h) Schreiben Sie als Produkt von Potenzen (ohne Bruchstrich): $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{7}} \cdot \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{5}{3}}}$

i) Schreiben Sie als Bruch von Produkten von Potenzen mit **positiven** Exponenten: $\left(\frac{b}{ca}\right)^{-\frac{3}{7}} \cdot \frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{-\frac{1}{5}}}$

j) $\left(\frac{1}{5^{-x}}\right)^3 \cdot 5^{-2x}$

k) $\frac{(3x+y^2)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{3x+y^2}}$

l) $(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}} \cdot (a^2+2ab+b^2)^{\frac{2}{3}}$

m) $a(a+b^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{b^2}{\sqrt{a+b^2}}$

Aufgabe 14.7 «Kreative Fehler»: Ein fiktiver kreativer Schüler behauptet, dass die folgenden Rechnungen für alle Belegungen der Variablen stimmen – dabei wimmelt es nur so von Fehlern.
Überlegen Sie sich bei jedem Fehler, welche Regel der Schüler irrtümlicherweise als richtig angenommen haben könnte (falls der Fehler nicht zu abstrus ist) und widerlegen Sie diese «Regel» durch ein **möglichst einfaches, explizites Gegenbeispiel**, in dem **als Exponenten** möglichst nur ganze Zahlen vorkommen.

a) $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} = (a+b)^{\frac{2}{3}}$

b) $a^{\frac{5}{3}} + a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5+1}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$

c) $a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{\frac{3}{7}} = a^{\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{7}} = a^{\frac{4}{7}}$

d) $(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{1}{2}})^2 = a^3 + a$

e) $\left(z^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{3}{5}} = z^{\frac{2+3}{5}} = z^{\frac{5}{5}} = z^1 = z$

f) $\frac{a^{\frac{4}{7}}}{b^{\frac{4}{7}}} = (a-b)^{\frac{4}{7}}$

g) $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^1}{b^1} = \frac{a}{b}$

h) $\frac{a^{\frac{13}{7}}}{b^{\frac{4}{7}}} = \frac{a^{\frac{13-4}{7}}}{b^{\frac{4-4}{7}}} = \frac{a^{\frac{9}{7}}}{b^{\frac{0}{7}}} = \frac{a^{\frac{9}{7}}}{1} = a^{\frac{9}{7}}$

i) $a^{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^2$

Merke 14.3 Wurzelgesetze (für Quadratwurzeln)

Für alle $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ gelten:

$$\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad \left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}$$

Achtung, beleidigen Sie Pythagoras nicht:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Aufgabe 14.8

a) Folgern Sie aus den Potenzgesetzen für rationale Exponenten die drei Wurzelgesetze in der obigen Merkebox.
b) Zeigen Sie durch explizite Angabe von mindestens drei Gegenbeispielen, dass $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ im Allgemeinen falsch ist.
c) Warum genau wäre es eine Beleidigung für Pythagoras?
d) Für welche reellen Zahlen a und b gilt die Gleichung $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$?

Merke 14.4 Wurzelgesetze (für n-te Wurzeln)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ und alle $m \in \mathbb{Z}$ gelten:

$$\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Achtung:

Summen sind doof: $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}.$