den Sehnen $[AX]$ und $[BX]$ gleich lang sein, d.h. $X \in m_{AB}$, was zu beweisen war.

**Lösung zu Aufgabe 4.44** ex-geom-ort-kegelschnitte2

a) Der 1.g.O.f.$Z_3$ ist ein konzentrisches Kreispaar $k_{1,1} = k(Z_1, r_1 + r_3)$ und $k_{1,2} = k(Z_1, r_1 - r_3)$, wobei letzterer nur existiert, wenn $r_1 > r_3$.

Der 2.g.O.f.$Z_3$ ist ein konzentrisches Kreispaar $k_{2,1} = k(Z_2, r_2 + r_3)$ und $k_{2,2} = k(Z_2, r_2 - r_3)$, wobei letzterer nur existiert, wenn $r_2 > r_3$.

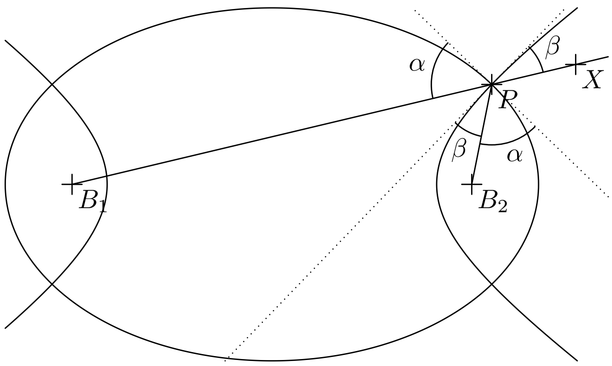
Die Schnittpunkte dieser beiden geometrischen Örter ergeben die möglichen Kreiszentren. Es kann zwischen 0 und 8 Lösungen geben (jeder Kreis kann mit den anderen beiden zwischen 0 und 4 Schnittpunkte bilden).

b) Die Kreise $k_1$ und $k_2$ schneiden sich nicht und liegen nicht ineinander. Der kleinste Kreis liegt also genau zwischen den beiden Kreisen. Das Kreiszentrum liegt also auf $Z_1Z_2$ und zwar genau in der Mitte zwischen den Schnittpunkten der Kreise mit $[Z_1Z_2]$.

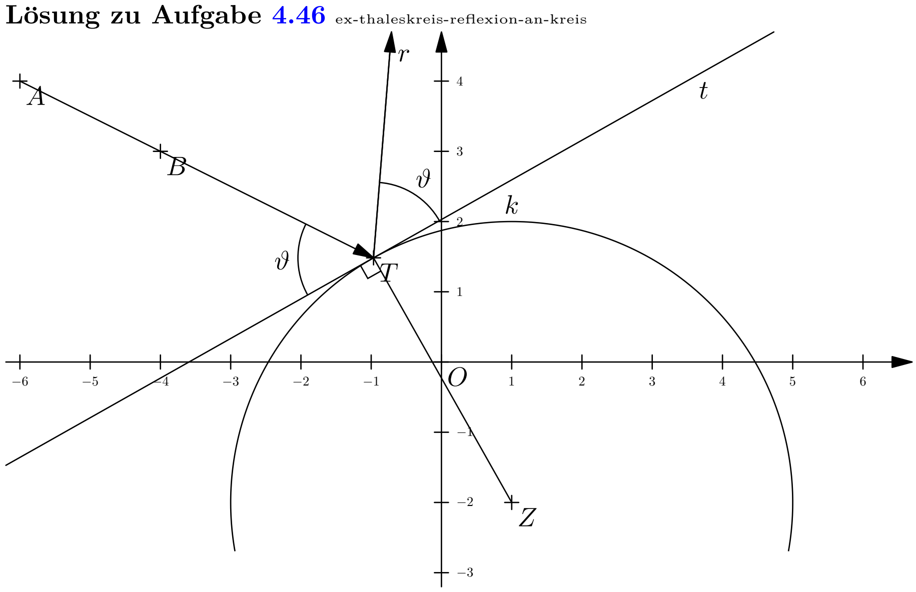
c) Es gilt $\overline{Z_3Z_1} = r_3 + r_1$ und $\overline{Z_3Z_2} = r_3 + r_2$. Man kennt zwar $r_3$ nicht, aber für die Differenz gilt: $\overline{Z_3Z_1} - \overline{Z_3Z_2} = (r_3 + r_1) - (r_3 + r_2) = r_1 - r_2$. Damit ist die Abstandsdifferenz zu zwei Punkten konstant, die Punkte $Z_3$ liegen also auf einem Hyperbelast mit Brennpunkten $Z_1$, $Z_2$ und Abstandsdifferenz $r_1 - r_2$.

**Lösung zu Aufgabe 4.45** ex-geom-ort-kegelschnitte4

Seien $B_1$ und $B_2$ die gemeinsamen Brennpunkte und $P$ ein Schnittpunkt der beiden Kurven.
Aus der Reflexionseigenschaft (Winkel $\alpha$) in der Ellipse folgt, dass die Tangente an die Ellipse in $P$ die äussere Winkelhalbierende vom $\sphericalangle B_1PB_2$ ist.
Analog bei der Hyperbel (Winkel $\beta$) folgt, dass die Tangente an die Hyperpel in $P$ die äussere Winkelhalbierende vom $\sphericalangle B_2PX$ ist.
Da die Geraden $B_1P$ und $PX$ identisch sind, bilden die Tangenten das Winkelhalbierendenpaar zu den Geraden $B_1P$ und $B_2P$ und stehen somit senkrecht aufeinander, was zu beweisen war.




**Lösung zu Aufgabe 4.46** ex-thaleskreis-reflexion-an-kreis




| | | |
|---|---|---|
| 1. | $g \cap k$ | $\rightarrow T$ |
| 2. | $\perp$ zu $ZT$ durch $T$ | $\rightarrow$ Tangente $t$ |
| 3. | $\vartheta = \sphericalangle(g,t)$ | $\rightarrow$ Einfallswinkel $\theta$ (theta) |
| 4. | $\vartheta$ an $t$ bei $T$ abtragen | $\rightarrow$ Lösung $r$ |