1 Zahlenmengen

Ein Alleinstellungsmerkmal der Mathematik ist, dass man nichts glauben muss, sondern alle mathematischen Sachverhalte bewiesen werden können (und als Mathematiker müssen!), bis auf ganz wenige Grundannahmen, die sogenannten Axiome.

Fast die gesamte moderne Mathematik kann auf 10 Axiome der Mengenlehre zurückgeführt werden. Siehe z.B. https://de.wikipedia.org/wiki/Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre.

Damit die Zahlen zu definieren ist zwar sehr spannend, aber formell etwas zu anspruchsvoll. Auch die 5 *Peano-Axiome*, die die natürlichen Zahlen definieren sind für unsere Zwecke zu formell und wenig intuitiv. Siehe z.B. https://de.wikipedia.org/wiki/Peano-Axiome.

Wir werden deshalb die Zahlen geometrisch auf einem Zahlenstrahl definieren.

1.1 Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

Die Zahlen 1, 2, 3, ... sind natürlich in dem Sinne, dass (fast) jeder Mensch lernt zu zählen. Auch die grundlegenden Operationen wie Addition und Multiplikation sind für kleine Zahlen intuitiv erfassbar (z.B. durch Zählen und Rechnen mit den Fingern) und werden mit dem Gebrauch einleuchtend. Niemand zweifelt daran, dass die Rechengesetze, die wir mit kleinen natürlichen Zahlen intuitiv als universal gültig erfahren, auch für beliebig grosse natürliche Zahlen gültig sind.

1.1.1 Permanenzprinzip

Das **Permanenzprinzip** ist die Forderung, dass die gewohnten Rechengesetze ihre Gültigkeit bewahren, wenn der Zahlenbereich ausgedehnt wird auf negative Zahlen, Bruchzahlen und reelle Zahlen. Und schliesslich auch die komplexen Zahlen, mit denen wir uns aber kaum beschäftigen werden.

1.1.2 Die Sache mit der Null

Die Zahl Null ist intuitiv viel schwieriger als Zahl zu erfassen, warum sollte «Nichts» eine Zahl sein? Die Null als Zahl zu begreifen kann zu Recht als eine der ersten Meisterleistungen in der Mathematik betrachtet werden. Erst die Null ermöglicht die Darstellung der Zahlen im Stellenwertsystem (normalerweise im Zehnersystem) und effizientes Rechnen.

Besonders in der Informatik wird normalerweise bei 0 begonnen zu zählen. D.h. das erste Element in einer Liste hat den Index 0. Das ist zwar auf den ersten Blick ungewöhnlich, vereinfacht aber vieles. In der Mathematik wird aber sehr oft noch bei 1 begonnen zu zählen, d.h. das erste Element einer Liste hat den Index 1. Auch die Menge der natürlichen Zahlen wird auf Stufe Mittelschule noch oft ohne die Null definiert, auf Stufe Universität aber fast ausschliesslich mit der Null.

Definition 1.1 Natürliche Zahlen, $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
Lies: «$\mathbb{N}$ ist die Menge mit den Elementen 0, 1, 2, 3, 4, u.s.w.».

1.1.3 Mengen und Elemente

Definition 1.2 Menge

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von wohldefinierten **Elementen**. Für jedes mögliche Element kann unzweifelhaft festgestellt werden, ob es zur Menge gehört oder nicht.

Die Reihenfolge der Elemente in der Menge ist nicht relevant. Auch spielt es keine Rolle, wie oft ein Element in einer Menge vorkommt. Es geht alleine um die Zugehörigkeit.

Die Zugehörigkeit wird mit dem Zeichen «$\in$» notiert, z.B.

$7 \in \mathbb{N}$	$\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$
«7 ist Element von $\mathbb{N}$»	«Wurzel 2 ist nicht Element von $\mathbb{N}$»

Beispiele für Mengen sind:

Aufzählende Form	Beschreibende Form
$\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ «Die Menge mit den Elementen 0, 2, 4, 6, u.s.w.»	$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gerade.}\}$ «Die Menge aller x in $\mathbb{N}$ für die gilt: x ist gerade.»
$\{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$ «Die Menge mit den Elementen 0, 1, 4, 9, 16, u.s.w.»	$\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ «Die Menge aller n^2 für die gilt n ist natürlich.
$\{10, 11, 12, \ldots, 18, 19\}$ «Die Menge mit den Elementen 10,11,12, usw. bis 18, 19.»	$\{k \in \mathbb{N} \mid 10 \leq k \leq 19\}$ «Die Menge aller natürlichen k für die gilt 10 ist kleiner gleich k und k ist kleiner gleich 19.»

Keine Mengen sind:

Die Menge aller Frauen	Der Term «Frau» ist nicht wohldefiniert (Alter, Chromosomenausstattung, etc.)
Die Menge aller Schönwettertage im Juli 2021	«Schön Wetter» ist nicht wohldefiniert. (Pilzsammler vs. Gleitschirmpiloten).

Wir beschränken uns also auf Mengen von mathematisch definierten Elementen, typischerweise Zahlen oder geometrische Objekte wie Punkte.

Aufgabe 1.1 Schreiben Sie folgende Mengen in aufzählender und beschreibender Form:

a) Die Menge der Primzahlen.

b) Die Menge der Vielfachen von 37.

c) Die Menge der Kubikzahlen kleiner als 1111.

d) Die Menge der Zweierpotenzen.

1.2 Operationen in $\mathbb{N}$

Die Grundoperationen in $\mathbb{N}$ können auf dem Zahlenstrahl definiert werden.
Ein Zahlenstrahl kann wie folgt konstruiert werden: Auf einer Geraden werden zwei unterschiedliche Punkte 0 und 1 markiert (typischerweise die 1 rechts von der 0). Dann wird die Strecke von 0 zu 1 wiederholt nach rechts abgetragen:

1.2.1 Addition

Um zwei natürliche Zahlen a und b auf dem Zahlenstrahl zu addieren, wird die Strecke von 0 zu a bei b nach rechts abgetragen um $c = a + b$ zu erhalten.
Damit sind folgende wichtige Eigenschaften einleuchtend:

- $a + b \in \mathbb{N}$ wenn $a, b \in \mathbb{N}$ (Abgeschlossenheit).
- $a + b = b + a$ (Kommutativgesetz).
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ (Assoziativgesetz).

1.2.2 Multiplikation

Die Multiplikation zweier natürlichen Zahlen a, b kann als wiederholte Addition aufgefasst werden, d.h.

$$a \cdot b = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{\text{Anzahl Summanden: } a}$$

Die Abgeschlossenheit folgt direkt aus der Abgeschlossenheit der Addition.

