2 Terme

Ein wichtiger Teil des mathematischen «Handwerks» besteht darin, Terme umzuformen. Dazu müssen einerseits die Rechengesetze der reellen Zahlen verinnerlicht sein, und andererseits muss auch «die Natur» komplizierter Terme sofort erfasst werden können. Ziel dieses Kapitels ist letztere Fähigkeit zu schulen.

Ein **Term** in der Mathematik lässt sich wie folgt definieren:

- Jede Zahl und jede Variable ist ein Term. Z.B. 42, oder a, oder β.
- Eine Verknüpfung von Termen ist ein Term. Verknüpfungen sind z.B. die Grund-Rechenoperationen, Klammern, Gegenzahlbildung, Potenzen, Beträge (und später auch Funktionen, wie z.B. $\sqrt{x}$).

Beispiele für Terme:

$$\frac{\alpha^{2+\gamma}}{x+2} \qquad x \qquad -a^2-(b^2-c^2)$$

Folgende Dinge sind keine Terme:

$$(a+b \qquad 4+a+ \qquad \frac{-5^+}{}$$

weil Klammern nicht geschlossen oder Operationszeichen keine Terme verbinden.

2.1 Gleichheit und Äquivalenz von Termen

Die Terme ab und ba sind zuerst einmal verschiedene Terme. Erst wenn man festlegt, worauf sich die Terme beziehen (in unserem Fall vorerst immer die reellen Zahlen $\mathbb{R}$), kann man sagen, dass für jede mögliche Ersetzung der Variablen durch reelle Zahlen (oder weitere Terme, die reelle Zahlen ergeben) die Terme äquivalent (gleichwertig) sind. Oder mit anderen Worten:

$$ab = ba \quad \Leftrightarrow \quad \text{Das Kommutativgesetz gilt für die Multiplikation.}$$

Es gibt durchaus mathematische Konstrukte der Multiplikation, die nicht kommutativ sind.

Der Einfachheit halber werden wir weiter von Gleichheit von ab und ba sprechen.

Merke Variablen stehen auch für Terme

Termumformungen sind auch dann gültig, wenn **Variablen durch Terme ersetzt** werden (und nicht nur durch Zahlen).

Das Potenzgesetz $(a\cdot b)^e = a^e \cdot b^e$ gilt nicht nur, wenn man für a, b und e Zahlen einsetzt, sondern auch wenn man z.B. für $a=(x-y^z)$ und $b=\frac{c}{d}$ einsetzt. Es heisst dann

$$\left((x-y^z)\cdot\frac{c}{d}\right)^e = (x-y^z)^e\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^e$$

Beachten Sie die Klammern um den Bruch!

Merke Schutzklammern

Ersetzt man Variablen durch Terme (typischerweise bei der Anwendung von Umformungsregeln), ist es oft nötig (und i.A. empfohlen!), um die Ersetzung Klammern zu setzen.

Beispiel: $ab=ba$, Ersetzung: $a=c+d$

korrekt: $(c+d)\cdot b = b\cdot(c+d)$ falsch: $c+d\cdot b \neq b\cdot c+d$

2.2 Ausdrücke: Notationen und Binärbäume

Wir unterscheiden 3 Darstellungsarten für Ausdrücke:

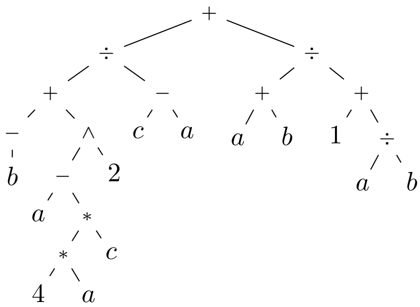
- Mathematische Notation (für die Darstellung auf Papier).
- Computer Notation (für die Eingabe auf Computern).
- Darstellung als Binärbaum (zur Veranschaulichung und computer-interne Darstellung).

Mathematische Notation: $\dfrac{-b+(a-4\cdot a\cdot c)^2}{c-a}+\dfrac{a+b}{1+\frac{a}{b}}$

Computer Notation: `(-b+(a-4*a*c)^2)/(c-a) + (a+b)/(1+a/b)`

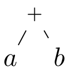
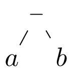
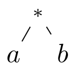
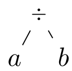
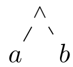
Die hier definierte Computer Notation ist in den meisten Programmiersprachen gebräuchlich, bis auf die Notation der Potenz. Wir benutzen hier die Notation mit dem «Circonflex», die in Tabellenkalkulationen (und z.B. in Basic-Dialekten) verwendet wird.

