Geraden im Raum

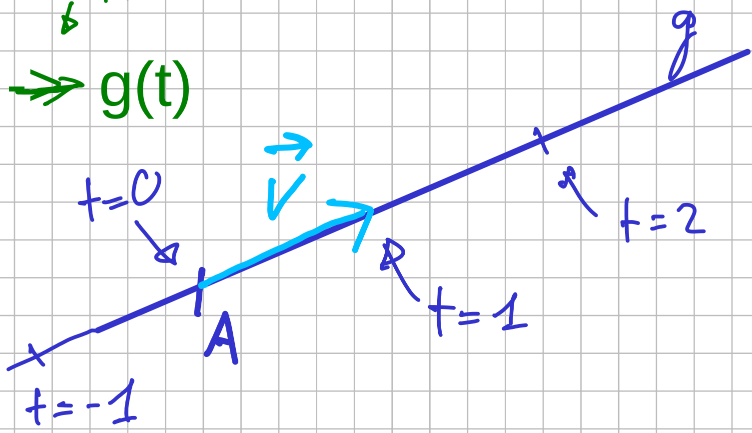
$$\vec{g}(t) = \vec{OA} + t\vec{v} \qquad t \in \mathbb{R}$$

A : Aufpunkt
$\vec{v}$: Richtungsvektor

Ortsvektor

TR: [1,0,3]+t*[3,2,1] $\xrightarrow{STO}$ g(t)

[7, 4, 4] → p



$P \in g$?, P= (7,4,4)

$$g(t) = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

$P \in g$? wenn es ein t gibt, so dass

$$\vec{g}(t) = \vec{OP}$$

solve(g(t) = p , t) → false

Von Hand:

$$\left|\begin{array}{l} 1 + 3t = 7 \\ 0 + 2t = 4 \\ 3 + t = 4 \end{array}\right| \begin{array}{l} \rightarrow t = 2 \\ \checkmark \\ ↯ \end{array}$$

einsetzen

Also $P \notin g$

Lage im Koordinatensystem

z.B. $g \parallel$ x-y Ebene $\Longleftrightarrow$ z-Komponente vom Richtungsvektor ist Null.

$g \perp$ x-y Ebene $\Longleftrightarrow$ $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\0\\?\end{pmatrix} \neq \vec{0}$

(d.h. $g \parallel$ z-Achse)

$g \cap h$?

$$\vec{g}(t) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{h}(t) = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{g}(t) = \vec{h}(s)$$

3 Gleichungen für 2 Unbekannte

2 Gleichungen lösen → liefert s, t

einsetzen in die 3. → Schnittp. oder nicht

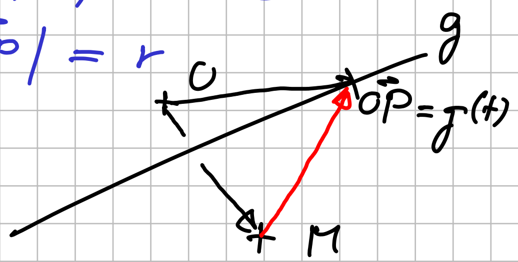
→ g, h schneiden sich für t = -2, s = 0 im Punkt (3, 2, 1)

$g \cap$ Kugel

$$\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kugel mit $M = (-1, 2, 1)$, $r = 5$

Gesucht ist $P \in g$ mit $|\overrightarrow{MP}| = r$



$$\Big| \underbrace{\vec{g}(t)}_{\vec{OP}} - \vec{OM} \Big| = r$$

TR

Länge des Vektors

solve(norm(g(t)-m)=5, t)

Abstand zwischen 2 Punkten:

$A = (3, 1, 5)$, $B = (-2, 3, 4)$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\vec{OB} - \vec{OA}|$$

Skalarprodukt $\vec{u} \cdot \vec{v}$ "Dot Product"

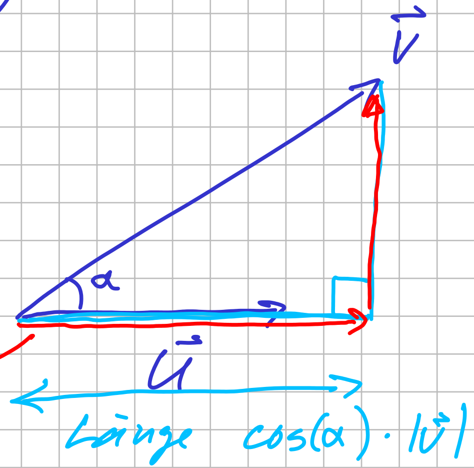
Zahl

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \underbrace{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}))}_{\text{Geom. Interpretation}} = \underbrace{u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z}_{\text{Effektive Berechnung}}$$

TR: dotP(u,v) menu ? ?