Aufgabe 1.2

a) Finden Sie überzeugende Argumente für das Kommutativgesetz der Multiplikation, d.h. dafür, dass $a \cdot b = b \cdot a$ für **alle** natürlichen Zahlen. *Nur weil es für das Einmaleins stimmt, heisst noch nicht, dass es für grosse Zahlen nicht einmal Ausnahmen geben könnte!*

b) Gleiche Aufgabe für $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Aufgabe 1.3 An einem Gegenbeispiel soll hier gezeigt werden, dass es kommutative Operationen gibt, die aber nicht assoziativ sind.

Dazu betrachten wir das Spiel «Schere, Stein, Papier», oder auf Englisch «rock, paper, scissors». Sei $M = \{r, p, s\}$ die Menge der drei Symbole für rock, paper, scissors.

Man definiert die Operation $*$ so, dass das Resultat der «Sieger» der beiden Symbole ist, z.B. $r * p = p$, weil paper rock schlägt. Weiter definieren wir $x * x = x$ für $x \in M$ im Falle eines Unentschiedens.

Ist die Operation kommutativ? Ist sie assoziativ?

1.3 Subtraktion und ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

Das Resultat der Subtraktion $a - b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ ist nur dann wieder eine natürliche Zahl, wenn $a \geq b$. Auf dem Zahlenstrahl wird der Abstand von 0 zu b bei a *nach links* abgetragen, um zum Resultat zu kommen.

Damit die Subtraktion immer ausgeführt werden kann, müssen die natürlichen Zahlen um die negativen Zahlen erweitert werden.

Definition 1.3 Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Die **Menge der ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$ ist definiert als

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

1.3.1 Minuszeichen: 3 Arten

Das Minuszeichen hat **drei** verschiedene Bedeutungen:

Operationszeichen	für die Subtraktion	z.B. $8 - 3$
Vorzeichen	bei negativen Zahlen	z.B. -15
Bilden der Gegenzahl	(Spiegelung an 0)	z.B. $-(4 + 2)$

1.3.2 Multiplikation in $\mathbb{Z}$

Die Multiplikation $n \cdot z$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{Z}$, $z < 0$ ist geometrisch wohl definiert, es wird n mal die Strecke von 0 bis z nach links abgetragen, und es gilt $n \cdot z = \underbrace{z + z + \ldots + z}_{\text{Anzahl Summanden: } n}$.

Mit dieser Definition lässt sich aber $z \cdot n$ nicht ohne weiteres definieren; eine negative Anzahl Strecken ist schwierig zu handhaben. Das Permanenzprinzip verlangt aber, dass die Rechengesetze erhalten bleiben, und damit lässt sich $z \cdot n = n \cdot z$ definieren.

Wir halten fest: Das Produkt einer positiven Zahl und einer negativen Zahl ist selbst negativ.

Multiplikation mit -1

Mit der geometrischen Definition ist klar dass $n \cdot (-1) = -n$ für $n \in \mathbb{N}$. Ein Minuszeichen kann durch die Multiplikationen mit -1 ersetzt werden:

Vorzeichen	z.B. $-15 = (-1) \cdot 15$
Operationszeichen	$a - b = a + (-b) = a + (-1) \cdot b$
Bilden der Gegenzahl	z.B. $-(4+2) = (-1) \cdot (4+2)$

Merke Subtraktionen sind auch nur Additionen

Eine Subtraktion kann (und soll) als Addition der Gegenzahl aufgefasst werden.

Mit dieser Sichtweise kann von Summen und Summanden gesprochen werden, auch wenn Subtraktionen vorkommen.

Die Multiplikation in $\mathbb{Z}$ muss nun so definiert werden, dass die bekannten Rechengesetze erhalten bleiben.

Multiplikation von zwei negativen Zahlen

Wie ist nun aber das Produkt $(-a) \cdot (-b)$ zu definieren, wenn $a, b \in \mathbb{N}$? Notieren zu den folgenden Gleichheitszeichen die angewandten Gesetze!

$$(-a) \cdot (-b) = ((-1) \cdot a) \cdot ((-1) \cdot b) = (-1) \cdot (-1) \cdot a \cdot b$$

Es bleibt also nur noch eine sinnvolle Definition für $(-1) \cdot (-1)$ zu finden. Die Multiplikation mit -1 bildet die Gegenzahl. Das soll auch in ganz $\mathbb{Z}$ gültig sein. Damit muss $(-1) \cdot (-1) = 1$ sein. Es gilt also

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

oder salopp ausgedrückt: **«Minus mal Minus gibt Plus»**.

Für diesen Sachverhalt gibt es noch weitere intuitive Erklärungen. Z.B. könnte man die negative Anzahl Strecken als «in die andere Richtung abtragen» interpretieren.

Oder man stellt sich ein kurzes Video vor, in dem ein fahrendes Fahrzeug zu sehen ist. Je nach Richtung, in der es fährt, ist die Geschwindigkeit positiv oder negativ. Die Zeit läuft positiv, es sei denn, man schaut das Video rückwärts an. Weiter gilt:

$$\text{Strecke} = \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Zeit}$$

Fährt das Fahrzeug rückwärts (negative Geschwindigkeit) und man schaut das Video rückwärts (negative Zeit), legt das Fahrzeug eine positive Strecke zurück.

1.3.3 Ausmultiplizieren und Klammern auflösen

Merke Distributivgesetz

Es gilt das Distributivgesetz:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

D.h. man kann ausmultiplizieren.
Engl. distribute, *bzw. frz.* distribuer *heisst «verteilen»*.

Aufgabe 1.4 «Beweisen» Sie das Distributivgesetz für natürliche Zahlen.

Damit können wir Klammern auflösen:

Merke Klammern auflösen

$$a + (b + c - d) = a + b + c - d \qquad a - (b + c - d) = a - b - c + d$$

Folgt eine Klammer auf ein + (Pluszeichen), darf diese weggelassen werden.
Folgt eine Klammer auf ein − (Minuszeichen), darf diese weggelassen werden, wenn alle + und − in der Klammer vertauscht werden.

Aufgabe 1.5 Beweisen Sie die Regel zum Klammernauflösen für $a-(b+c-d)$.
Benutzen Sie dazu die Ersetzung des Minuszeichens durch die Multiplikation mit -1 und das Distributivgesetz (Ausmultiplizieren).

1.4 Potenzen mit natürlichen Exponenten

Definition 1.4

$b^e = \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{e \text{ Faktoren}}$ für $b \in \mathbb{N}$ und $e \in \mathbb{N}^+$

Potenzen mit natürlichen Exponenten können als wiederholte Multiplikation aufgefasst werden (so wie die Multiplikation als wiederholte Addition aufgefasst werden kann).

Man nennt b **Basis**, e **Exponent**, b^e eine **Potenz** und den Rechenvorgang nennt man **potenzieren**.

