8 Satzgruppe des Pythagoras

8.1 Bruchverbrechen

Aufgabe 8.1 Falls ein Fehler vorhanden ist, erklären und korrigieren Sie diesen. Wenn kein Fehler vorhanden ist, erklären Sie, wie man das einfacher machen könnte.

a) $2 \cdot \dfrac{ab}{a^2-b^2} = \dfrac{2ab}{2a^2-2b^2}$

b) $\dfrac{b}{a+b} \cdot \dfrac{a}{a-b} = \dfrac{b(a-b)}{a^2-b^2} \cdot \dfrac{a(a+b)}{a^2-b^2}$

c) $\dfrac{b(a-b)}{a^2-b^2} \cdot \dfrac{a(a+b)}{a^2-b^2} = \dfrac{b(a-b)\cdot a(a+b)}{a^2-b^2}$

d) $\dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2} - \dfrac{ab-b^2}{a^2-b^2} = \dfrac{a^2+ab-ab-b^2}{a^2-b^2} = \dfrac{a^2-b^2}{a^2-b^2} = 1$

e) $\dfrac{\cancel{a-b}}{a^2-ab} : \dfrac{b^2-ab}{\cancel{a-b}} = \dfrac{1}{a^2-ab} : \dfrac{b^2-ab}{1}$

f) $\dfrac{1}{a^2-ab} - \dfrac{b^2-ab}{1} = \dfrac{1}{a^2-ab} - b^2 - ab$

g) $\dfrac{a+b}{a-b} + \dfrac{a-b}{a+b} - 2 \cdot \dfrac{a^2}{a^2-b^2} = \dfrac{(a+b)^2}{a^2-b^2} + \dfrac{(a-b)^2}{a^2-b^2} - \dfrac{2(a^2-b^2)}{a^2-b^2} \cdot \dfrac{a^2}{a^2-b^2} = \dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2-2(a^2-b^2)}{a^2-b^2} \cdot \dfrac{a^2}{a^2-b^2}$

h) $\dfrac{a}{a^4+b^4} = \dfrac{a}{a(a^3+b^4)} = \dfrac{1}{a^3+b^4}$

i) $\dfrac{\cancel{(a+b)}+ab}{\cancel{(a+b)}-ab} = \dfrac{ab}{-ab} = -1$

j)
$$\frac{4x-5}{6} = x + \frac{5}{6} \qquad |\cdot 6$$
$$4x-5 = x+5$$

k)
$$\frac{4x+7}{6} = \frac{4+5x}{6} \qquad |-4x-4$$
$$\frac{3}{6} = \frac{x}{6}$$

l) Seien a und b zwei reelle Zahlen. Was lässt sich über die Vorzeichen von a und b aussagen, wenn man weiss, dass $a \cdot b < 0$?

m) Seien a und b zwei reelle Zahlen von denen man weiss, dass $a \cdot b < 2$. Was lässt sich über die Vorzeichen von a und b aussagen?

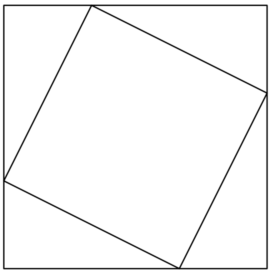
8.2 Satzgruppe des Pythagoras

Satz 1 Satz des Pythagoras

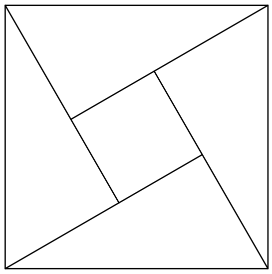
✎

Aufgabe 8.2 Beweisen Sie den Satz von Pythagoras mit folgenden Skizzen:

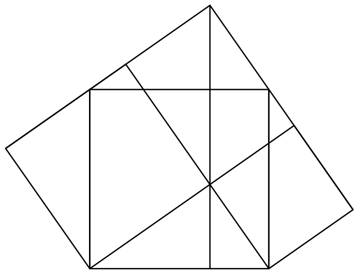
a)



b)