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = \underline{\underline{3}}$

mit $|\vec{u}| = 1$



Projektion von $\vec{v}$ auf $\vec{u}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} =$
$|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha) =$
$|\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)$

$\cos = \frac{\text{Ankatek}}{\text{Hypothenuse}}$

Physik $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

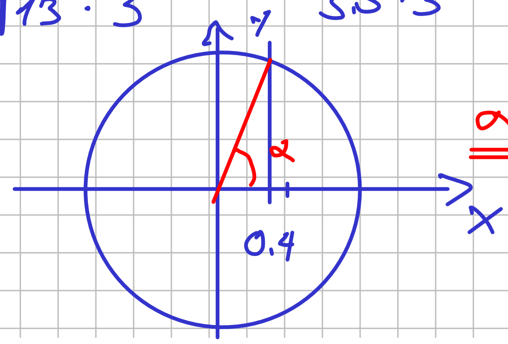
$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$? $\qquad \cos(\alpha) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

Bsp $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

"Berechne" von Hand $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$ auf 10° genau.

$$\cos(\alpha) = \frac{4}{\sqrt{13} \cdot 3} \approx \frac{4}{3.5 \cdot 3} = \frac{4}{10.5} \approx 0.4$$

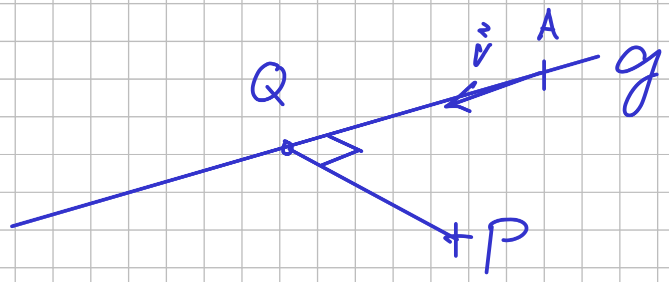


$\underline{\underline{\alpha \approx 70^\circ}}$

TR: $\underline{\underline{\alpha \approx 68{,}297^\circ}}$

Abstand P g

$P = (5, 2, -1)$ $\qquad$ $\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$




```
[-1, 0, 1] → v
[1, 2, 3] + t*v → g(t)
[5, 2, -1] → p
solve(dotP(p-g(t),v)=0,t)
g(-4) → q
norm(p-q)
```

Gesucht: $Q \in g$, so dass $\vec{QP} \perp g$

$\iff \vec{QP} \perp \vec{v}$

$\iff \vec{QP} \cdot \vec{v} \stackrel{!}{=} 0$

Gleichung f. t: $\quad (\vec{OP} - \vec{g}(t)) \cdot \vec{v} \stackrel{!}{=} 0$

↳ $g(t)$ liefert $\vec{OQ}$

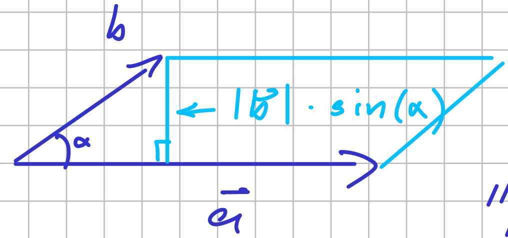
$t = -4$, $Q = (5, 2, -1)$

Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ mit $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

und $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ bilden ein Rechtssystem, wie Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger der rechten Hand (bzw. wie das Koordinatensystem)

und $$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot \underbrace{|\vec{b}| \cdot \sin(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}))}_{\text{Höhe im Parallelogramm}}$$



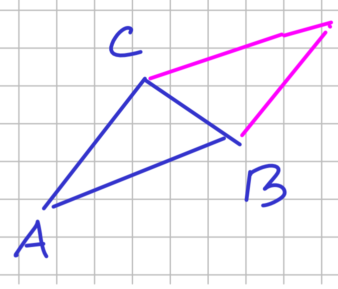
Länge von $\vec{a} \times \vec{b}$ "ist gleich" Fläche vom Parallelogramm (die Masszahlen sind gleich)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}$$

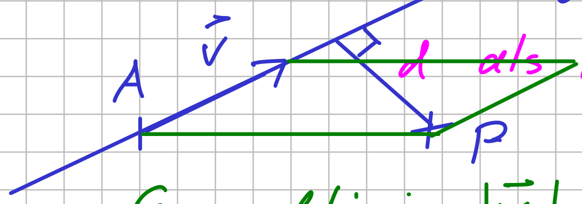
TR: crossP(a, b)

