BY-SA Ivo Blöchliger

r_1	0.	3	6	4	2	4	3	5	...
r_2	0.	7	1	2	3	1	4	9	...
r_3	0.	8	9	9	1	2	5	6	...
r_4	0.	2	0	7	1	3	6	3	...
r_5	0.	1	0	5	4	2	7	1	...
r_6	0.	2	5	4	8	1	8	2	...
r_7	0.	2	6	8	9	1	2	4	...

Aus dieser Tabelle bildet man eine neue Zahl entlang der Diagonalen, indem man alle Ziffern ausser der Eins durch eine Eins ersetzt, und die Einsen durch eine Null. Im Beispiel hier erhält man die Zahl $0.1010111\ldots$. Begründen Sie, warum diese Zahl *nicht* in der Liste vorkommt.

D.h. es kann keine vollständige Liste geben. Damit ist $\mathbb{R}$ mächtiger als $\mathbb{N}$.

Die saubere Definition der reellen Zahlen und Ausdehnung der bekannten Rechengesetze ist sehr anspruchsvoll und wurde erst 1871 von Georg Cantor das erste mal vollbracht. Der obige «Diagonalenbeweis» wurde, ebenfalls von Cantor, im Jahre 1891 publiziert. Wir feiern also erst das 150-Jahre-Jubiläum der mathematischen Fassbarkeit des gesamten Zahlenstrahls.

1.8 Primzahlen und Primfaktorzerlegung

Definition 1.6 Primzahl

Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl die *genau 2 Teiler* hat.

Aufgabe 1.20 Schreiben Sie alle Primzahlen bis 50 auf:

Definition 1.7 Primzahlzerlegung

Jede natürliche Zahl grösser gleich 2 kann in eindeutiger Weise als Produkt von Potenzen von Primzahlen geschrieben werden (Basen aufsteigend geordnet).

Dazu dividiert man nach und nach «offensichtliche» Faktoren aus. Z.B.

$$14\,400 = 100 \cdot 144 = 10^2 \cdot 12^2 = (2 \cdot 5)^2 \cdot (3 \cdot 4)^2 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 2^4 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

Aufgabe 1.21 Bestimmen Sie Primfaktorzerlegung:

a) $294 \cdot 7500 \cdot 2300$ b) $441 \cdot 275000 \cdot 70000$ c) $315 \cdot 154000 \cdot 29000$ d) $525 \cdot 10500 \cdot 23000$

e) $84 \cdot 16500 \cdot 1900$ f) $1225 \cdot 23100 \cdot 29000$ g) $525 \cdot 1800 \cdot 19000$ h) $735 \cdot 6600 \cdot 170000$