z.B. $\sqrt{2}$.
Die Zahlenmengen können wie folgt dargestellt werden:

1.7.1 Dezimalbrüche

Wir unterscheiden 3 Arten von Dezimalbrüchen:

Abbrechende Dezimalbrüche, wie z.B. 2.25. Abbrechende Dezimalbrüche sind immer rational, d.h. Elemente von $\mathbb{Q}$.

Periodische, nicht-abbrechende Dezimalbrüche, wie z.B. $0.33333\ldots = 0.\overline{3}$ oder $74.4213131313\ldots = 74.42\overline{13}$. Auch diese Dezimalbrüche sind immer rational.

Nicht-periodische, nicht-abbrechende Dezimalbrüche, wie z.B. $1.4142135623730951\ldots$ oder $0.101001000100001000001\ldots$ oder $1.234567891011121314516\ldots$. Diese Dezimalbrüche sind **irrational**, d.h. nicht Element von $\mathbb{Q}$.

1.7.2 Nicht-Abzählbarkeit von $\mathbb{R}$

Das $\mathbb{R}$, bzw. die Menge aller Punkte auf der Zahlengeraden nicht abzählbar sein kann, haben wir schon beim Gedankenexperiment mit dem überstreichen aller rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ gesehen. Man kann aber auch direkt zeigen, dass $\mathbb{R}$ nicht abzählbar sein kann, indem man, wieder durch Widerspruch, das Gegenteil annimmt.

Sei r_1, r_2, etc. eine vollständige, durchnummerierte Liste aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Diese können alle als Dezimalbrüche geschrieben werden, die mit 0. beginnen und unendlich viele Nachkommastellen haben (die aber auch alle Null sein können):