__Beispiel__ Fläche vom $\triangle ABC$ (Koord. gegeben)



$$F_\triangle = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}$$

Abstand Pg: $\quad g(t) = \vec{OA} + t \cdot \vec{v}$



d als Höhe von Parallelogramm

Grundlinie $|\vec{v}|$

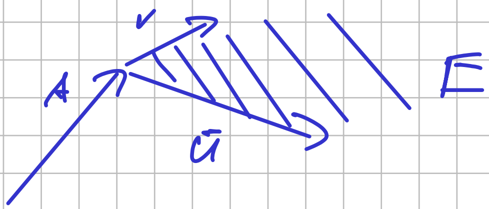
Fläche: $|\vec{v} \times \vec{AP}|$

$$\text{Abstand } \overline{Pg} = \frac{|\vec{v} \times \vec{AP}|}{|\vec{v}|} = \text{Höhe}$$

Ebenen

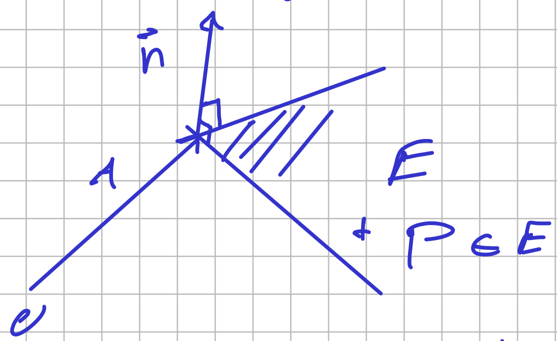
Parameter-Darstellung: $E: \vec{OA} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$

mit $s, t \in \mathbb{R}$



Koordinatengleichung

$\vec{n}$: Normalvektor



für alle

$$\forall P \in E: \quad \vec{AP} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(\vec{OP} - \vec{OA}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{OP} \cdot \vec{n} - \underbrace{\vec{OA} \cdot \vec{n}}_{-d} = 0$$

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

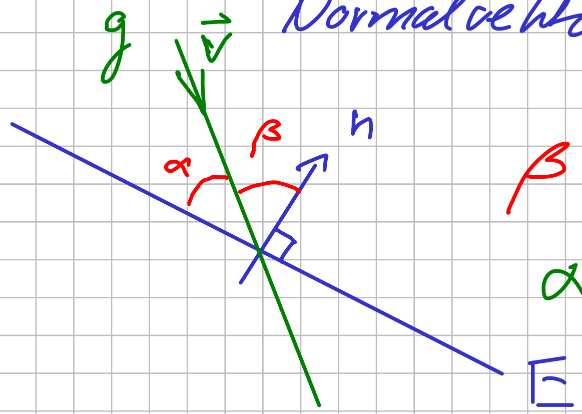
$$x \cdot n_1 + y \cdot n_2 + z \cdot n_3 + d = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad ax + by + cz + d = 0$$

Winkel Ebene mit Gerade/Ebene

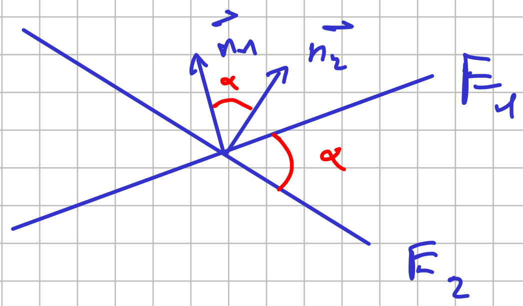
Ebene E : $ax + by + cz + d = 0$

Normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$



$\beta = \sphericalangle(\vec{n}, \vec{v})$

$\alpha = \sphericalangle(E, g) = 90^\circ - \beta$
$= 90^\circ - \sphericalangle(\vec{n}, \vec{v})$



$\sphericalangle(E_1, E_2) = \sphericalangle(n_1, n_2)$

A3

$A = (-2, 1, -1)^{\nearrow a}$, $B = (1, 3, 1)^{\nearrow b}$, $C = (-3, -1, 1)^{\nearrow c}$

Gleichung E_{ABC}, Fläche $\triangle ABC$

Normalvektor

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

crossP(b-a , c-a) → n

Gleichung $\quad \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + d = 0 \iff d = -\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

-dotP(n , a) → d

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -16 - 8 + 4 = -20 = -d \iff d = +20$$