1.4.1 Rechenregeln

Potenzen haben eine noch höhere Priorität als Punkt-Operationen (Multiplikation, Division). Z.B.

$$3 \cdot 3^2 = 3 \cdot (3^2) = 3 \cdot 9 = 27 \quad \neq \quad (3 \cdot 3)^2 = 9^2 = 81$$

Bei Potenzen wird zuerst der Exponent berechnet, bevor potenziert wird. D.h.

$$3^{3^3} = 3^{(3^3)} = 3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987 \quad \neq \quad (3^3)^3 = 27^3 = 19\,683$$

Potenzen haben auch Vorrang gegenüber der Gegenzahlbildung. Z.B.

$$-4^2 = -(4^2) = -16 \quad \neq \quad (-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$$

1.4.2 Potenzgesetze

Seien $a, b \in \mathbb{N}$ Basen und $e, f \in \mathbb{N}^+$ Exponenten. Es gelten folgende Potenzgesetze, die Sie von nun an beweisen können sollen:

$a^e \cdot a^f =$

Beweis:

$a^e \cdot b^e =$

Beweis:

$(a^e)^f =$

Beweis:

Für $e > f$ gilt: $\frac{a^e}{a^f} =$

Beweis:

$\frac{a^e}{b^e} =$

Beweis:

1.4.3 Hoch Null

Wie soll a^0 definiert werden (für $a \in \mathbb{N}^+$)? Die obigen Potenzgesetze sollen auch weiterhin gültig bleiben (Permanenzprinzip).

Aufgabe 1.6 Bestimmen Sie mit Hilfe des ersten Potenzgesetz oben, wie a^0 zu definieren ist.

Hinweis: 0^0 ist nicht eindeutig definierbar. In mehreren Fällen macht es aber aus praktischen und ästhetischen Gründen Sinn, $0^0 = 1$ zu definieren.

1.4.4 Potenzen zum Auswendig lernen

n^2 bis $n = 20$, n^3 bis $n = 5$, 3^e bis $e = 5$ und 2^e bis $e = 10$.

Aufgabe 1.7 Erstellen Sie eine Tabelle mit allen auswendig zu lernenden Potenzen.

1.5 Division und $\mathbb{Q}$

Die Division $z : n$ mit $z, n \in \mathbb{N}$ und $n > 0$ kann auf dem Zahlenstrahl sehr einfach definiert werden: Man teilt die Strecke von 0 bis z in n gleich grosse Strecken. Der erste Teilpunkt rechts von 0 entspricht dem **Quotienten** (Resultat der Division).
Ausser wenn n ein Teiler von z ist, ist der Quotient keine natürliche Zahl, sondern eine **rationale Zahl** (Bruchzahl).

Definition 1.5 Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Die Menge der **rationalen Zahlen** ist definiert als

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} \mid z \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > 0 \right\}$$

In einem Bruch $\frac{z}{n}$ wird z der **Zähler** und n der **Nenner** genannt.

Für die Addition und Subtraktion kann die geometrische Definition auf dem Zahlenstrahl sehr einfach auf $\mathbb{Q}$ ausgedehnt werden. Algebraisch müssen Brüche aber erst gleichnamig (gleiche Nenner) gemacht werden, bevor addiert werden kann.
Die Definition der Multiplikation in $\mathbb{Q}$ lässt sich nicht ohne weiteres aus jener in $\mathbb{N}$ übertragen. Man zeigt erst in $\mathbb{N}$ dass $a \cdot (b : c) = (a \cdot b) : c$ und fordert mit dem Permanenzprinzip die Gültigkeit in $\mathbb{Q}$.

Merke Multiplikation in $\mathbb{Q}$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

«Bruch mal Bruch, wie macht's der Kenner? Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner».
Und unbedingt **vor dem Multiplizieren** auch übers Kreuz **kürzen**!

Aufgabe 1.8 Berechnen Sie:

a) $\frac{24}{35} \cdot \frac{63}{16}$ b) $\frac{14}{27} \cdot \frac{63}{49}$ c) $\frac{48}{121} \cdot \frac{77}{32}$ d) $\frac{169}{39} \cdot \frac{28}{91} \cdot \frac{27}{6}$

1.5.1 Übungsaufgaben zu Potenzgesetzen

Aufgabe 1.9 Zusammenfassen, kürzen:

a) $\left(-\frac{1}{2}d^2\right)\cdot\frac{1}{2}a^5d^4g^4\cdot\frac{12}{7}g$ b) $\left(-\frac{7}{9}h^3m^3n^5\right)\cdot\frac{2}{7}n^2\cdot\left(-\frac{15}{2}m\right)$ c) $\frac{13}{8}y^2\cdot\left(-\frac{1}{2}f^4m^4\right)\cdot\frac{24}{13}f^2m^2$

d) $\frac{2}{11}t^4z\cdot\left(-\frac{11}{7}gt^2z^2\right)\cdot\left(-\frac{7}{4}g^3t^4\right)$ e) $\left(-\frac{5}{8}c^4t^2x^2\right)\cdot\frac{1}{3}tx^4\cdot\left(-\frac{9}{5}ct^3\right)$ f) $\frac{7}{6}c\cdot\frac{5}{13}t^3\cdot\frac{12}{7}c^5t^2$

Aufgabe 1.10 Auspotenzieren:

a) $\left(\frac{5}{2}e^2s^5u\right)^3$ b) $\left(-\frac{5}{2}b^3d^3h^2\right)^4$ c) $\left(\frac{5}{2}cm^5y^4\right)^2$ d) $\left(-\frac{3}{2}d^5m^3p\right)^2$

e) $\left(-\frac{3}{2}dt^3w\right)^2$ f) $\left(-\frac{5}{2}a^3m^4s^5\right)^3$ g) $\left(\frac{5}{2}a^5b^2e\right)^4$ h) $\left(-\frac{3}{2}f^4h^3y\right)^2$

Aufgabe 1.11 Kürzen, Koeffizient vor den Bruch:

a) $\frac{-\frac{11}{2}b^3h^2n^5}{\frac{11}{7}bh^7n^4}$ b) $\frac{\frac{9}{2}d^7qt^8}{-\frac{9}{7}d^4q^2t^8}$ c) $\frac{\frac{5}{2}g^5m^7n^5}{\frac{5}{9}g^3m^8n^5}$

d) $\frac{\frac{7}{2}w^4x^6z}{\frac{7}{3}w^4x^8z}$ e) $\frac{-\frac{3}{2}bu^4w^6}{\frac{1}{3}bu^8w^2}$ f) $\frac{\frac{5}{2}b^3e^3s^7}{-\frac{5}{11}b^3e^2s}$