Als Binärbaum:

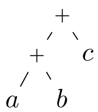
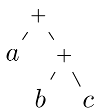


An der Wurzel des Baumes (zuoberst), steht immer die Operation, die zuletzt ausgeführt wird. Diese Operation bestimmt über das «Wesen» des Terms, d.h. ob der Term letzlich eine Summe, Produkt etc. ist. Ausgewertet wird ein Baum wie folgt: Zuerst der linke Unterbaum, dann der rechte Unterbaum, dann die Operation der Wurzel mit den Resultaten der beiden Unterbäumen.

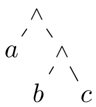
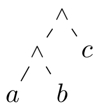
Beispiele für die Grundoperationen und Gegenzahlbildung:

$a+b$:  $a-b$:  $-a$:  $a\cdot b$:  $\frac{a}{b}$:  a^b: 

Ausdrücke ohne Klammern werden (ausser Potenzen) von links nach rechts ausgewertet. Die letzte Operation steht also rechts:

$a+b+c$:  im Gegensatz zu $a+(b+c)$: 

In mathematischer Notation und Computer Notation werden Potenzen ohne Klammern von **rechts nach links** ausgewertet. Im Binärbaum hingegen wird wie gewohnt von links nach rechts gelesen:

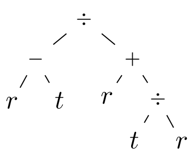
a^{b^c}:  im Gegensatz zu $\left(a^b\right)^c$: 

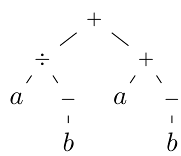
Aufgabe 2.1

Ohne zu vereinfachen, schreiben Sie folgende Terme in den jeweils anderen beiden Notationen auf:

a) $\dfrac{\frac{\frac{a}{b}}{c}+\frac{a}{\frac{b}{c}}}{\frac{\frac{a}{b}}{c}+\frac{a}{\frac{b}{c}}}$

b) `(x-y)^2/3-x*y^z`

c) 

d) 

e) $\dfrac{\left(a^b+b^a\right)^{c-d}}{a+b}$

f) `-a^b+(-a)^b*c+d`

g) `1/a+1/-b-c`

h) $\dfrac{\frac{a+b}{a-b}}{2\cdot a+b}$

2.3 Rechengesetze und Umformungssünden

Merke Summen sind doof

Viele wichtige Umformungsregeln sind für Summen (und Differenzen) nicht gültig! Z.B. Kürzen und Potenzgesetze (später auch Wurzelgesetze).

Aufgabe 2.2 Stimmen folgende Umformungen? Wenn ja, begründen Sie, wenn nein, erklären Sie den Fehler und geben Sie ein Gegenbeispiel an. Z.B $a - b \neq b - a$, für $a = 1$ und $b = 0$ erhält man $1 \neq -1$.

a) $(a/b)^e = a^e/b^e$

b) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{a} = \dfrac{\cancel{a}}{b} + \dfrac{c}{\cancel{a}} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{c}{1}$

c) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{b}{c} = \dfrac{a}{\cancel{b}} \cdot \dfrac{\cancel{b}}{c} = \dfrac{a}{c}$

d) $(a^e)^f = a^{e+f}$

e) $(a^e)^f = \left(a^f\right)^e$

f) $\dfrac{c}{a+b} = \dfrac{c}{a} + \dfrac{c}{b}$

g) $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$

h) $a^e + a^e = (2a)^e$

i) $\dfrac{a^9}{a^3} = \dfrac{a^{\cancel{9}3}}{a^{\cancel{3}1}} = \dfrac{a^3}{a^1}$

j) $\dfrac{a^9}{a^3} = \left(\dfrac{a^3}{a}\right)^3$

k) $c^{12} - c^8 = c^4$

l) $x^4 + x^8 = x^2(x^2 + x^4)$

m) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d}$

n) $\dfrac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \dfrac{ab}{a+b}$

o) $5^{3^7} = 5^{21}$

p) $-\dfrac{(-1)^{123}}{(-1)^{1234}} = 1$

q) $32 \cdot 32 = 1024$

r) $-5^2 = 25$

s) $((a+b) \cdot (c+d))^6 = a + b^6 \cdot c + d^6$

t) $\left(\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d}\right)^e = \dfrac{a^e}{b} \cdot \dfrac{c^e}{d}$

2.3.1 Häufigste Fehler

Nichtbeachtung der Prioritäten: Klammern, Exponenten, Potenzen, Punktoperationen und Gegenzahlbildung, Strichoperationen.