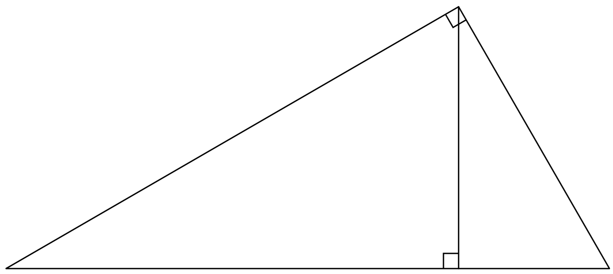
c)



8.2.1 Höhen- und Kathetensatz

Um den **Höhensatz** herzuleiten, drücken Sie c^2 einmal mit a, b und einmal mit p, q aus, setzen Sie die beiden Ausdrücke gleich und isolieren Sie das Produkt pq.

✎



✎

Für den **Kathetensatz**, drücken Sie a^2 mit h und p aus und ersetzen Sie h^2 mit Hilfe des Höhensatzes und klammern Sie p aus:

Satz 2 Höhen- und Kathetensatz

In einem rechtwinkligen Dreieck teilt die Höhe h auf die Hypotenuse c diese in zwei **Hypotenusenabschnitte**, p und q (wobei p näher bei a liegt). Es gilt:

Höhensatz: $pq = h^2$ **Kathetensatz:** $cp = a^2$ und $cq = b^2$

Aufgabe 8.3 In einem rechtwinkligen Dreieck teilt die Höhe h auf die Seite c diese in zwei Hypotenusenabschnitte, p und q, wobei p näher bei a liegt. Von den sechs Strecken a, b, c, h, p und q sind jeweils zwei gegeben. Finden Sie Formeln, um daraus die anderen vier zu berechnen.

a) a, b b) a, p c) p, q d) p, c

Aufgabe 8.4 Der Höhensatz und der Kathetensatz können für die konstruktive Verwandlung von Rechtecken in flächengleiche Quadrate gebraucht werden.

a) Konstruieren Sie mit Hilfe des Höhensatzes ein Quadrat, das die gleiche Fläche wie ein gegebenes Rechteck hat.

b) Konstruieren Sie mit Hilfe des Kathetensatzes ein Quadrat, das die gleiche Fläche wie ein gegebenes Rechteck hat.

c) Gegeben ist ein Quadrat mit Seitenlänge s und eine Streckenlänge x. Konstruieren Sie mit Hilfe des Höhensatzes ein Rechteck mit Seitenlänge x und gleicher Fläche wie das Quadrat.

d) Gegeben ist ein Quadrat mit Seitenlänge s und eine Streckenlänge x. Konstruieren Sie mit Hilfe des Kathetensatzes ein Rechteck mit Seitenlänge x und gleicher Fläche wie das Quadrat. Was ist zu beachten?

8.3 Spezielle rechtwinklige Dreiecke

Aufgabe 8.5 Ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck hat die Hypotenuse c und die Katheten $a = b$.

a) Berechnen Sie c, wenn a gegeben ist.

b) Berechnen Sie a, wenn c gegeben ist.

Aufgabe 8.6 In einem Dreieck mit den Innenwinkeln 30°, 60°, 90° sei c die Hypotenuse, a die kürzere und b die längere Kathete.
Wenn jeweils eine der drei Längen gegeben ist, berechnen Sie daraus die anderen beiden.

8.4 Reguläres Tetraeder

Das Tetraeder ist ein **platonischer Körper** bestehend aus 4 gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge s.

Anzahl Flächen:

Kanten:

Anzahl Ecken:

Seitenhöhe:

Körperhöhe:

Aufgabe 8.7 *Folgende Aufgaben sind grösstenteils aus der Aufgabensammlung von Angelika Rupflin der Kantonsschule am Burggraben St. Gallen*