Aufgabe 1.12 Auspotenzieren:

a) $\left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{p}{f^3km^2s^3}\right)^5$ b) $\left(-\frac{5}{2}\cdot\frac{m^3x^3}{su^4y^4}\right)^4$ c) $\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{m^5}{e^3n^4s^5u^3}\right)^5$

d) $\left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{f^2}{k^2p^2q^4t^5}\right)^4$ e) $\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{g^4}{c^4fh^4y}\right)^4$ f) $\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{f^2}{c^5t^4u^4y^5}\right)^4$

Aufgabe 1.13 Ausmultiplizieren:

a) $\left(-\frac{7}{5}g+\frac{1}{3}p^2\right)\left(-\frac{5}{3}g-\frac{2}{3}p^2\right)$ b) $\left(-\frac{1}{2}a^2+\frac{9}{4}b\right)\left(\frac{7}{9}a^2-\frac{9}{11}b\right)$

c) $\left(-\frac{7}{3}h-\frac{2}{3}n^2\right)\left(\frac{4}{3}h-\frac{6}{11}n^2\right)$ d) $\left(-\frac{5}{12}m^2-\frac{11}{2}w^2\right)\left(-\frac{5}{8}m^2+\frac{3}{4}w^2\right)$

e) $\left(\frac{1}{3}t^2+\frac{1}{2}w\right)\left(-\frac{5}{6}t^2+\frac{4}{5}w\right)$ f) $\left(-\frac{5}{9}s+\frac{8}{7}u\right)\left(-\frac{7}{4}s+\frac{1}{5}u\right)$

Aufgabe 1.14 Ausmultiplizieren:

a) $\left(\frac{5}{4}n^2w+\frac{11}{4n^2w^4}\right)\left(-\frac{6}{11}n^2w-\frac{12}{5n^2w^4}\right)$ b) $\left(\frac{f^3}{2w^2}+\frac{5w^3}{11f^3}\right)\left(-\frac{9f^3}{8w^2}+\frac{5w^3}{4f^3}\right)$

c) $\left(\frac{9a^2}{4w}+\frac{5}{4}w\right)\left(-\frac{3a^2}{2w}-\frac{9}{2}w\right)$ d) $\left(\frac{5}{7}p^3t-\frac{1}{2p^3t^2}\right)\left(-\frac{3}{5}p^3t-\frac{7}{3p^3t^2}\right)$

Aufgabe 1.15 Klammern Sie den Faktor mit kleinstmöglichem Nenner aus, so dass in der Klammer keine Brüche mehr vorkommen und keine gemeinsamen Faktoren.

a) $-\frac{5}{4}c^3k^2+\frac{3}{4ck^2}$ b) $-\frac{3}{8}gx^2+\frac{5x^3}{4g^3}$ c) $-\frac{10}{3}bk^2-\frac{4k^3}{7b^3}$ d) $-\frac{5}{7}mp^2+\frac{4m}{5p^2}$

e) $\frac{2q^3}{5k}+\frac{9}{10k^2q^3}$ f) $\frac{q^3}{2m}+\frac{7q}{5m^3}$ g) $-\frac{7e^3}{2s^2}-\frac{1}{2}e^2s^3$ h) $\frac{4y^3}{5b}-\frac{3y}{5b}$

1.5.2 Dividieren ist Multiplizieren mit dem Kehrwert

Seien $a, b \in Q$ zwei Bruchzahlen mit $b \neq 0$ und mit $b = \frac{z}{n}$ mit $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Welcher Bruchzahl r entspricht die Division $a : b$? Dazu formen wir folgende Gleichung um:

$$\begin{aligned} r &= a : b && | \cdot b \\ r \cdot b &= a && |\text{TU} \\ r \cdot \frac{z}{n} &= a && |\text{TU} \\ (r \cdot z) : n &= a && | \cdot n \\ r \cdot z &= a \cdot n && | : z \\ r &= (a \cdot n) : z = a \cdot (n : z) = a \cdot \frac{n}{z} \end{aligned}$$

Womit wir gezeigt haben, dass Dividieren durch $\frac{z}{n}$ das Gleiche ergibt, wie Multiplizieren mit dem **Kehrwert** $\frac{n}{z}$. Setzt man für $a = 1$ ein, hat man auch noch bewiesen, dass $1 : b = \frac{1}{b}$ der Kehrwert von b ist.

Merke Kehrwert

Der **Kehrwert** einer Zahl q ist $\frac{1}{q}$.
Ist q als Bruch $\frac{z}{n}$ geschrieben, ist der Kehrwert $\frac{1}{q} = \frac{n}{z}$.
Anstatt durch q zu dividieren, kann mit dem Kehrwert $\frac{1}{q}$ multipliziert werden.
Wird eine Zahl mit Ihrem eigenen Kehrwert multipliziert, erhält man 1.

Aufgabe 1.16

a) $\dfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{\frac{2}{3}}{4}}$ b) $\dfrac{2 - \frac{4}{3}}{\frac{2}{\frac{3}{4}} + 2} - \dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{\frac{8^2+6^2+5^2}{2\cdot(2^5-3^3)^2}}{\left(\frac{5}{4}\right)^3}$

d) $-2 - \dfrac{-2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}{-\frac{2}{-\frac{-3}{-2}}}$ e) $1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}$ f) $\dfrac{\left(\frac{117}{127}\right)^4}{\frac{117^3}{127^5}} \cdot \dfrac{\frac{1}{117}}{127}$

Aufgabe 1.17 Berechnen Sie im Kopf, aber vereinfachen Sie zuerst mit den Potenzgesetzen!

Beispiel: $\frac{\frac{20^6}{2^8}}{5^5} = \frac{\left(2^2\cdot 5\right)^6}{2^8} \cdot \frac{1}{5^5} = \frac{\left(2^2\right)^6 \cdot 5^6}{2^8 \cdot 5^5} = \frac{2^{12}}{2^8} \cdot \frac{5^6}{5^5} = 2^4 \cdot 5 = 2^3 \cdot 2 \cdot 5 = 8 \cdot 10 = 80$

a) $\frac{\frac{100^4}{2^7}}{25^3}$ b) $\frac{16^5}{8^6}$ c) $\frac{3^{3^2}}{(3^3)^2}$

1.6 Wie viele Zahlen gibt es?

Es ist klar, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt. Es scheint auch klar, dass es irgendwie mehr ganze Zahlen und noch viel mehr Bruchzahlen zu geben scheint.
Leider versagt unsere Intuition gründlichst, wenn es um den Begriff der Unendlichkeit geht.

1.6.1 Abzählbarkeit

Eine (unendliche) Menge M ist abzählbar, wenn man alle Elemente komplett durchnummerieren kann. Mit anderen Worten, M hat in diesem Sinne «gleich viele» Elemente wie $\mathbb{N}$. In der Mathematik spricht man von **Mächtigkeit** und sagt, M und $\mathbb{N}$ sind **gleich mächtig**.
$\mathbb{Z}$ ist abzählbar:

✎
In diesem Sinne hat $\mathbb{Z}$ gleich viele Elemente wie $\mathbb{N}$, oder korrekter: $\mathbb{Z}$ ist gleich mächtig wie $\mathbb{N}$.

