(b) Da die x-Koordinaten der Berührungspunkte bekannt sind, können die Geradengleichungen aufgeschrieben werden:

$t_1(x) = 2x - 1$ für $p = 1$ und $t_2(x) = 6x - 9$ für $p = 3$. Um zu überprüfen, dass diese Geraden auch Tangenten an g sind, überprüft man, ob die Gleichung $g(x) = t(x)$ genau eine Lösung hat:

- Für $t_1(x) = g(x)$: Umformen der Gleichung: $2x - 1 = -(x^2 - 8x + 16) + 6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 9 = 0$
  Diskriminante $D = 36 - 36 = 0$, also genau eine Lösung (auch klar wegen $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$).
  Also ist die Tangente t_1 an (den Graphen von) f auch eine Tangente an g.
  Die Lösung ist $x = 3$; dies ist die x-Koordinate des Berührpunkts.
- Für $t_2(x) = g(x)$: Umformen der Gleichung $6x - 9 = -(x^2 - 8x + 16) + 6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$ $(x - 1)^2 = 0$.
  Auch diese Gleichung hat genau eine Lösung $x = 1$. Also ist die Tangente t_2 an f auch eine Tangente an g.

Die Berührungspunkte dieser beiden Tangenten an g sind $B_1 = (3, t_1(3)) = (3, 5)$ und $B_2 = (1, t_2(1)) = (1, -3)$.

(c) Sei $Q = (v, w)$ ein beliebiger Punkt unterhalb der Normalparabel (d.h. $w < v^2$). Eine (von der x-Koordinate p des Berührpunkts abhängige) Tangente $t(x) = 2px - p^2$ an die Normalparabel geht genau dann durch den Punkt Q, wenn $t(v) = w$ gilt. Wir formen diese Bedingung wie folgt um:

$$
\begin{aligned}
t(v) &= w \\
2pv - p^2 &= w && \mid -w \\
-p^2 + 2vp - w &= 0 && \mid \text{Mitternachtsformel mit } a = -1,\ b = 2v,\ c = -w \\
p_{1,2} &= \frac{-2v \pm \sqrt{4v^2 - 4w}}{-2} = v \pm \sqrt{v^2 - w}
\end{aligned}
$$

Nun ist klar, dass v genau in der Mitte zwischen $p_2 = v - \sqrt{v^2 - w}$ und $p_1 = v + \sqrt{v^2 - w}$ liegt. Beachte, dass p_1 und p_2 die x-Koordinaten sind, für die die zugehörigen Tangenten an die Normalparabel durch Q gehen.

(Die Bedingung, dass Q unterhalb der Normalparabel liegt, sorgt dafür, dass der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv ist und es somit zwei Tangenten durch Q gibt.)