b) Wir betrachten einen beliebigen Punkt $P = (v, w)$. Mit Hilfe einer Skizze sieht man sofort:

$$\begin{aligned} \overline{\ell P} &= w - (-\frac{1}{4}) = w + \frac{1}{4} \\ \overline{BP} &= \sqrt{v^2 + \left(w - \frac{1}{4}\right)^2} \qquad \text{nach Pythagoras} \end{aligned}$$

Wenn P auf der Parabel zu B und ℓ liegt, so folgern sukzessive

$$\begin{aligned} && \overline{\ell P} &= \overline{BP} \\ \Rightarrow && w + \frac{1}{4} &= \sqrt{v^2 + \left(w - \frac{1}{4}\right)^2} && |(\cdot)^2 \\ \Rightarrow && \left(w + \frac{1}{4}\right)^2 &= v^2 + \left(w - \frac{1}{4}\right)^2 \\ \Rightarrow && w^2 + \frac{1}{2}w + \frac{1}{16} &= v^2 + w^2 - \frac{1}{2}w + \frac{1}{16} && | - w^2 + \frac{1}{2}w - \frac{1}{16} \\ \Rightarrow && w &= v^2 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung bedeutet, dass $P = (v, w)$ auf der Normalparabel liegt.
Liegt umgekehrt $P = (v, w)$ auf der Normalparabel, so gilt $w = v^2$ und man kann alle Folgepfeile $\Rightarrow$ umdrehen; beachten Sie dabei: Das Wurzelziehen, das das Quadrieren rückgängig macht, ist wegen $w + \frac{1}{4} \geq w = v^2 \geq 0$ erlaubt.

Lösung zu Aufgabe 15.15 ex-normalparabel-tangente

Die Bedingung, dass P auf der Tangente liegt, ist $g(p) = p^2$, d.h.

$$\begin{aligned} mp + q &= p^2 && | - mp \\ q &= p^2 - mp \end{aligned}$$

D.h. $g(x) = mx + p^2 - mp$. Die Bedingung, dass Tangente und Normalparabel genau einen Schnittpunkt haben, bedeutet, dass die Gleichung $f(x) = g(x)$ genau eine Lösung hat (Gleichung für x). Wir bringen diese Gleichung auf «Standardform»:

$$\begin{aligned} x^2 &= mx + p^2 - mp && | - mx - (p^2 + mp) \\ x^2 - mx - (p^2 - mp) &= 0 \end{aligned}$$

Unsere Gleichung hat genau eine Lösung, wenn ihre Diskriminante $m^2 + 4(p^2 - mp)$ Null ist:

$$\begin{aligned} m^2 + 4(p^2 - mp) &= 0 \\ m^2 - 4mp + 4p^2 &= 0 \\ (m - 2p)^2 &= 0 \\ m - 2p &= 0 \\ m &= 2p \end{aligned}$$

Resultat: Die Steigung der Tangente an die Normalparabel im Punkt (p, p^2) ist $m = 2p$ und ihr Achsenabschnitt ist $q = p^2 - mp = p^2 - 2p \cdot p = -p^2$. Damit ist die Tangentengleichung $g(x) = 2px - p^2$.

Lösung zu Aufgabe 15.16 ex-normalparabel-reflexionseigenschaft

Da L und B gleich weit von P entfernt sind (Definition der Parabel), ist das Dreieck BPL gleichschenklig und w ist die Winkelhalbierende seines Innenwinkels bei P.

Insbesondere ist der Winkel $\angle BPM$ genauso gross wie der Scheitelwinkel von $\angle MPL$; dies bedeutet, dass die Gerade w den einfallenden Strahl s in den Brennpunkt reflektiert. Deswegen genügt es zu zeigen, dass w die Tangente an die Normalparabel in P ist.

Dazu genügt es zu zeigen, dass M und P auf dieser Tangente liegen. Für P ist dies klar.

Da M der Mittelpunkt von $B = \left(0, \frac{1}{4}\right)$ und $L = \left(p, -\frac{1}{4}\right)$ ist, gilt $M = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Setzt man die x-Koordinate von M in die Tangentengleichung $t(x) = 2px - p^2$ (siehe Merkebox 15.7) ein, so erhält man $t\left(\frac{p}{2}\right) = 2p \cdot \frac{p}{2} - p^2 = 0$, was die y-Koordinate von M ist. Dies bedeutet, dass auch M auf der Tangente liegt.