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar:

$\frac{-5}{5}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{-3}{5}$	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$
$\frac{-5}{4}$	$\frac{-4}{4}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$
$\frac{-5}{3}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{-3}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$
$\frac{-5}{2}$	$\frac{-4}{2}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-2}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$
$\frac{-5}{1}$	$\frac{-4}{1}$	$\frac{-3}{1}$	$\frac{-2}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$

Damit ist auch $\mathbb{Q}$ gleich mächtig wie $\mathbb{N}$.

1.6.2 $\mathbb{Q}$ ist löchrig wie Schweizer Käse

Aufgabe 1.18 Berechnen Sie das Resultat folgender Summe als Dezimalbruch, wenn man a) nur die ersten drei Summanden, b) nur die ersten 6 Summanden und c) nur die ersten zehn Summanden addiert. Und d) was erhält man, wenn man alle (unendlich viele) Summanden addiert?

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10'000} + \dots$$

Gedankenexperiment
Stellen Sie sich vor, Sie hätten einen Tipp-Ex-Roller. Mit diesem Roller wird auf der Zahlengeraden eine Zahl $q \in \mathbb{Q}$ (also ein Punkt) mit einem kleinen Streifen Tipp-Ex einer gewissen Länge $l \in \mathbb{Q}$ übermalt:

✎
Die rationalen Zahlen (Bruchzahlen) sind abzählbar, d.h. man kann sie durchnummerieren. Die erste Bruchzahl in dieser Nummerierung wird mit einem Streifen der Länge $\frac{3}{10}$ übermalt, die zweite mit einem Streifen der Länge $\frac{3}{100}$, die dritte mit $\frac{3}{1000}$ und so weiter.
Frage 1 Wie lange ist der Streifen für die n-te Bruchzahl?
Frage 2 Wie viel «Gesamtlänge Tipp-Ex» braucht man so, um *alle* Bruchzahlen zu übermalen?
Frage 3 Kann das sein? Haben Sie eine Vermutung, wo das «Problem» liegen könnte?
✎

1.6.3 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\sqrt{2}$ ist jene Zahl, die
Schon die Pythagoräer wussten, dass nicht alles als Verhältnis von ganzen Zahlen beschrieben werden kann, wie z.B. die Länge der Diagonale des Einheitsquadrates.

Aufgabe 1.19 Berechnen Sie die Länge der Diagonalen in einem Quadrat mit der Seitenlänge 1.

Der folgende Beweis geht zurück auf den griechischen Mathematiker Euklid von Alexandria (ca. 300 v.Chr.).

Beweis: Zu zeigen ist, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Um das zu beweisen, werden wir (fälschlicherweise) zuerst das Gegenteil annehmen, nämlich dass $\sqrt{2} = \frac{z}{n} \in \mathbb{Q}$. Wir werden zeigen, dass sich damit ein Widerspruch konstruieren lässt und damit unsere Annahme falsch sein muss.

Wir können natürlich annehmen, dass $\frac{z}{n}$ vollständig gekürzt ist. (Sollte das nicht so sein, kürzen wir vollständig und nehmen dann den gekürzten Bruch.) Verwenden wir die Definition von $\sqrt{2}$: ✎

1.7 Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Auf der Zahlengeraden entspricht $\mathbb{R}$ der Menge *aller Punkte*. Dargestellt werden reelle Zahlen meistens als Dezimalbrüche, z.B. $\pi = 3.141592653589793\ldots$. Oder aber als ganze Zahlen, Brüche oder Symbole, wie z.B. $\sqrt{2}$.

Die Zahlenmengen können wie folgt dargestellt werden:

1.7.1 Dezimalbrüche

Wir unterscheiden 3 Arten von Dezimalbrüchen:

Abbrechende Dezimalbrüche, wie z.B. 2.25. Abbrechende Dezimalbrüche sind immer rational, d.h. Elemente von $\mathbb{Q}$.

Periodische, nicht-abbrechende Dezimalbrüche, wie z.B. $0.33333\ldots = 0.\overline{3}$ oder $74.4213131313\ldots = 74.42\overline{13}$. Auch diese Dezimalbrüche sind immer rational.

Nicht-periodische, nicht-abbrechende Dezimalbrüche, wie z.B. $1.4142135623730951\ldots$ oder $0.101001000100001000001\ldots$ oder $1.234567891011121314151 6\ldots$. Diese Dezimalbrüche sind **irrational**, d.h. nicht Element von $\mathbb{Q}$.

1.7.2 Nicht-Abzählbarkeit von $\mathbb{R}$

Das $\mathbb{R}$, bzw. die Menge aller Punkte auf der Zahlengeraden nicht abzählbar sein kann, haben wir schon beim Gedankenexperiment mit dem überstreichen aller rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ gesehen. Man kann aber auch direkt zeigen, dass $\mathbb{R}$ nicht abzählbar sein kann, indem man, wieder durch Widerspruch, das Gegenteil annimmt.

Sei r_1, r_2, etc. eine vollständige, durchnummerierte Liste aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Diese können alle als Dezimalbrüche geschrieben werden, die mit 0. beginnen und unendlich viele Nachkommastellen haben (die aber auch alle Null sein können):

r_1	0.	3	6	4	2	4	3	5	...
r_2	0.	7	1	2	3	1	4	9	...
r_3	0.	8	9	9	1	2	5	6	...
r_4	0.	2	0	7	1	3	6	3	...
r_5	0.	1	0	5	4	2	7	1	...
r_6	0.	2	5	4	8	1	8	2	...
r_7	0.	2	6	8	9	1	2	4	...

Aus dieser Tabelle bildet man eine neue Zahl entlang der Diagonalen, indem man alle Ziffern ausser der Eins durch eine Eins ersetzt, und die Einsen durch eine Null. Im Beispiel hier erhält man die Zahl $0.1010111\ldots$. Begründen Sie, warum diese Zahl *nicht* in der Liste vorkommt.

D.h. es kann keine vollständige Liste geben. Damit ist $\mathbb{R}$ mächtiger als $\mathbb{N}$.

Die saubere Definition der reellen Zahlen und Ausdehnung der bekannten Rechengesetze ist sehr anspruchsvoll und wurde erst 1871 von Georg Cantor das erste mal vollbracht. Der obige «Diagonalenbeweis» wurde, ebenfalls von Cantor, im Jahre 1891 publiziert. Wir feiern also erst das 150-Jahre-Jubiläum der mathematischen Fassbarkeit des gesamten Zahlenstrahls.

1.8 Primzahlen und Primfaktorzerlegung

Definition 1.6 Primzahl

Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl die *genau 2 Teiler* hat.