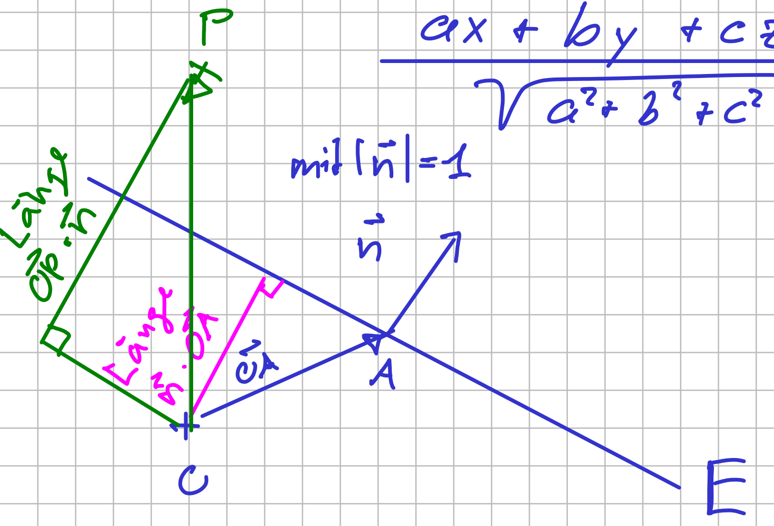
a) $E: \quad 8x - 8y - 4z + 20 = 0$

oder $\quad 2x - 2y - z + 5 = 0$

b) $F_\triangle = \frac{1}{2} |\vec{n}| = \underline{\underline{6}}$

Abstand Punkt - Ebene

Hessische Normalform : Normalvektor hat Länge 1



$$\frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{OA}$$

$$\overline{EP} = \left| \frac{a p_x + b p_y + c p_z + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

5

$[10, -12, 2.5] \to a$ Punkt A

$[5, -2, -10] \to v$ Richtungsvektor $\vec{v}$

$[0, 1, 10] \to n$ Normalvektor Hang $\vec{n}$

$7.4 \to d$ von Gleichung Hang

a) $\frac{\vec{a} \cdot \vec{n} + d}{|\vec{n}|}$ (dotP(a, n) + d)/norm(n)

menu 7 c 3 menu 771

~~4.4179~~

$\underline{2.029}$

b) Landung? $\vec{g}(t) = \vec{OA} + t \cdot \vec{v}$

a + t*v → g(t)

Gesucht t so, dass $\vec{g}(t)$ in die Gleichung von E eigesetzt, eine wahre Aussage ergibt.

$$\vec{n} \cdot \vec{g}(t) + d = 0$$

$$g(t): \begin{pmatrix} 10 \\ -12 \\ 2.5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\underset{a}{0} \cdot (\underset{g_x}{10 + 5t}) + \underset{b}{1} \cdot (\underset{g_y}{-12 - 2t}) + \underset{c}{10}(\underset{g_z}{2.5 - 10t}) + \underset{d}{7.4} = 0$$

solve(dotP(n, g(t)) + d = 0, t)

↳ t = 0.2

g(0.2) → l

↳ $L = (11, -12.4, 0.5)$

c) $\frac{|\vec{OL} - \vec{OA}|}{30}$

d) Winkel $E, g = 90° - \sphericalangle(\vec{n}, \vec{v})$

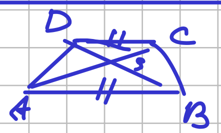
$$\sphericalangle(\vec{n}, \vec{v}) = \arccos\left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|}\right)$$

$\cos^{-1}(\text{dotP}(n, v) / \text{norm}(n) / \text{norm}(v)) \approx 153.33°$

$$\frac{a}{b \cdot c} = \frac{\frac{a}{b}}{c} \neq \frac{a}{b} \cdot c$$

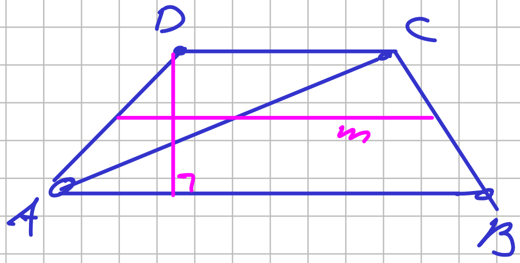
Winkel $63{,}32°$

A7 Trapez



a) $\vec{AB} \parallel \vec{CD} \Longleftrightarrow \vec{AB} \times \vec{CD} = \vec{0}$