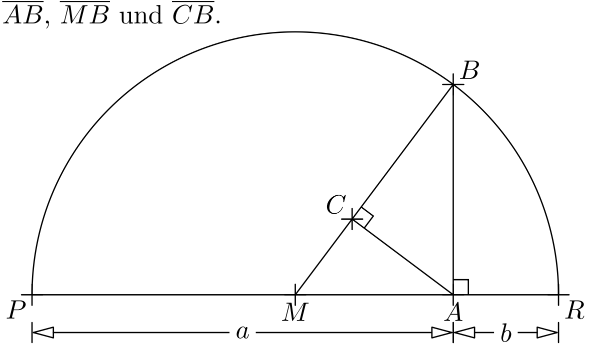
1. Gegeben sind zwei Quadrate mit den Seitenlängen 3 cm und 5 cm. Konstruieren Sie ein Quadrat dessen Flächeninhalt a) mit der Summe b) mit der Differenz der Inhalte der beiden Quadrate übereinstimmt.
2. Zeichnen Sie ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 3$ cm und konstruieren Sie dann ein Quadrat, das
a) den halben, b) den doppelten, c) den dreifachen Inhalt wie das ursprüngliche hat.
3. Konstruieren Sie (ausgehend von ganzzahligen Streckenlängen) auf mindestens 2 verschiedene Weisen ein Quadrat mit dem Flächeninhalt
a) 5 cm^2 b) 27 cm^2
4. Welchen Radius muss ein rundes Backblech mindestens haben, um eine rechteckige Tiefkühlpizza mit den Abmessungen 22 cm × 17 cm in den Ofen zu schieben.
5. Berechnen Sie die theoretische Blickweite von einem 100 m hohen Leuchtturm aufs Meer. (Erdradius $6.37 \cdot 10^6$ m)
6. Wie weit unter Wasser liegt die gerade Verbindungslinie von Romanshorn nach Friedrichshafen? Machen Sie eine Skizze. Erdradius: 6370 km.
7. Wie hoch darf ein 60 cm tiefer Schrank höchstens sein, damit man ihn aus der liegenden Position in einem 2.4 m hohen Raum durch Kippen aufstellen kann?
8. Berechnen Sie die Länge aller Seitenhalbierenden in einem rechtwinkligen Dreieck aus den Kathetenlängen a und b. a) $a = 6$ und $b = 10$ b) allgemein mit Parametern a und b
9. Von einem allgemeinen Dreieck ABC kennt man die Seite $c = 56$ cm, die Höhe $h_c = 15$ cm und die Seitenhalbierende $s_c = 17$ cm. Berechnen Sie die Länge der Seiten a und b.
10. Gegeben sei eine Strecke der Länge a.
Konstruieren Sie a) $\sqrt{61}a$ b) $\sqrt{153}a$ c) $\sqrt{7}a$
11. Gegeben sind die Punkte $A = (-3, -2)$, $B = (6, 1)$ und $C = (-5, 4)$. Prüfen Sie durch Rechnung, ob das Dreieck ABC rechtwinklig ist. (Achtung: Hier ist keine Zeichnung verlangt!)
12. Überprüfen Sie durch Rechnung, ob das Dreieck ABC mit $A = (2, 1)$, $B = (1, 10)$ und $C = (6, 5)$ rechtwinklig ist und geben Sie den Flächeninhalt an! (Keine Zeichnung!)
13. Verwandeln Sie ein Dreieck mit den Seiten 3 cm, 4 cm, 5 cm in ein flächengleiches Quadrat.

14. Verwandeln Sie ein Quadrat mit Seitenlänge 7.5 cm in ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite 5.5 cm lang ist. Erläutere kurz dein Vorgehen!
15. Ein Matrose sitzt auf hoher (und ruhiger) See im Ausguck eines Schiffes 25 m über dem Wasser. In welcher Entfernung (Luftlinie) sieht er frühestens
    a) eine auf dem Wasser treibende Luftmatratze?
    b) einen anderen Matrosen, der seinerseits in einem Ausguck 30 m über der Wasseroberfläche sitzt?

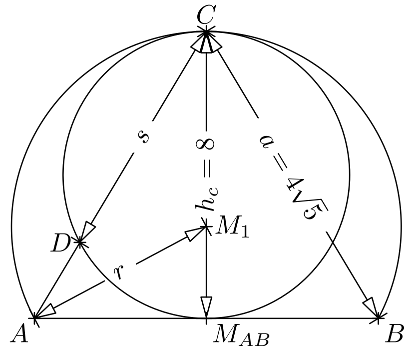
    Hinweise: Fertigen Sie eine Skizze an. Erdradius: 6370 km

Aufgabe 8.8

a) Berechnen Sie aus a und b die Längen der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{MB}$ und $\overline{CB}$.



