15.11 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 15.1 ex-altbabylonisch

Sei x die Länge und y die Breite. Dann ist das Gleichungssystem $x + y = 14$ und $xy = 48$ zu lösen.

Wenn man vermutet, dass Länge und Breite natürliche Zahlen sind, so kommt man durch Ausprobieren schnell auf zwei Lösungen:

- 1. Lösung: $x = 6$ und $y = 8$
- 2. Lösung: $x = 8$ und $y = 6$

Alternativ verwende man die Substitutionsmethode: Die erste Gleichung liefert $y = 14-x$. Substituiert man dies in die zweite Gleichung, so erhält man $x(14 - x) = 48$ oder ausmultipliziert $14x - x^2 = 48$ bzw. umgeschrieben

$$x^2 - 14x + 48 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung. Wie man eine solche Gleichung allgemein löst, ist das Thema dieses Kapitels. Wer die Faktorisierung $x^2 - 14x + 48 = (x - 6)(x - 8)$ sieht, kommt auf die Gleichung

$$(x - 6)(x - 8) = 0.$$

Da ein Produkt nur dann Null ist, wenn einer der Faktoren Null ist, folgt $x = 6$ (und $y = 8$) oder $x = 8$ (und $y = 6$).

Lösung zu Aufgabe 15.2 ex-mitternachts-formel-erarbeiten

a) $x = \pm 2$

b) $x = \pm\sqrt{2}$

c) $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{6}$

d) $x = \pm 2\sqrt{2}$

e) $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

f) $x^2 = 11 \Rightarrow x = \pm\sqrt{11}$

g) $(x + 1) = \pm 2$ bzw. ausgeschrieben $x + 1 = 2$ oder $x + 1 = -2$; also $x = 1$ oder $x = -3$ (zwei Lösungen). Meist schreibt man diese zwei Lösungen kurz so auf: $x_1 = 1,\ x_2 = -3$

h) $(x + 1) = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x_1 = \sqrt{2} - 1,\ x_2 = -\sqrt{2} - 1$

i) $(x + 1)^2 = 9 \Rightarrow (x + 1) = \pm 3 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -4$

j) $(x + 1)^2 = 9 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -4$

k) $x^2 + 2x + 1 = 9 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -4$

l) $x^2+2x+1 = 4 \Rightarrow (x+1)^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -3$

m) $(x - 1)^2 = 16 \Rightarrow x_1 = 5,\ x_2 = -3$

n) $(x - 2)^2 = 9 \Rightarrow x - 2 = \pm 3 \Rightarrow x_1 = 5,\ x_2 = -1$

o) $x^2 - 4x + 4 = 9 \Rightarrow x_1 = 5,\ x_2 = -1$

p) $x^2 - 2\cdot x\cdot 3 = 16 \Rightarrow x^2 - 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = 16 + 3^2 \Rightarrow (x - 3)^2 = 25 \Rightarrow x_1 = 8,\ x_2 = -2$

q) $x^2 - 2x = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 2 \Rightarrow (x - 1)^2 = 2 \Rightarrow x_1 = \sqrt{2} + 1,\ x_2 = -\sqrt{2} + 1$

r) $x^2 - 6x + \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2\cdot 3\cdot x + 3^2 + \frac{7}{2} = 3^2 \Rightarrow (x - 3)^2 = \frac{11}{2} \Rightarrow x_1 = 3 + \frac{\sqrt{22}}{2},\ x_2 = 3 - \frac{\sqrt{22}}{2}$

s) $x^2 - 6x = -4 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 5 \Rightarrow (x - 3)^2 = 5 \Rightarrow x_1 = 3 + \sqrt{5},\ x_1 = 3 - \sqrt{5}$

t) $x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x-1 = 0 \Rightarrow x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-1 = 0 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$

u) $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ (für $a \neq 0$, wobei a und c unterschiedliche Vorzeichen haben müssen oder $c = 0$ gelten muss, damit $-\frac{c}{a} \geq 0$ gilt und die Wurzel definiert ist)

v) $x(x + b) = 0$ also (Produkt genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null) $x = 0$ oder $x + b = 0$, d.h. $x = 0$ oder $x = -b$