Kürzen aus Summen: *Aus Differenzen und Summen, kürzen nur die ....*

Potenzgesetze auf Summen angewandt: Geht schief.

Vergessene Schutzklammern: Vergessene Klammern beim Anwenden von Rechenregeln auf komplexere Terme.

Addition und Subtraktion von Brüchen: Gleichnamig Machen vergessen, fälschligerweise Nenner addieren.

2.4 Zusammenfassung der behandelten Rechengesetze

2.4.1 Klammern auflösen

$$a + (b + c) = a + b + c \qquad a + (b - c) = a + (b - c)$$

$$a - (b + c) = a - b - c \qquad a - (b - c) = a - b + c$$

⚠ Klammern von innen nach aussen auflösen ⚠

2.4.2 Bruchrechnen $\frac{\textbf{Zähler}}{\textbf{Nenner}}$

Addition und Subtraktion Zuerst **gleichnamig** machen, dann Zähler addieren bzw. subtrahieren.

Kürzen Nur aus Produkten!

Erweitern Zähler und Nenner mit dem gleichen Term multiplizieren.

Multiplikation Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner. ⚠ Nicht mit Erweitern verwechseln ⚠

Kehrwert Zähler und Nenner vertauschen. Kehrwert von a ist $\frac{1}{a}$.

Division Multiplikation mit dem Kehrwert.

Mehrfachbrüche Als Division auffassen (oder geschickt erweitern).

2.5 Beträge

Definition 2.1 Betrag

Der **Betrag** einer Zahl z ist der Abstand von z zu 0. Formal:

$$|z| = \begin{cases} z & \text{wenn } z \geq 0 \\ -z & \text{wenn } z < 0. \end{cases}$$

D.h. der Betrag einer Zahl ist immer positiv, entweder die Zahl selbst, wenn sie positiv war, oder die Gegenzahl, wenn sie negativ war.
Beispiele: $|-5| = 5$, oder $|5-7| = 2$, oder $|7-5| = 2$.

Aufgabe 2.3 Berechnen Sie, bzw. vereinfachen Sie so weit wie möglich.

a) $\dfrac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}} \cdot \left(a^2 - b^2\right)$ b) $\dfrac{-17^{17} - (-17)^{17} + 17}{\left(3^2 + 2^3\right)^2}$ c) $\dfrac{\dfrac{\left(\frac{\left(2\cdot 5^2\cdot 7\right)^3}{\left(11\cdot 13^2\right)^2}\right)^2}{\frac{\left(2^2\cdot 5^3\cdot 7^2\right)^4}{\left(11^2\cdot 13^3\right)^3}}}{\frac{13\cdot 121}{14^2}}$ d) $\dfrac{\frac{2^{4^3}}{\left(-2^4\right)^3}}{-2^{\frac{10^2}{2}}}$

e) $\left|\left|5-7\right|^2 - 10\right| \cdot \left|2^3 - 1\right|$ f) $\dfrac{\frac{125}{77} \cdot \left(\frac{2^2}{7} + \frac{3}{5^2}\right)}{\frac{11}{7^2}}$ g) $\dfrac{\dfrac{\left|\frac{3}{17} - \frac{17}{11}\right|}{\frac{2^{18}}{11\cdot 17}}}{\frac{1}{512}}$ h) $\dfrac{\dfrac{\frac{2^6\cdot 5^6}{10^4}}{3} - \frac{13}{4}}{\frac{19}{3\cdot 2^2}}$

