Lösung zu Aufgabe 8.2 ex-pythagoras-beweise

a) Mit den Katheten a, b und der Hypotenuse c kann man die Gesamtfläche auf 2 Arten berechnen und die entstehende Gleichung vereinfachen:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= c^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}ab\right) \\ a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 2ab & &| -2ab \\ a^2 + b^2 &= c^2\end{aligned}$$

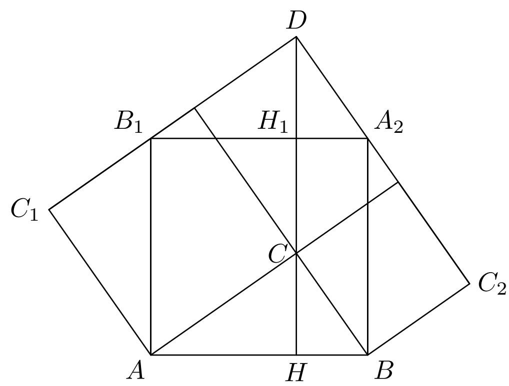
was zu beweisen war.

b) Mit den Katheten a, b und der Hypotenuse c kann man die Gesamtfläche auf 2 Arten berechnen und die entstehende Gleichung vereinfachen:

$$\begin{aligned}c^2 &= (a-b)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}ab\right) \\ c^2 &= a^2 - 2ab + b^2 + 2ab \\ c^2 &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

c) Zuerst ist zu bemerken, dass die Dreiecke $\triangle AB_1C_1$ und $\triangle A_2BC_2$ deckungsgleich sind mit $\triangle ABC$ und durch Drehungen um 90° erhalten wurden (gleiche Winkel, gemeinsame Seite b, bzw. a).
Damit gilt, dass die Strecken $[AB_1]$ und $[BA_2]$ und $[CD]$ alle die gleiche Länge c haben.
Das Parallelogramm $ACDB_1$ hat die gleiche Grundlinie und Höhe wie das Quadrat über der Seite $b = [AC]$ und hat somit die Fläche b^2. Dieses Parallelogramm hat die gleiche Fläche wie das Rechteck AHH_1B_1.
Das Parallelogramm BA_2DC hat die gleiche Grundlinie und Höhe wie das Quadrat über der Seite $a = [AC]$ und hat somit die Fläche a^2. Dieses Parallelogramm hat die gleiche Fläche wie das Rechteck HBA_2H_1.
Das Quadrat ABA_2B_1 hat die Fläche c^2 und ist gleich der Summe der Flächen der Rechtecke AHH_1B_1 und HBA_2H_1, also $b^2 + a^2$, was zu beweisen war.



Lösung zu Aufgabe 8.3 ex-umkehrformeln

a) $\boxed{c = \sqrt{a^2+b^2}}$. Die doppelte Dreiecksfläche ist $ab = ch$ und daraus $h = \frac{ab}{c}$, eingesetzt für c: $\boxed{h = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$.
Kathetensatz: $cp = a^2$ also $p = \frac{a^2}{c}$, eingesetzt für c: $\boxed{p = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}}$. Entsprechend $\boxed{q = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}}$.

b) $\boxed{h = \sqrt{a^2-p^2}}$, Kathetensatz $cp = a^2$ also $\boxed{c = \frac{a^2}{p}}$. Aus $p+q = c$ ergibt sich $q = c-p$, also $\boxed{q = \frac{a^2}{p} - p}$.
Für b bieten sich jetzt viele Wege an, z.B. $b = \sqrt{c^2-a^2}$, eingesetzt für c: $\boxed{b = \sqrt{\frac{a^4}{p^2} - a^2}}$. Hinweis: Die letzte Formel lässt sich zu $b = a\frac{h}{p}$ vereinfachen.

c) $\boxed{h = \sqrt{pq}}$. $\boxed{c = p+q}$. $a = \sqrt{h^2+p^2}$, eingesetzt für h: $\boxed{a = \sqrt{pq+p^2}}$, entsprechend $\boxed{b = \sqrt{pq+q^2}}$.

d) $\boxed{q = c-p}$. Aus dem Höhensatz ergibt sich $\boxed{h = \sqrt{p(c-p)}}$, aus dem Kathetensatz $\boxed{a = \sqrt{cp}}$ und $\boxed{b = \sqrt{c(c-p)}}$