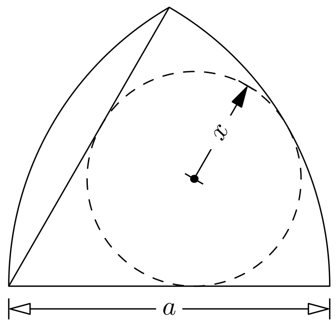
b) Berechnen Sie s und r aus $a = 4\sqrt{5}$ und $h_c = 8$.



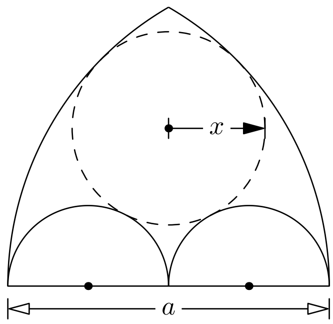
Aufgabe 8.9

Berechnen Sie aus a den Radius x der skizzierten Füllkreise.

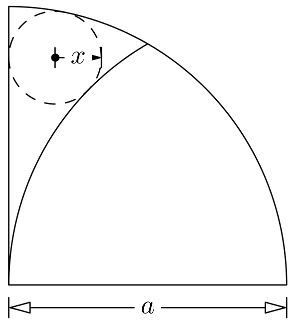
a)



b)



c)



Hinweis zu a): Suchen Sie das 30°-60° Dreieck.

Hinweise zu b) und c): Berechnen Sie den Abstand vom Kreiszentrum zur Grundlinie auf zwei Arten.

8.5 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 8.1 ex-bruch-verbrechen

a) Falsch. Richtig: $2 \cdot \dfrac{ab}{a^2-b^2} = \dfrac{2}{1}\dfrac{ab}{a^2-b^2} = \dfrac{2ab}{a^2-b^2}$.

b) Richtig, aber unnötig kompliziert. $\dfrac{b}{a+b} \cdot \dfrac{a}{a-b} = \dfrac{b(a-b)}{a^2-b^2} \cdot \dfrac{a(a+b)}{a^2-b^2}$ Erweitern ist unnötig beim Multiplizieren (nur zum Addieren muss erst gleichnamig gemacht werden). Es kann nachher wieder gekürzt werden. $\dfrac{b}{a+b} \cdot \dfrac{a}{a-b} = \dfrac{ab}{a^2-b^2}$

c) Falsch. Richtig wäre $\dfrac{b(a-b)}{a^2-b^2} \cdot \dfrac{a(a+b)}{a^2-b^2} = \dfrac{b(a-b)\cdot a(a+b)}{(a^2-b^2)^2}$

d) Falsch. Schutzklammer setzen: $\dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2} - \dfrac{ab-b^2}{a^2-b^2} = \dfrac{a^2+ab-\left(ab-b^2\right)}{a^2-b^2} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

e) Falsch. Gekürzt werden kann nur aus Produkten von Brüchen.

f) Falsch. Schutzklammer setzen: $\dfrac{1}{a^2-ab} - \dfrac{b^2-ab}{1} = \dfrac{1}{a^2-ab} - (b^2-ab) = \dfrac{1}{a^2-ab} - b^2 + ab$

g) Falsch. Punkt vor Strich! (Und es wurde unnötigerweise für eine Multiplikation erweitert). $\dfrac{(a+b)^2}{a^2-b^2} + \dfrac{(a-b)^2}{a^2-b^2} - \left(\dfrac{2(a^2-b^2)}{a^2-b^2} \cdot \dfrac{a^2}{a^2-b^2}\right) = \cancel{\dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2-2(a^2-b^2)}{a^2-b^2}} \cdot \dfrac{a^2}{a^2-b^2}$

h) Falsch. a kann nicht ausgeklammert werden (und dann auch nicht gekürzt werden).

i) Falsch: Aus Differenzen und Summen...

j) Falsch. Auch x muss mit 6 multipliziert werden. Die Operationen werden immer auf die **gesamte** linke und rechte Seite angewandt.