2.6 Lösungen

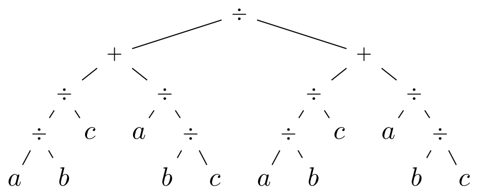
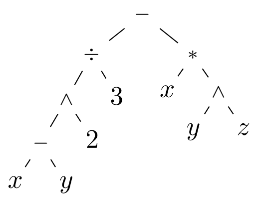
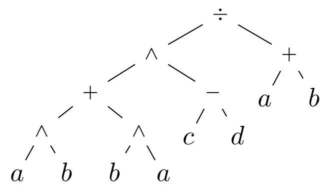
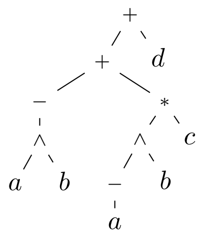
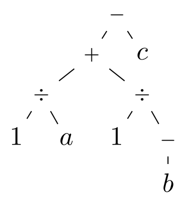
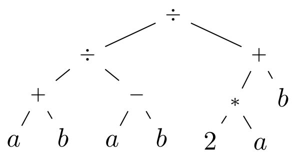
Hinweise zu den Symbolen:
Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".
Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.
Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 2.1 ex-termnotationen

a) `(a/b/c+a/(b/c))/(a/b/c+a/(b/c))` b) $\frac{(x-y)^2}{3} - x \cdot y^z$ c) `(r-t)/(r+t/r)` $\frac{r-t}{r+\frac{t}{r}}$

d) $\frac{a}{-b} + (a + -b)$ `a/-b+(a+-b)` e) `(a^b+b^a)^(c-d)/(a+b)` f) $-a^b + (-a)^b \cdot c + d$

g) $\frac{1}{a} + \frac{1}{-b} - c$ h) `(a+b)/(a-b)/(2*a+b)`

a)

b)

e)

f)

g)

h)


Lösung zu Aufgabe 2.2 ex-umformungsverbrechen

a) Richtig, Potenzgesetz.

b) Falsch (z.B. $\frac{1}{2} + \frac{2}{1} \neq \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$.

c) Wahr (aus Produkten darf (und soll) man kürzen).

d) Falsch $a^{e \cdot f}$ wäre richtig.

e) Wahr (beides ist gleich $a^{e \cdot f}$.

f) Falsch ($\frac{1}{1+1} \neq \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$)

g) Wahr. $\frac{a+b}{c} = \frac{1}{c} \cdot (a+b) = \frac{1}{c} \cdot a + \frac{1}{c} \cdot b$.

h) Falsch, $2a^e$ ist richtig. (sonst wird die 2 mitpotenziert).

i) Falsch, würde a^6 ergeben (Potenzgesetz).

j) Wahr (Potenzgesetz).

k) Falsch (Summen sind doof, man könnte c^8 ausklammern).

l) Falsch, man könnte x^4 ausklammern.

m) Falsch, erst erweitern, ergäbe $\frac{ad+bc}{bd}$.

n) Wahr (Nenner auf einen Bruchstrich, dann Kehrwert).

o) Falsch ($\left(\left(5^3\right)^7 = 5^{21}\right)$.

p) Wahr ($= -\frac{-1}{1}$)

q) Wahr ($2^5 \cdot 2^5 = 2^{10}$.

r) Falsch ($(-5)^2 = 25 \neq -5^2 = -(5^2)$. Potenzen vor Multiplikation und Gegenzahlbildung.

s) Falsch, ergäbe $(a+b)^6 \cdot (c+d)^6$.

t) Falsch, auch die Nenner werden potenziert.

Lösung zu Aufgabe 2.3 ex-vereinfachen-und-berechnen

a) $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}} \cdot \left(a^2-b^2\right) = \dfrac{\frac{a^2}{a\cdot b}+\frac{b^2}{a\cdot b}}{\frac{a^2}{a\cdot b}-\frac{b^2}{a\cdot b}} \cdot \left(a^2-b^2\right) = \dfrac{\frac{a^2+b^2}{a\cdot b}}{\frac{a^2-b^2}{a\cdot b}} \cdot \left(a^2-b^2\right) = \dfrac{a^2+b^2}{\cancel{ab}} \cdot \dfrac{\cancel{ab}}{\cancel{a^2-b^2}} \cdot \cancel{\left(a^2-b^2\right)} =$
a^2+b^2

b) $\dfrac{-17^{17}-(-17)^{17}+17}{\left(3^2+2^3\right)^2} = \dfrac{-17^{17}--17^{17}+17}{(9+8)^2} = \dfrac{17}{17^2} = \dfrac{1}{17}$

