15.10 Komplexe Zahlen

Nachdem sich Mathematiker durchgerungen hatten, negative Zahlen auch als ganz normale Zahlen zu akzeptieren, stellte sich immer wieder die Frage, wie mit Wurzeln aus negativen Zahlen umzugehen sei.

Es stellt sich heraus, dass man die reellen Zahlen um «Wurzeln aus negativen Zahlen» erweitern kann, so wie die natürlichen Zahlen um ganze Zahlen, dann um Brüche und schliesslich um reelle Zahlen erweitert worden sind.

Einer der ersten, die sich damit beschäftigt haben, war der Mathematiker Cardano (1501 - 1576). Als Beispiel ist folgende Aufgabe überliefert:

Aufgabe 15.28 Gesucht sind zwei Zahlen mit Summe 10 und Produkt 30. Schreiben Sie die Lösungen mit Hilfe der Mitternachtsformel auf (wird Wurzeln aus negativen Zahlen enthalten). Bilden Sie dann die Summe und das Produkt, um die Lösungen zu überprüfen.

Man stellt fest, dass diese Ausdrücke Lösungen des Problems sind, gleichzeitig aber keine reellen Zahlen sein können. Während dies eine etwas sinnfreie Aufgabe ist, hat Cardano aber mit Hilfe dieser «sophistischen Ausdrücke» schliesslich eine Lösungsformel für Gleichungen 3. Grades erarbeitet.

Heute bilden komplexe Zahlen das Fundament der Quantenphysik (Beschreibung von Vorgängen in atomaren Grössenordnungen), Signalverarbeitung, Regeltechnik und weiteren Anwendungsgebieten.

Merke 15.14 Komplexe Zahlen

Die Erweiterung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nennt man heute **komplexe Zahlen** $\mathbb{C}$. Die komplexen Zahlen enthalten die spezielle **imaginäre Einheit** i mit der Eigenschaft

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Eine komplexe Zahl $c \in \mathbb{C}$ hat die Form

$$c = a + b\,\mathrm{i} \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{R},$$

wobei a der **Realteil** und b der **Imaginärteil** von c genannt wird.
Alle bekannten Rechengesetze sind auch für komplexe Zahlen gültig.

Aufgabe 15.29 Berechnen Sie und geben Sie das Resultat in der Form $(a + b\,\mathrm{i})$ an.

a) $(3 + 2\mathrm{i}) + (1 + 4\mathrm{i})$
b) $(1 + \mathrm{i})^2$
c) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1 + \mathrm{i})\right)^8$
d) $(1 - \mathrm{i}) \cdot (1 + \mathrm{i})$
e) $\frac{(2+\mathrm{i})}{\mathrm{i}}$
f) $\frac{-2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$

15.10.1 Geometrische Interpretation

Die komplexen Zahlen können als Punkte einer Ebene aufgefasst werden, wobei die x-Achse den reellen Zahlen und die y-Achse den rein imaginären Zahlen entspricht.

Definition 15.3 Betrag und Argument

Der **Betrag** einer komplexen Zahl ist gleich dem Abstand von 0. D.h.

$$|a + b\,\mathrm{i}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Das **Argument** einer komplexen Zahl c ist gleich dem orientierten Winkel zwischen der positiven reellen Achse und der orientierten Geraden von 0 zu c.