Lösung zu Aufgabe 5.13 ex-binomische-formeln-tri-quadri-poly

a) $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ und $a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$.

b) $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+2x_1x_2+2x_1x_3+\ldots+2x_1x_n+2x_2x_3+2x_2x_4+\ldots+\ldots+2x_{n-1}x_n$

Man erhält die (einfache) Summe aller Quadrate plus die doppelte Summe aller möglichen Zweierprodukte.

2 Zweierprodukte

$$(x_1+\ldots+x_i+\ldots+x_j+\ldots+x_n)(x_1+\ldots+x_i+\ldots+x_j+\ldots+x_n)$$

1 Quadrat

Lösung zu Aufgabe 5.14 ex-binomische-formeln-hoch-drei

$(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=\ldots=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Lösung zu Aufgabe 5.15 ex-binomische-formeln-hoch-vier

a)

$$\begin{array}{rlllll}(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)= & a^4+ & 3a^3b+ & 3a^2b^2+ & ab^3+ & \\ & & a^3b+ & 3a^2b^2+ & 3ab^3+ & b^4= \\ & a^4+ & 4a^3b+ & 6a^2b^2+ & 4ab^3+ & b^4\end{array}$$

b) $(a^2+2ab+b^2)^2=\underbrace{a^4+4a^2b^2+b^4}_{\text{Quadrate}}+\underbrace{4a^3b+2a^2b^2+4ab^3}_{\text{Doppelprodukte}}=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

Lösung zu Aufgabe 5.16 ex-binomische-formeln-pascal-dreieck

Die vollständige Tabelle sieht wie folgt aus:

$(a+b)^0$								1							
$(a+b)^1$							1		1						
$(a+b)^2$						1		2		1					
$(a+b)^3$					1		3		3		1				
$(a+b)^4$				1		4		6		4		1			
$(a+b)^5$			1		5		10		10		5		1		
$(a+b)^6$		1		6		15		20		15		6		1	
$(a+b)^7$	1		7		21		35		35		21		7		1

b) Die Zahlen sind immer die Summe der beiden oberen Zahlen (bzw. der einen Zahl an den Rändern).

c) Die Namen der Glieder von $(a+b)^n$ sind a^n, $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, $\ldots$, ab^{n-1}, b^n. D.h. die Potenzen von a sind absteigend, die Potenzen von b aufsteigend (alle Grade sind gleich n).

Multiplizert man nun $(a+b)^{n-1}$ mit a, erhält man die Namen von a^n bis ab^{n-1} mit den gleichen Koeffizienten wie $(a+b)^{n-1}$. Multiplizert man nun $(a+b)^{n-1}$ mit b, erhält man die Namen von $a^{n-1}b$ bis b^n, wieder mit den gleichen Koeffizienten. Schreibt man die Namen untereinander (wie in der Lösung von Aufgabe 5.3a)) sieht man, dass immer benachbarte Koeffizienten der Zeile $n-1$ zu einem neuen Koeffizienten der Zeile n addiert werden.

Lösung zu Aufgabe 5.17 ex-binomische-formeln-pascal-dreieck-anwenden

a) $(x-2)^5=x^5+5\cdot(-2)x^4+10\cdot(-2)^2x^3+10\cdot(-2)^3x^2+5\cdot(-2)^4x+(-2)^5=x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$

b) $(2x+3)^6=2^6x^6+6\cdot2^6\cdot3x^5+15\cdot2^4\cdot3^2x^4+20\cdot2^3\cdot3^3x^3+15\cdot2^2\cdot3^4x^2+6\cdot2\cdot3^5x+3^6$

Lösung zu Aufgabe 5.18 ex-binomische-formeln-pascal-dreieck-zeilensumme

a) Die Summe der n-ten Zeile ist 2^n.

b) Im Pascaldreieck wird eine Zahl als Summe der oberen beiden Zahlen berechnet. Umgekehrt trägt jede Zahl genau zwei Mal zur darunterliegenden Zeile bei. D.h. die Zeilensumme verdoppelt sich, wenn man eine Zeile nach unten geht. Da die erste Zeile die Summe $1=2^0$ stimmt die obige Aussage.