$$\begin{aligned} \frac{4x-5}{6} &= x + \frac{5}{6} && \mid \cdot 6 \\ 4x-5 &= 6x+5 \end{aligned}$$

k) Falsch. Die neue Gleichung hat zwar die gleichen Lösungen, es wurde aber nicht $4x$ sondern $\frac{4x}{6}$ subtrahiert. Richtig:

$$\begin{aligned} \frac{4x+7}{6} &= \frac{4+5x}{6} && \mid -\frac{4x}{6} - \frac{4}{6} \\ \frac{3}{6} &= \frac{x}{6} \end{aligned}$$

l) Wenn $ab < 0$, muss eine Zahl positiv und die andere negativ sein. D.h. Entweder ($a < 0$ und $b > 0$) oder ($a > 0$ und $b < 0$).

m) Nichts, jede Kombination ist möglich (man nehme z.B. alle möglichen Zweier-Kombinationen von $+1$ und -1).

Lösung zu Aufgabe 8.2 ex-pythagoras-beweise

a) Mit den Katheten a, b und der Hypotenuse c kann man die Gesamtfläche auf 2 Arten berechnen und die entstehende Gleichung vereinfachen:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= c^2 + 4\cdot\left(\frac{1}{2}ab\right) \\ a^2+2ab+b^2 &= c^2+2ab \qquad \mid -2ab \\ a^2+b^2 &= c^2\end{aligned}$$

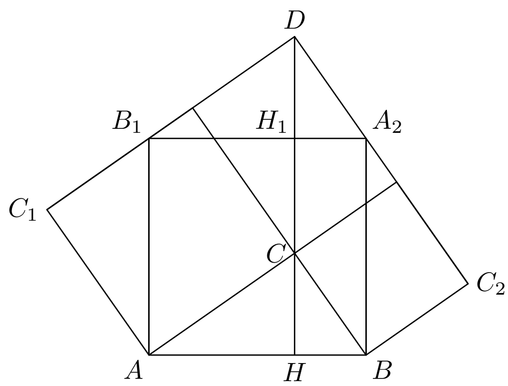
was zu beweisen war.

b) Mit den Katheten a, b und der Hypotenuse c kann man die Gesamtfläche auf 2 Arten berechnen und die entstehende Gleichung vereinfachen:

$$\begin{aligned}c^2 &= (a-b)^2 + 4\cdot\left(\frac{1}{2}ab\right) \\ c^2 &= a^2-2ab+b^2+2ab \\ c^2 &= a^2+b^2\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

c) Zuerst ist zu bemerken, dass die Dreiecke $\triangle AB_1C_1$ und $\triangle A_2BC_2$ deckungsgleich sind mit $\triangle ABC$ und durch Drehungen um 90° erhalten wurden (gleiche Winkel, gemeinsame Seite b, bzw. a).
Damit gilt, dass die Strecken $[AB_1]$ und $[BA_2]$ und $[CD]$ alle die gleiche Länge c haben.
Das Parallelogramm $ACDB_1$ hat die gleiche Grundlinie und Höhe wie das Quadrat über der Seite $b=[AC]$ und hat somit die Fläche b^2. Dieses Parallelogramm hat die gleiche Fläche wie das Rechteck AHH_1B_1.
Das Parallelogramm BA_2DC hat die gleiche Grundlinie und Höhe wie das Quadrat über der Seite $a=[AC]$ und hat somit die Fläche a^2. Dieses Parallelogramm hat die gleiche Fläche wie das Rechteck HBA_2H_1.
Das Quadrat ABA_2B_1 hat die Fläche c^2 und ist gleich der Summe der Flächen der Rechtecke AHH_1B_1 und HBA_2H_1, also b^2+a^2, was zu beweisen war.



