c) Sei C ein Schnittpunkt. Mit der Höhe $h = h_c$ und dem Höhenfusspunkt H entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke, $\triangle AHC$ und $\triangle CHB$. Seien $p = \overline{AH}$ und $q = \overline{HB}$. Damit ist $p + q = d$, bzw. $q = d - p$. Die Koordinaten von C sind also $C = (p, \pm h)$.
In den rechtwinkligen Dreiecken gilt $r_A^2 = p^2 + h^2$ und $r_B^2 = q^2 + h^2$. Löst man nach h auf und setzt gleich erhält man: $r_A^2 - p^2 = r_B^2 - q^2$. Ersetzt man noch q erhält man:

$$\begin{aligned}
r_A^2 - p^2 &= r_B^2 - (d-p)^2 \\
r_A^2 - p^2 &= r_B^2 - d^2 + 2dp - p^2 && \mid + p^2 + d^2 - r_B^2 \\
r_A^2 - r_B^2 + d^2 &= 2dp && \mid : 2d \\
p &= \frac{r_A^2 - r_B^2 + d^2}{2d}
\end{aligned}$$

Damit ist die Strecke $\overline{AH}$ bekannt. Die Höhe ergibt sich durch Einsetzen:

$$h^2 = r_A^2 - p^2 \qquad h = \pm\sqrt{r_A^2 - p^2}$$

d) Man setzt $d = |\vec{AB}|$ und berechnet wieder p und h. Anstatt um p Einheiten in x-Richtung muss p Einheiten in die Richtung von $\vec{AB}$ gegangen werden.
Sei $\vec{v} = \vec{AB}$ und $\vec{u}$ der zu $\vec{v}$ rechtwinklige Vektor mit gleicher Länge. Dann ist

$$\vec{OC} = \vec{OA} + p \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \pm h \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

Lösung zu Aufgabe 16.15 ex-einheitskreis-vektoren

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Katheten im 45°/45°/90° Dreieck mit Hypotenuse 1: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

c) Gleichseitige Dreieck über $(0,0) - (0,1)$: $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

d) $\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(72°) \\ \sin(72°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{4} \\ \frac{2(5+\sqrt{5})}{4} \end{pmatrix}$ (Mit dem Taschenrechner)

e) Koordinaten eine Punktes auf dem Einheitskreis: $\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$.

Lösung zu Aufgabe 16.16 ex-regulaere-polygone

Die Punkte dieser Vielecke liegen auf dem Einheitskreis. Mit cos und sin lassen sich die Punkte mit dem Winkel beschreiben. Der allgemeine Fall ist also

$$P_i = \left(\cos\left(360° \cdot \frac{i}{n}\right), \sin\left(360° \cdot \frac{i}{n}\right)\right) \qquad \text{mit } i = 0 \ldots (n-1)$$

a) $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$
b) $(1,0)$, $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$
c) $(1,0)$, $(\cos(72°), \sin(72°))$, etc.

Lösung zu Aufgabe 16.17 ex-rotations-formel-herleiten

c) $\vec{e_1'} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$, $\vec{e_2'} = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

d) $\vec{OP} = x\vec{e_1} + x\vec{e_2}$

e) $\vec{OP'} = x\vec{e_1'} + x\vec{e_2'} = x\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) \\ x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) \end{pmatrix}$