15.5 Quadratische Funktionen

Definition 15.2 Quadratische Funktion

Eine **quadratische Funktion** ist eine Funktion, die auf die Form

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

gebracht werden kann für geeignete reelle Zahlen a, b, $c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$.

Merke 15.6 Normalparabel

Der Graph der quadratischen Funktion $f(x) = x^2$ heisst **Normalparabel**.
Mit anderen Worten ist die Normalparabel die Teilmenge $\{(x, y) \mid y = x^2\}$ der Ebene.

Erinnerung (Parabel als geometrischer Ort): Sind in der Ebene ein Punkt (= der Brennpunkt) und eine Gerade (= die Leitgerade) fixiert, so heisst die Menge aller Punkte der Ebene, die denselben Abstand von Brennpunkt und Leitgeraden haben, **Parabel**. Der **Scheitel** einer solchen Parabel ist der «Mittelpunkt» zwischen Brennpunkt und Leitgerade.

In Aufgabe 15.14 werden wir sehen, dass die Normalparabel wirklich eine Parabel in diesem Sinne ist (und somit der Namensbestandteil «parabel» gerechtfertigt ist):

- ihr Brennpunkt ist $B = \left(0, \frac{1}{4}\right)$;
- ihre Leitgerade ist $y = -\frac{1}{4}$;
- ihr Scheitel ist der Ursprung $O = (0, 0)$;
- ihre Symmetrieachse ist die y-Achse.

Allgemein kann man zeigen, dass der Graph jeder quadratischen Funktion eine *Parabel* ist.

Aufgabe 15.13 Bestimmen Sie jeweils exakt (ohne Taschenrechner) die (Koordinaten der) Schnittpunkte der Normalparabel mit den durch die folgenden Funktionen gegebenen Geraden. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse durch eine Skizze.

a) $g(x) = x + \frac{3}{4}$ b) $h(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ c) $i(x) = 2x - 1$ d) $j(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

15.6 Geometrie der Normalparabel

Aufgabe 15.14 Normalparabel als geometrischer Ort:
Betrachten Sie den (Brenn-)Punkt $B = \left(0, \frac{1}{4}\right)$ und die durch $y = -\frac{1}{4}$ definierte (Leit-)Gerade ℓ.

a) Zum Aufwärmen: Zeigen Sie, dass der Punkt $Q = \left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ auf der Normalparabel liegt und denselben Abstand von B und von ℓ hat.

b) Beweisen Sie: Die Normalparabel $y = x^2$ ist die (als geometrischer Ort definierte) Parabel mit Brennpunkt B und Leitgerade ℓ ist.
Vorgehen: Sei $P = (v, w)$ ein beliebiger Punkt der Zeichenebene. Zu zeigen ist, dass der Punkt P genau dann auf der Normalparabel liegt, wenn seine Abstände zu B und zu ℓ gleich gross sind.
Geben Sie die beiden Abstände $\overline{\ell P}$ und $\overline{BP}$ in Abhängigkeit von v und w an und zeigen Sie, dass diese beiden Abstände genau dann gleich gross sind, wenn P auf der Normalparabel liegt (d.h. $w = v^2$) gilt.

Aufgabe 15.15 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Tangente (= Berührgeraden) an die Normalparabel $f(x) = x^2$ im Punkt $P = \left(p, p^2\right)$.

Eventuell ist es hilfreich, zuerst als konkretes Beispiel die Tangente an den Punkt $(3, 9)$ auszurechnen.

Vorgehen: Sei $g(x) = mx + q$ die Funktionsgleichung der Tangente. Sie dürfen die folgenden zwei Fakten verwenden: (1) P liegt auf der Tangente; (2) Tangente und Parabel schneiden sich genau einmal.

Wählen Sie die Steigung m der Tangente als Unbekannte.

Bestimmen Sie im ersten Schritt q so in Abhängigkeit von m, dass die Gerade durch den Punkt P geht.

Bestimmen Sie im zweiten Schritt m so, dass die Gerade die Parabel in genau einem Punkt schneidet.