Lösung zu Aufgabe 8.3 ex-umkehrformeln

a) $\boxed{c=\sqrt{a^2+b^2}}$. Die doppelte Dreiecksfläche ist $ab=ch$ und daraus $h=\frac{ab}{c}$, eingesetzt für c: $\boxed{h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$.
Kathetensatz: $cp=a^2$ also $p=\frac{a^2}{c}$, eingesetzt für c: $\boxed{p=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}}$. Entsprechend $\boxed{q=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}}$.

b) $\boxed{h=\sqrt{a^2-p^2}}$, Kathetensatz $cp=a^2$ also $\boxed{c=\frac{a^2}{p}}$. Aus $p+q=c$ ergibt sich $q=c-p$, also $\boxed{q=\frac{a^2}{p}-p}$.
Für b bieten sich jetzt viele Wege an, z.B. $b=\sqrt{c^2-a^2}$, eingesetzt für c: $\boxed{b=\sqrt{\frac{a^4}{p^2}-a^2}}$. Hinweis: Die letzte Formel lässt sich zu $b=a\frac{h}{p}$ vereinfachen.

c) $\boxed{h=\sqrt{pq}}$. $\boxed{c=p+q}$. $a=\sqrt{h^2+p^2}$, eingesetzt für h: $\boxed{a=\sqrt{pq+p^2}}$, entsprechend $\boxed{b=\sqrt{pq+q^2}}$.

d) $\boxed{q=c-p}$. Aus dem Höhensatz ergibt sich $\boxed{h=\sqrt{p(c-p)}}$, aus dem Kathetensatz $\boxed{a=\sqrt{cp}}$ und $\boxed{b=\sqrt{c(c-p)}}$

Lösung zu Aufgabe 8.4 ex-flaechenverwandlung

a) $h^2 = pq$. Die Rechtecksseiten entsprechen p und q. Damit kann die Seite $c = p + q$ hingelegt werden (Punkte A, B). Die Höhe als 1.g.O.f.C kann eingezeichnet werden. Der Thaleskreis über $[AB]$ ist der 2.g.O.f.C. Das Quadrat über h ist nun flächengleich.

b) $a^2 = cp$. Die längere Rechtecksseite entspricht c, die kürzere p. Damit kann die Seite c (Punkte A, B) und die Höhe h auf c (1.g.O.f.C) eingezeichnet werden. Der Thaleskreis über $[AB]$ ist der 2.g.O.f.C. Das Quadrat über a ist nun flächengleich.

c) $h^2 = pq$. Eine Quadratseite entspricht h (Punkt C und Höhenfusspunkt H), der Hypotenusenabschnitt p entspricht der Rechtecksseite x. Damit kann B konstruiert werden und die Seite b rechtwinklig zu a in C abgetragen werden, ergibt A und den gesuchten Hypotenusenabschnitt $q = [AH]$.

d) Je nachdem, ob $x < s$ oder $x > s$ ergibt sich eine andere Konstruktion.
Fall 1: $x > s$. Kathetensatz: $a^2 = cp$. Die Seite $c = x$. Eine Quadratseite entspricht der Seite a (Punkte B und C). Die Seite b kann also hingelegt werden (1.g.O.f.A). Der Kreis $k(B, s)$ ist der 2.g.O.f.A. Der Höhenfusspunkt auf c kann nun konstruiert und der gesuchte Hypotenusenabschnitt p abgelesen werden.
Fall 2: $x < s$. Kathetensatz: $a^2 = cp$. In diesem Fall $p = x$. Das Dreieck $\triangle BCH$ kann konstruiert werden (Thaleskreis über $[BC]$ geschnitten mit $k(B, x)$ ergibt H. Das Dreieck ABC kann nun ergänzt und die gesuchte Seite c kann abgelesen werden.

Lösung zu Aufgabe 8.5 ex-rechtwinklig-gleischschenkliges-dreieck

a) $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, also $c = \sqrt{2}a$.

b) Aus $c = \sqrt{2}a$ erhält man $a = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{c\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot c$.

Lösung zu Aufgabe 8.6 ex-30-60-90-dreieck

Erst ist zu bemerken, dass das 30°, 60°, 90° Dreieck ein halbes gleichseitiges Dreieck ist, d.h. $a = \frac{1}{2}c$.

$\boxed{a \text{ gegeben}}$: $c = 2a$ und $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3} \cdot a$.

$\boxed{b \text{ gegeben}}$: Aus $b = \sqrt{3}a$ erhält man $a = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{b\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot b$.

Und aus $c = 2a$ folgt $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}b$.

