18 Exponentialfunktionen und Logarithmen

Viele natürliche Prozesse können durch Exponentialfunktionen modelliert werden, wie z.B. der *radioaktive Zerfall* oder der *Ausbruch von Epidemien*.
Der natürliche Logarithmus ist die Umkehrung der Exponentialfunktion und findet Anwendungen z.B. in der Chemie mit der Angabe des *pH-Werts* oder bei Massangaben von z.B. *Schallstärke* oder *Erdbebenintensität*.

18.1 Exponentialfunktionen

Potenzfunktion $f(x) = x^p$ z.B. $f(x) = x^2$

Definition 18.1 Exponentialfunktion

Für jede **Basis** $a \in \mathbb{R}^+$ ist die zugehörige **Exponentialfunktion** gegeben durch

positive Basis!

$$f(x) = a^x$$

z.B. $f(x) = 2^x$

Beachten Sie, dass das Argument x im Exponenten steht (im Gegensatz zu Potenzfunktionen, wo das Argument potenziert wird).

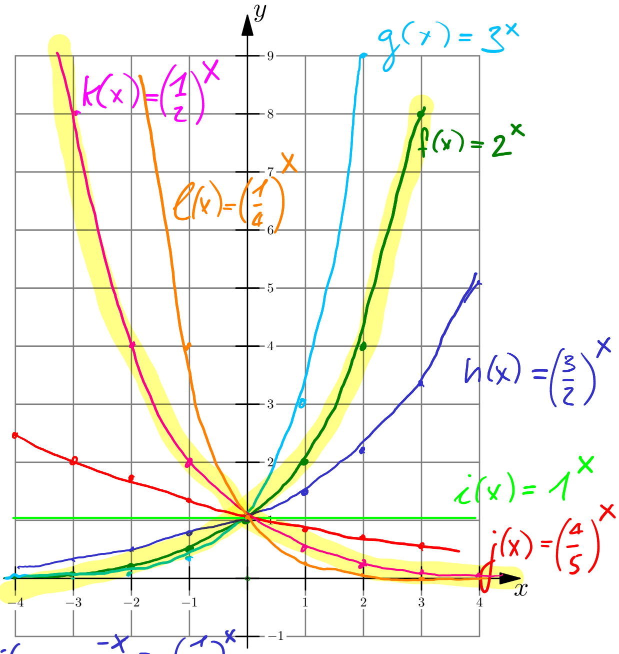
Man kann Exponentialfunktionen als Verallgemeinerung von geometrischen Folgen mit Startwert $g_0 = 1$ und Wachstumsfaktor (Quotient) $q = a$ betrachten. Es gilt dann:

$$g_n = g_0 \cdot q^n = 1 \cdot a^n = a^n = f(n)$$

Aufgabe 18.1 Warum sind Exponentialfunktionen nur für positive Basen definiert? "$f(x) = (-2)^x$"

✎ z.B. für $x = \frac{1}{2}$ ist $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ nicht definiert für $a < 0$.

Aufgabe 18.2



Zeichnen Sie die Graphen der Exponentialfunktionen für alle Basen $a \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3\}$ in das nebenstehende Koordinatensystem.
Vervollständigen Sie unter Beachtung der Graphen die folgenden Sätze:

- Alle Exponentialfunktionen gehen durch den Punkt $(0, 1)$ $(a^0 = 1 \quad \forall a > 0)$.
- Der Graph der Exponentialfunktion $y = a^x$ ist monoton steigend für $a > 1$.
- Der Graph der Exponentialfunktion $y = a^x$ ist monoton fallend für $a < 1$.
- Der Wertebereich aller Exponentialfunktionen ist $\mathbb{R}^+$ (alle positiven Zahlen für $a \neq 1$)
- Exponentialfunktionen haben keine Nullstellen. (Schnittp. mit x-Achse, d.h. $f(x) = 0$)
- Man erhält den Graphen der Funktion $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, indem man den Graphen von $y = a^x$ an y spiegelt.

weil $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$

Aufgabe 18.3 Welches Potenzgesetz steht hinter dem letzten Satz der letzten Aufgabe?

✎ $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ bzw $\left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = a^x$