Aufgabe 1.20 Schreiben Sie alle Primzahlen bis 50 auf:

Definition 1.7 Primzahlzerlegung

Jede natürliche Zahl grösser gleich 2 kann in eindeutiger Weise als Produkt von Potenzen von Primzahlen geschrieben werden (Basen aufsteigend geordnet).

Dazu dividiert man nach und nach «offensichtliche» Faktoren aus. Z.B.

$$14\,400 = 100 \cdot 144 = 10^2 \cdot 12^2 = (2 \cdot 5)^2 \cdot (3 \cdot 4)^2 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 2^4 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

Aufgabe 1.21 Bestimmen Sie Primfaktorzerlegung:

a) $294 \cdot 7500 \cdot 2300$ b) $441 \cdot 275000 \cdot 70000$ c) $315 \cdot 154000 \cdot 29000$ d) $525 \cdot 10500 \cdot 23000$

e) $84 \cdot 16500 \cdot 1900$ f) $1225 \cdot 23100 \cdot 29000$ g) $525 \cdot 1800 \cdot 19000$ h) $735 \cdot 6600 \cdot 170000$

1.9 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 1.1 ex-zahlmengen-schreibweisen

Es gibt z.T. mehrere korrekte Möglichkeiten für die beschreibende Form.

a) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\}$
$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist prim}\}$.

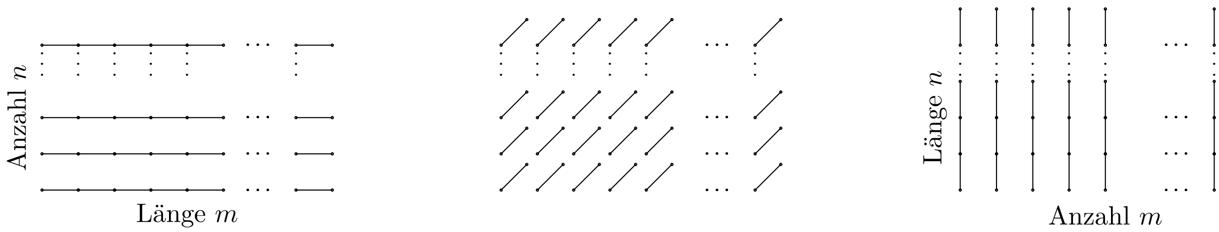
b) $\{37, 74, 111, 148, 185, \ldots,\}$
$\{37x \mid x \in \mathbb{N}\}$, oder
$\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 37 teilbar}\}$, oder
$\{n \in \mathbb{N} \mid n = 37k, k \in \mathbb{N}\}$.

c) $\{0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000\}$
$\{a^3 \mid a^3 < 1111 \text{ und } a \in \mathbb{N}\}$, oder
$\{b \in N \mid b < 1111 \text{ und } b = c^3 \text{ mit } c \in \mathbb{N}\}$.

d) $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots\}$
$\{2^z \mid z \in \mathbb{N}\}$, oder
$\{y \in \mathbb{N} \mid y = 2^x \text{ mit } x \in \mathbb{N}\}$.

Lösung zu Aufgabe 1.2 ex-kommutativ-multiplikation

a) Bleibt man bei der Definition vom Abtragen von Strecken kann die Kommutativität mit folgendem Bild «bewiesen» werden, wo man sich vorstellt, wie die Strecken der Länge 1 im Gegenuhrzeigersinn gedreht werden:



Man könnte aber auch einfach a mal b Punkte auf einem Gitter als Rechteck anordnen und so einsehen, dass man auf das gleiche Resultat kommt, ob man a mal b Punkte zusammen zählt oder b mal a Punkte zusammen zählt.

b) Betrachtet man Punkte auf einem 3-dimensionales Gitter, die einen Quader mit Seitenlängen (gemessen in Anzahl Punkten) a, b und c bilden, leuchtet auch das Assoziativgesetz ein.

Lösung zu Aufgabe 1.3 ex-kommutativ-aber-nicht-assoziativ

Die Kommutativität ergibt sich direkt aus den Spielregeln, es spielt keine Rolle ob man $x*y$ oder $y*x$ betrachtet, das Resultat (der Sieger) ist dasselbe.

Für die Assoziativität betrachtet man z.B.
$(r * p) * s = p * s = s$ (d.h. der Sieger von r gegen p spielt gegen s) und
$r * (p * s) = r * s = r$ (d.h. r spielt gegen den Sieger von p gegen s)
was nicht das gleiche ergibt. Also ist die Operation nicht assoziativ.

Lösung zu Aufgabe 1.4 ex-beweis-distributivgesetz

Zu zeigen ist, dass $a(b+c) = ab + ac$.

Dazu betrachtet man Punkte auf einem Gitter. Zuerst in einem Rechteck mit Länge $(b+c)$ und Höhe a. Die Anzahl Punkte entspricht $a(b+c)$.

Dann betrachtet man zwei Rechtecke nebeneinander mit Höhe a und den Längen b und c. Die Anzahl Punkte der beiden Rechtecke ist also $ab + ac$.

Die Anzahl Punkte total ist ein beiden Fällen gleich gross, weil die beiden Rechtecke zum grossen zusammengefügt werden können.

Lösung zu Aufgabe 1.5 ex-klammern-aufloesen-beweisen

M steht für Umwandlung von Minuszeichen in die Multiplikation mit -1 oder umgekehrt.
A steht für Ausmultiplizieren.
V steht für Vereinfachen/Ausrechnen.

$$a-(b+d-c) \overset{\text{M}}{\overset{\downarrow}{=}} a+(-1)\cdot(b+d-c) \overset{\text{A}}{\overset{\downarrow}{=}} a+(-1)\cdot b+(-1)\cdot d-(-1)\cdot c \overset{\text{M}}{\overset{\downarrow}{=}}$$
$$a-b-d+(-1)\cdot(-1)\cdot c \overset{\text{V}}{\overset{\downarrow}{=}} a-b-d+1\cdot c \overset{\text{V}}{\overset{\downarrow}{=}} a-b-d+c$$

Lösung zu Aufgabe 1.8 ex-bruchmultiplikation

a) $\frac{27}{10}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{21}{22}$ d) $\frac{3}{2}$

Lösung zu Aufgabe 1.9 ex-potenzen-mul-only

a) $-\frac{3}{7}a^5d^6g^5$ b) $\frac{5}{3}h^3m^4n^7$ c) $-\frac{3}{2}f^6m^6y^2$
d) $\frac{1}{2}g^4t^{10}z^3$ e) $\frac{3}{8}c^5t^6x^6$ f) $\frac{10}{13}c^6t^5$