$\boxed{c \text{ gegeben}}$: $a = \frac{1}{2}c$ und (aus Teilaufgabe a)) $b = \sqrt{3}a = \frac{\sqrt{3}}{2}c$. (Oder etwas komplizierter, via Satz von Pythagoras: $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}c^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}c = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.)

Lösung zu Aufgabe 8.7 ex-pythagoras-angelikas-sammlung

1. a) Katheten mit Länge 3 und 5, dann ist das Hypotenusenquadrat die Lösung
   b) Kathete mit Länge 3, Hypotenuse mit Länge 5, dann ist das andere Kathetenquadrat die Lösung
2. Flächenverwandlung Rechteck → Quadrat (z.B. mit Hilfe des Höhensatzes, wobei ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenusenabschnitt 3 und a) $\frac{3}{2}$, b) 6 und c) 9 zu konstruieren ist. Die Höhe ist dann die gesuchte Quadratseite).
3. a) z.B. $5 = 1^2 + 2^2$ oder $5 = 3^2 - 2^2$ oder $5 = 1 \cdot 5$. b) $27 = 6^2 - 3^2$ oder $5^2 + 1^2 + 1^2$ oder $27 = 3 \cdot 9$.
4. 13.9 cm (Halbe Diagonale im Rechteck, zu berechnen mit dem Satz von Pythagoras).
5. 35.7 km. Sei M der Erdmittelpunkt, L die Spitze des Leuchtturms, T der Berührungspunkt der Tangente durch L an $k(M, r_e)$. Im $\triangle MLT$ gilt: $\overline{LT}^2 = \overline{ML}^2 - \overline{MT}^2 = (r_e + l)^2 - r_e^2$.
6. Alle Angaben in km. Erdradius $r = 6370$, Distanz $d = 12.2$. Die gesuchte Tiefe ist $r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} \approx 0.0029207$. Also knapp 3m.
7. maximal 2.32 m. Entscheidend ist die Rechtecksdiagonale bei Schrank. Diese darf höchstens gleich lang wie der Raum hoch sein.

8. $s_a = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} = \sqrt{109} = 10.44$, $s_b = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}} = \sqrt{61} = 7.81$. Die Schwerlinien sind Hypotenusen in rechtwinkligen Dreiecken!
$s_c = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} = \frac{\sqrt{136}}{2} = 5.83$ C liegt auf dem Thaleskreis und damit ist s_c ein Radius. Das gilt natürlich nur im rechtwinkligen Dreieck!
9. $a = 39$ $b = 25$. Seien H der Höhenfusspunkt und M_c die Seitenmitte von c. HM_c ist Kathete im $\triangle HM_cC$. $\overline{HM_c} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$. Damit ist $\overline{HA} = \frac{c}{2} - \overline{HM_c} = 28 - 8 = 20$. b ist Hypotenuse im $\triangle AHC$. $b = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$. a ist Hypotenuse im $\triangle HBC$. $a = \sqrt{15^2 + 36^2} = 39$.
10. a) z.B. $61 = 6^2 + 5^2$ b) z.B. $153 = 12^2 + 3^2$ c) $7 = 4^2 - 3^2$
11. Die Distanz zweier Punkte kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden. Z.B. ist die Strecke $[AB]$ die Hypotenuse und die Katheten sind parallel zu den Achsen. Deren Länge entspricht dann genau der Differenz der jeweiligen Koordinaten. Berechnet man diese Längen, stellt man fest, dass die Summe der Quadrate von zweien die dritte ergeben und damit ist das Dreieck rechtwinklig.
12. rechtwinklig, Fläche 20.
13. Dreieck in ein flächengleiches Rechteck umwandeln. Dann Höhen- oder Kathetensatz anwenden.
14. Höhen- oder Kathetensatz anwenden
15. a) 17.85 km (Lösung analog zu Aufgabe 5). b) 37.39 km (Lösung ganz ähnlich zu Aufgabe 6).

Lösung zu Aufgabe 8.8 ex-satzgruppe-pythagoras-figuren

a) Der Kreisbogen ist ein Thaleskreis über $[PR]$, damit ist $\triangle PRB$ rechtwinklig. Damit gilt der Höhensatz und so ist $\overline{AB} = \sqrt{ab}$.