c) $\dfrac{\dfrac{\left(\frac{\left(2\cdot5^2\cdot7\right)^3}{\left(11\cdot13^2\right)^2}\right)^2}{\frac{\left(2^2\cdot5^3\cdot7^2\right)^4}{\left(11^2\cdot13^3\right)^3}}}{\frac{13\cdot121}{14^2}} = \dfrac{\dfrac{\left(\frac{2^3\cdot\left(5^2\right)^3\cdot7^3}{11^2\cdot\left(13^2\right)^2}\right)^2}{\frac{\left(2^2\right)^4\cdot\left(5^3\right)^4\cdot\left(7^2\right)^4}{\left(11^2\right)^3\cdot\left(13^3\right)^3}}}{\frac{13\cdot11^2}{(2\cdot7)^2}} = \dfrac{\dfrac{\frac{\left(2^3\cdot5^6\cdot7^3\right)^2}{\left(11^2\cdot13^4\right)^2}}{\frac{2^8\cdot5^{12}\cdot7^8}{11^6\cdot13^9}}}{\frac{13\cdot11^2}{2^2\cdot7^2}} = \dfrac{2^6\cdot5^{12}\cdot7^6}{11^4\cdot13^8} \cdot \dfrac{11^6\cdot13^9}{2^8\cdot5^{12}\cdot7^8} \cdot \dfrac{2^2\cdot7^2}{13\cdot11^2} =$
$\dfrac{2^8\cdot5^{12}\cdot11^6\cdot7^{14}\cdot13^9}{2^8\cdot5^{12}\cdot11^6\cdot7^{14}\cdot13^9} = 1$

d) $\dfrac{\frac{2^{4^3}}{\left(-2^4\right)^3}}{-2^{\frac{10^2}{2}}} = \dfrac{\frac{2^{64}}{-2^{12}}}{-2^{50}} = \dfrac{-2^{52}}{-2^{50}} = 2^2 = 4$

e) $\left||5-7|^2-10\right| \cdot \left|2^3-1\right| = \left||-2|^2-10\right| \cdot |7| = \left|2^2-10\right| \cdot 7 = |4-10| \cdot 7 = |-6| \cdot 7 = 6 \cdot 7 = 42$

f) $\dfrac{\frac{125}{77}\cdot\left(\frac{2^2}{7}+\frac{3}{5^2}\right)}{\frac{11}{7^2}} = \dfrac{5^3}{11\cdot7} \cdot \left(\dfrac{2^2\cdot5^2}{7\cdot5^2}+\dfrac{3\cdot7}{7\cdot5^2}\right) \cdot \dfrac{7^2}{11} = \dfrac{5^3}{11\cdot7} \cdot \dfrac{100+21}{7\cdot5^2} \cdot \dfrac{7^2}{11} = \dfrac{5^3\cdot7^2\cdot11^2}{11^2\cdot7^2\cdot5^2} = 5$

g) $\dfrac{\frac{\left|\frac{3}{17}-\frac{17}{11}\right|}{\frac{2^{18}}{11\cdot17}}}{\frac{1}{512}} = \left|\dfrac{3\cdot11}{17\cdot11}-\dfrac{17^2}{11\cdot17}\right| \cdot \dfrac{11\cdot17}{2^{18}} \cdot 2^9 = \left|\dfrac{33-289}{11\cdot17}\right| \cdot \dfrac{11\cdot17}{2^9} = \left|\dfrac{-256}{11\cdot17}\right| \cdot \dfrac{11\cdot17}{2^9} =$
$\dfrac{2^8}{11\cdot17} \cdot \dfrac{11\cdot17}{2^9} = \dfrac{1}{2}$

h) $\dfrac{\frac{\frac{2^6\cdot5^6}{10^4}}{3}-\frac{13}{4}}{\frac{19}{3\cdot2^2}} = \left(\dfrac{\frac{(2\cdot5)^6}{10^4}}{3}-\dfrac{13}{4}\right) \cdot \dfrac{3\cdot2^2}{19} = \left(\dfrac{100\cdot4}{3\cdot4}-\dfrac{13\cdot3}{4\cdot3}\right) \cdot \dfrac{3\cdot2^2}{19} = \dfrac{400-39}{3\cdot4} \cdot \dfrac{3\cdot2^2}{19} =$
$\dfrac{361}{3\cdot2^2} \cdot \dfrac{3\cdot2^2}{19} = \dfrac{19^2}{19} = 19$