$|\vec{BC}| \overset{?}{=} |\vec{AD}|$



b) Gesucht s, t so dass

$$\vec{OA} + t \cdot \vec{AC} = \vec{OB} + s \cdot \vec{BD}$$

$\hookrightarrow$ s, t, einsetzen $\rightarrow S$

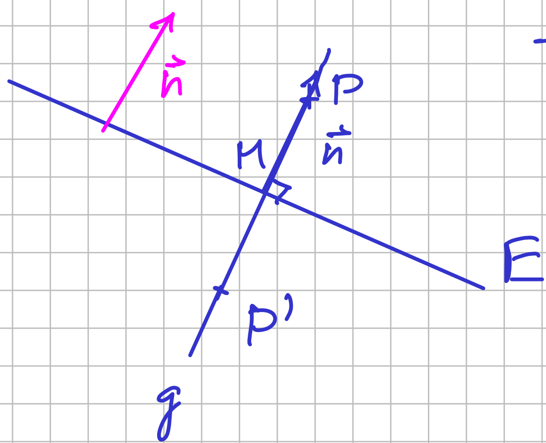
Schnittwinkel $\sphericalangle(\vec{AC}, \vec{BD})$

c) $\frac{1}{2} \underbrace{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}_{\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}} + \frac{1}{2} |\vec{AC} \times \vec{AD}|$

d) $E: ax + by + cz + \underset{\uparrow}{?} = 0$ with $? = -\vec{n} \cdot \vec{OA}$

$-2x + 2y + z \cdot 11 = 0$

e)

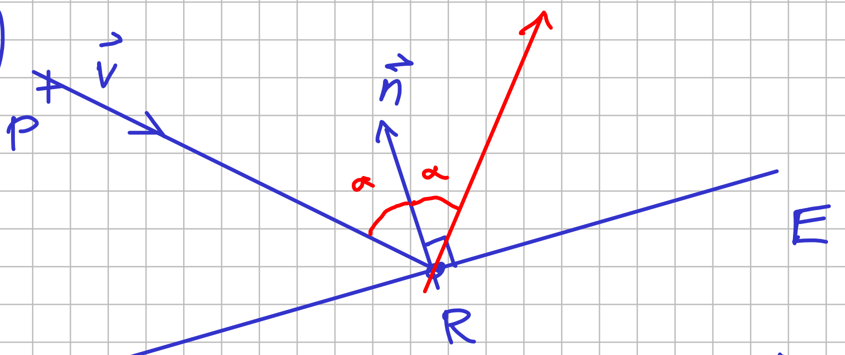


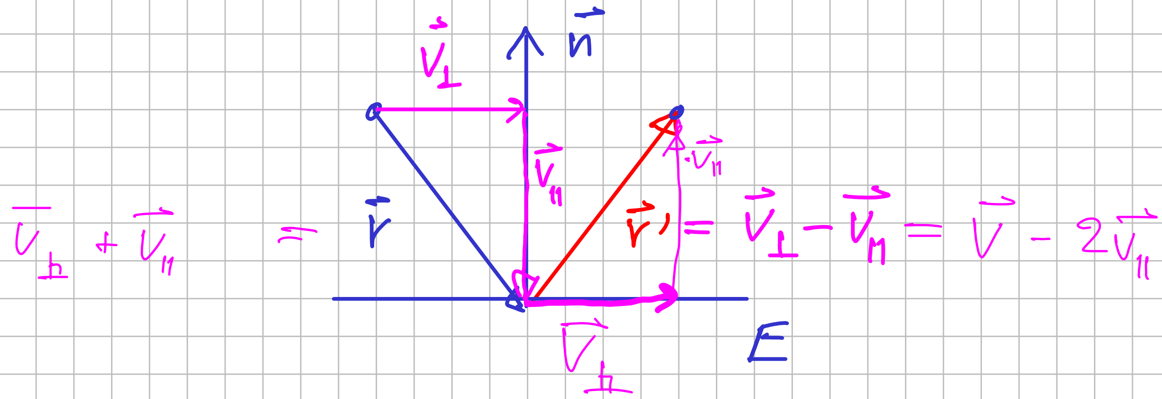
$\vec{n} \parallel \vec{PP'}$

$g(t) = \vec{OP} + t \cdot \vec{n}$

$g \cap E \rightarrow M$

f)





$\vec v_\parallel$ ist die Projektion von $\vec v$ auf $\vec n$

Länge von $\vec v_\parallel$ ist $\vec v \cdot \left(\frac{\vec n}{|\vec n|}\right)$

Richtung ist $\frac{\vec n}{|\vec n|}$

$$\vec v_\parallel = \frac{\vec n}{|\vec n|} \cdot \left(\vec v \cdot \left(\frac{\vec n}{|\vec n|}\right)\right) = \vec n \cdot \frac{\vec v \cdot \vec n}{\vec n \cdot \vec n}$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = a\cdot a + b\cdot b + c\cdot c = \left|\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right|^2$$