Lösung zu Aufgabe 1.10 ex-monome-power

a) $\frac{125}{8}e^6s^{15}u^3$ b) $\frac{625}{16}b^{12}d^{12}h^8$ c) $\frac{25}{4}c^2m^{10}y^8$ d) $\frac{9}{4}d^{10}m^6p^2$
e) $\frac{9}{4}d^2t^6w^2$ f) $-\frac{125}{8}a^9m^{12}s^{15}$ g) $\frac{625}{16}a^{20}b^8e^4$ h) $\frac{9}{4}f^8h^6y^2$

Lösung zu Aufgabe 1.11 ex-monome-division

a) $-\frac{7}{2}\cdot\frac{b^2n}{h^5}$ b) $-\frac{7}{2}\cdot\frac{d^3}{q}$ c) $\frac{9}{2}\cdot\frac{g^2}{m}$
d) $\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2}$ e) $-\frac{9}{2}\cdot\frac{w^4}{u^4}$ f) $-\frac{11}{2}es^6$

Lösung zu Aufgabe 1.12 ex-monome-quotient-power

a) $-\frac{243}{32}\cdot\frac{p^5}{f^{15}k^5m^{10}s^{15}}$ b) $\frac{625}{16}\cdot\frac{m^{12}x^{12}}{s^4u^{16}y^{16}}$ c) $\frac{243}{32}\cdot\frac{m^{25}}{e^{15}n^{20}s^{25}u^{15}}$
d) $\frac{81}{16}\cdot\frac{f^8}{k^8p^8q^{16}t^{20}}$ e) $\frac{625}{16}\cdot\frac{g^{16}}{c^{16}f^4h^{16}y^4}$ f) $\frac{81}{16}\cdot\frac{f^8}{c^{20}t^{16}u^{16}y^{20}}$

Lösung zu Aufgabe 1.13 ex-ausmultiplizieren-einfach

a) $\frac{7}{3}g^2 - \frac{5}{9}gp^2 + \frac{14}{15}gp^2 - \frac{2}{9}p^4 = \frac{7}{3}g^2 + \frac{17}{45}gp^2 - \frac{2}{9}p^4$

b) $-\frac{7}{18}a^4 + \frac{9}{22}a^2b + \frac{7}{4}a^2b - \frac{81}{44}b^2 = -\frac{7}{18}a^4 + \frac{95}{44}a^2b - \frac{81}{44}b^2$

c) $-\frac{28}{9}h^2 - \frac{8}{9}hn^2 + \frac{14}{11}hn^2 + \frac{4}{11}n^4 = -\frac{28}{9}h^2 + \frac{38}{99}hn^2 + \frac{4}{11}n^4$

Ivo Blöchliger

d) $\frac{25}{96}m^4 - \frac{5}{16}m^2w^2 + \frac{55}{16}m^2w^2 - \frac{33}{8}w^4 = \frac{25}{96}m^4 + \frac{25}{8}m^2w^2 - \frac{33}{8}w^4$

e) $-\frac{5}{18}t^4 - \frac{5}{12}t^2w + \frac{4}{15}t^2w + \frac{2}{5}w^2 = -\frac{5}{18}t^4 - \frac{3}{20}t^2w + \frac{2}{5}w^2$

f) $\frac{35}{36}s^2 - 2su - \frac{1}{9}su + \frac{8}{35}u^2 = \frac{35}{36}s^2 - \frac{19}{9}su + \frac{8}{35}u^2$

Lösung zu Aufgabe 1.14 ex-ausmultiplizieren-bruch-monome

a) $-\frac{15}{22}n^4w^2 - \frac{33}{5n^4w^8} - \frac{3}{w^3} - \frac{3}{2w^3} = -\frac{15}{22}n^4w^2 - \frac{33}{5n^4w^8} - \frac{9}{2w^3}$

b) $-\frac{9f^6}{16w^4} + \frac{25w^6}{44f^6} - \frac{45}{88}w + \frac{5}{8}w = -\frac{9f^6}{16w^4} + \frac{25w^6}{44f^6} + \frac{5}{44}w$

c) $-\frac{27a^4}{8w^2} - \frac{81}{8}a^2 - \frac{15}{8}a^2 - \frac{45}{8}w^2 = -\frac{27a^4}{8w^2} - 12a^2 - \frac{45}{8}w^2$

d) $-\frac{3}{7}p^6t^2 + \frac{7}{6p^6t^4} - \frac{5}{3t} + \frac{3}{10t} = -\frac{3}{7}p^6t^2 + \frac{7}{6p^6t^4} - \frac{41}{30t}$

Lösung zu Aufgabe 1.15 ex-ausklammern-nennerfrei

a) $\frac{1}{4ck^2} \cdot \left(3 - 5c^4k^4\right)$

b) $\frac{x^2}{8g^3} \cdot \left(-3g^4 + 10x\right)$

c) $\frac{2k^2}{21b^3} \cdot \left(-35b^4 - 6k\right)$

d) $\frac{m}{35p^2} \cdot \left(28 - 25p^4\right)$

e) $\frac{1}{10k^2q^3} \cdot \left(9 + 4kq^6\right)$

f) $\frac{q}{10m^3} \cdot \left(14 + 5m^2q^2\right)$

g) $\frac{e^2}{2s^2} \cdot \left(-7e - s^5\right)$

h) $\frac{y}{5b} \cdot \left(-3 + 4y^2\right)$

Lösung zu Aufgabe 1.16 ex-doppelbrueche

a) $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{\frac{2}{3}}{4}} = \dfrac{\frac{8}{12}+\frac{9}{12}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{17}{12}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{12}} = \dfrac{\frac{17}{12}}{\frac{6}{12}+\frac{2}{12}} = \dfrac{\frac{17}{12}}{\frac{8}{12}} = \dfrac{17}{\cancel{12}} \cdot \dfrac{\cancel{12}}{8} = \dfrac{17}{8}$

b) $\dfrac{2-\frac{4}{3}}{\frac{2}{\frac{3}{4}}+2} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{\frac{6}{3}-\frac{4}{3}}{\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}+2} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{3}+\frac{6}{3}} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{14}{3}} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{\cancel{2}^1}{\cancel{3}} \cdot \dfrac{\cancel{3}}{\cancel{14}_7} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{7} - \dfrac{2}{3} =$
$\dfrac{3}{21} - \dfrac{14}{21} = -\dfrac{11}{21}$

c) $\dfrac{\frac{8^2+6^2+5^2}{2\cdot(2^5-3^3)^2}}{\left(\frac{5}{4}\right)^3} = \dfrac{\frac{64+36+25}{2\cdot(32-27)^2}}{\frac{5^3}{4^3}} = \dfrac{125}{2\cdot(5)^2} \cdot \dfrac{4^3}{5^3} = \dfrac{\cancel{5^3}}{\cancel{2}\cdot 5^2} \cdot \dfrac{2^{\cancel{6}5}}{\cancel{5^3}} = \dfrac{32}{25}$