$\overline{MB} = \overline{MR} = \frac{a+b}{2}$ (Kreisradien).

Der Kathetensatz im $\triangle MAB$ besagt: $\overline{MB} \cdot \overline{CB} = \overline{AB}^2$ und damit $\overline{CB} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{MB}} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}$

b) Im $\triangle M_{AB}BC$ gilt: $\overline{M_{AB}B} = \sqrt{a^2 - h_c^2} = \sqrt{80 - 64} = \sqrt{16} = 4$.

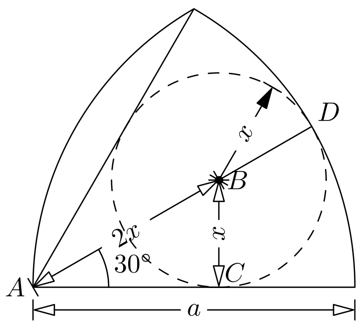
Im $\triangle M_{AB}M_1A$ gilt: $r^2 = \overline{M_{AB}A}^2 + (h_c - r)^2$. Eingesetzt:

$$\begin{aligned}
r^2 &= 4^2 + (8-r)^2 \\
r^2 &= 16 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot r + r^2 && \mid -r^2 \\
0 &= 80 - 16r && \mid +16r \\
16r &= 80 && \mid :16 \\
r &= 5
\end{aligned}$$

Der Punkt D liegt auf dem Thaleskreis über $M_{AB}C$ und damit ist $[M_{AB}D]$ die Höhe im rechtwinkligen $\triangle AM_{AB}C$. Der Kathetensatz besagt: $a \cdot s = h_c^2$ und damit ist $s = \frac{h_c^2}{a} = \frac{64}{4\sqrt{5}} = \frac{16}{\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{5}$

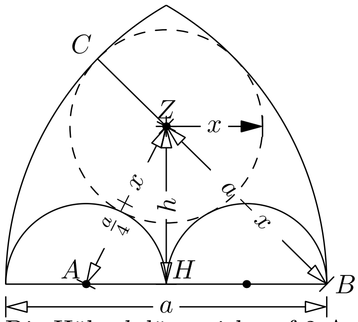
Lösung zu Aufgabe 8.9 ex-pythagoras-fuellkreise

a)



$\triangle ABC$ ist ein 30°-60° Dreieck und damit ist $\overline{AB} = 2\overline{CB}$. Weiter ist $\overline{AD} = a = 3x$ und damit ist $x = \frac{1}{3}a$.

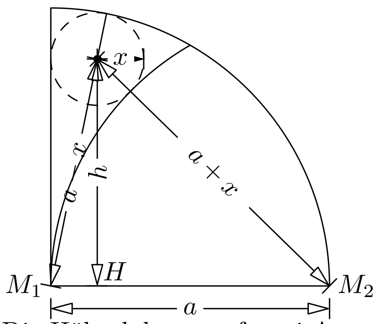
b)



Die Höhe h lässt sich auf 2 Arten berechnen, einmal im $\triangle AHZ$ und einmal im $\triangle HBZ$.

$$\begin{aligned}
h^2 &= h^2 \\
\left(x+\frac{a}{4}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 &= (a-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
x^2 + 2x\frac{a}{4} + \frac{a^2}{16} - \frac{a^2}{16} &= a^2 - 2ax + x^2 - \frac{a^2}{4} && \mid -x^2 \\
\frac{ax}{2} &= \frac{3a^2}{4} - 2ax && \mid +\frac{4ax}{2} \\
\frac{5ax}{2} &= \frac{3a^2}{4} && \mid \cdot \frac{2}{5a} \\
x &= \frac{3a}{10}
\end{aligned}$$

c)



Die Höhe h kann auf zwei Arten berechnet werden, einmal im $\triangle M_1HZ$ und einmal im $\triangle HM_2Z$:

$$\begin{aligned}
h^2 &= h^2 \\
(a-x)^2 - x^2 &= (a+x)^2 - (a-x)^2 \\
a^2 - 2ax &= 4ax && \mid +2ax \\
a^2 &= 6ax && \mid :6a \\
\frac{a}{6} &= x
\end{aligned}$$