d) $-2-\dfrac{-2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}{-\frac{2}{-\frac{-3}{-2}}} = -2-\dfrac{-2-\frac{4}{9}}{-\frac{2}{-\frac{3}{2}}} = -2-\dfrac{-2-\frac{4}{9}}{-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} = -2-\dfrac{-\frac{18}{9}-\frac{4}{9}}{\frac{4}{3}} = -2-\left(-\dfrac{\cancel{22}^{11}}{\cancel{9}_3}\right)\cdot\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{4}_2} =$
$-2-\left(-\dfrac{11}{6}\right) = -\dfrac{12}{6} + \dfrac{11}{6} = -\dfrac{1}{6}$

e) $1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}} = 1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = 1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}} = 1+\dfrac{1}{1+\frac{2}{3}} = 1+\dfrac{1}{\frac{5}{3}} = 1+\dfrac{3}{5} = \dfrac{8}{5}$

f) $\dfrac{\left(\frac{117}{127}\right)^4}{\frac{117^3}{127^5}} \cdot \dfrac{\frac{1}{117}}{127} = \dfrac{117^4}{127^4} \cdot \dfrac{127^5}{117^3} \cdot \dfrac{1}{117} \cdot \dfrac{1}{127} = \dfrac{117^4\cdot 127^5}{127^4\cdot 117^3\cdot 117\cdot 127} = \dfrac{117^4\cdot 127^5}{127^5\cdot 117^4} = 1$

Lösung zu Aufgabe 1.17 ex-potenzgesetze-brueche

a) $\frac{\left(2^2\cdot 5^2\right)^4}{2^7} \cdot \frac{1}{\left(5^2\right)^3} = \frac{\left(2^2\right)^4\cdot\left(5^2\right)^4}{2^7\cdot 5^6} = \frac{2^8\cdot 5^8}{2^7\cdot 5^6} = 2\cdot 5^2 = 2\cdot 25 = 50$

b) $\frac{\left(2^4\right)^5}{\left(2^3\right)^6} = \frac{2^{20}}{2^{18}} = 2^2 = 4$

c) $\frac{3^9}{3^6} = 3^3 = 27$

Lösung zu Aufgabe 1.21 ex-primfaktorzerlegung

a) $294 \cdot 7500 \cdot 2300 \quad = \quad 2 \cdot 3 \cdot 7^2 \ \cdot \ 3 \cdot 5^2 \cdot 10^2 \ \cdot \ 10^2 \cdot 23 \quad = \quad 2 \cdot 3 \cdot 7^2 \ \cdot \ 3 \cdot 5^2 \cdot (2 \cdot 5)^2 \ \cdot \ (2 \cdot 5)^2 \cdot 23 \quad = \quad 2 \cdot 3 \cdot 7^2 \ \cdot \ 2^2 \cdot 3 \cdot 5^4 \ \cdot \ 2^2 \cdot 5^2 \cdot 23 \quad = \quad 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 23$

b) $441 \cdot 275000 \cdot 70000 \quad = \quad 3^2 \cdot 7^2 \ \cdot \ 5^2 \cdot 10^3 \cdot 11 \ \cdot \ 7 \cdot 10^4 \quad = \quad 3^2 \cdot 7^2 \ \cdot \ 5^2 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot 11 \ \cdot \ 7 \cdot (2 \cdot 5)^4 \quad = \quad 3^2 \cdot 7^2 \ \cdot \ 2^3 \cdot 5^5 \cdot 11 \ \cdot \ 2^4 \cdot 5^4 \cdot 7 \quad = \quad 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^9 \cdot 7^3 \cdot 11$

c) $315 \cdot 154000 \cdot 29000 \quad = \quad 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \ \cdot \ 2 \cdot 7 \cdot 10^3 \cdot 11 \ \cdot \ 10^3 \cdot 29 \quad = \quad 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \ \cdot \ 2 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot 11 \ \cdot \ (2 \cdot 5)^3 \cdot 29 \quad = \quad 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \ \cdot \ 2^4 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \ \cdot \ 2^3 \cdot 5^3 \cdot 29 \quad = \quad 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^7 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 29$

d) $525 \cdot 10500 \cdot 23000 \quad = \quad 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \ \cdot \ 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 10^2 \ \cdot \ 10^3 \cdot 23 \quad = \quad 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \ \cdot \ 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 5)^2 \ \cdot \ (2 \cdot 5)^3 \cdot 23 \quad = \quad 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \ \cdot \ 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7 \ \cdot \ 2^3 \cdot 5^3 \cdot 23 \quad = \quad 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^8 \cdot 7^2 \cdot 23$

e) $84 \cdot 16500 \cdot 1900 \quad = \quad 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \ \cdot \ 3 \cdot 5 \cdot 10^2 \cdot 11 \ \cdot \ 10^2 \cdot 19 \quad = \quad 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \ \cdot \ 3 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 5)^2 \cdot 11 \ \cdot \ (2 \cdot 5)^2 \cdot 19 \quad = \quad 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \ \cdot \ 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11 \ \cdot \ 2^2 \cdot 5^2 \cdot 19 \quad = \quad 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$

f) $1225 \cdot 23100 \cdot 29000 \quad = \quad 5^2 \cdot 7^2 \ \cdot \ 3 \cdot 7 \cdot 10^2 \cdot 11 \ \cdot \ 10^3 \cdot 29 \quad = \quad 5^2 \cdot 7^2 \ \cdot \ 3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 5)^2 \cdot 11 \ \cdot \ (2 \cdot 5)^3 \cdot 29 \quad = \quad 5^2 \cdot 7^2 \ \cdot \ 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \ \cdot \ 2^3 \cdot 5^3 \cdot 29 \quad = \quad 2^5 \cdot 3 \cdot 5^7 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 29$

g) $525 \cdot 1800 \cdot 19000 \quad = \quad 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \ \cdot \ 2 \cdot 3^2 \cdot 10^2 \ \cdot \ 10^3 \cdot 19 \quad = \quad 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \ \cdot \ 2 \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 5)^2 \ \cdot \ (2 \cdot 5)^3 \cdot 19 \quad = \quad 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \ \cdot \ 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \ \cdot \ 2^3 \cdot 5^3 \cdot 19 \quad = \quad 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^7 \cdot 7 \cdot 19$

h) $735 \cdot 6600 \cdot 170000 \quad = \quad 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \ \cdot \ 2 \cdot 3 \cdot 10^2 \cdot 11 \ \cdot \ 10^4 \cdot 17 \quad = \quad 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \ \cdot \ 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 5)^2 \cdot 11 \ \cdot \ (2 \cdot 5)^4 \cdot 17 \quad = \quad 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \ \cdot \ 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \ \cdot \ 2^4 \cdot 5^4 \cdot 17 \quad = \quad 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^7 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 17$