Aufgabe 1

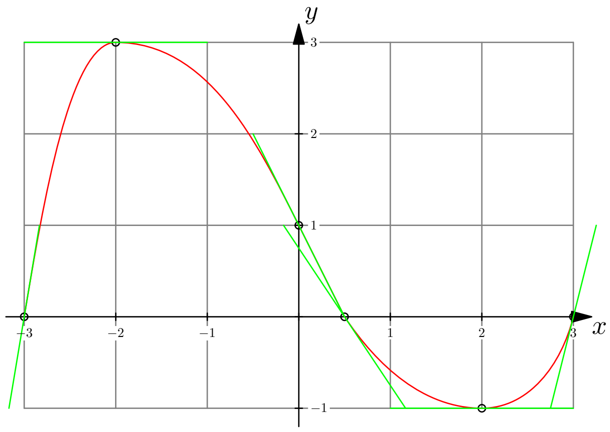
3+2=5 Punkte

a) $f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin(x^2) \cdot \left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

b) $\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cdot(\cos(x))-\sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$

Aufgabe 2

5 Punkte



Aufgabe 3

2+2 Punkte

Abstand Parabel-Ursprung: $A(x) = \sqrt{x^2 + (f(x))^2}$

Minimum von $A(x)$: Gleichung $A'(x) = 0$ liefert folgende x-Werte mit Abständen:

$x = -2.23607 \Rightarrow A(x) = 2.62866$
$x = 2.23607 \Rightarrow A(x) = 4.25325$
$x = 3 \Rightarrow A(x) = 4.24264$
Der Abstand ist also 2.629 bei $x = -2.236$.

Aufgabe 4

6 Punkte

$O = (h + 2 \cdot \frac{s}{2}) \cdot 4s$
$V = s^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{s^2}$
$O(s) = \left(\frac{V}{s^2} + s\right) \cdot 4s$
All Masseinheiten in dm, $V = 10\,\mathrm{dm}^3$.
$O'(s) = 0$ liefert $s = \sqrt[3]{5} \approx 1.70998$.
Daraus folgt $h = \frac{10}{5^{\frac{2}{3}}} = 2\sqrt[3]{5} \approx 3.41995$.

Aufgabe 5 *2+2+2+2+2=10 Punkte*

a) M(2), A(2), T(2), H(1), E(1), I(1), K(1), total 10 Buchstaben. $\frac{10!}{2\cdot2\cdot2} = 453'600$

b) $7! = 5040$.

c) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 4 = \frac{9!}{3!} = 60'480$.

d) Total 10^6 PINs. Nur gerade Ziffern $5^6 = 15625$.

e) $\binom{52}{5} = 2'598'960$.

Aufgabe 6 *3+4+3=10 Punkte*

a) Total $\binom{20}{4} = 4845$.

2 Richtige, 2 Falsche: $\binom{4}{2} \cdot \binom{16}{2} = 6 \cdot 120 = 720$

b) 3 Torhüter, Verteidiger, Angreifer, Captain: $3 \cdot \binom{10}{3} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{1} = 3 \cdot 120 \cdot 35 \cdot 1 = 50'400$

c) Total Sitzmöglichkeiten: $6! = 720$. Möglichkeiten, wo Tom und Tina nebeneinander sitzen: Wahl erster Platz, Wahl Ordnung, Wahl Rest $5 \cdot 2! \cdot 4! = 240$.

Gesuchte Anzahl: 720-240 = 480.

Alternative: Möglichkeiten 2 Plätze auszuwählen, die nicht nebeneinander sind: $\binom{6}{2} - 5 = 10$. Vertauschen von Tina und Tom: 2!, Rest 4!. Total also $10 \cdot 2 \cdot 4 = 240$.

Aufgabe 1

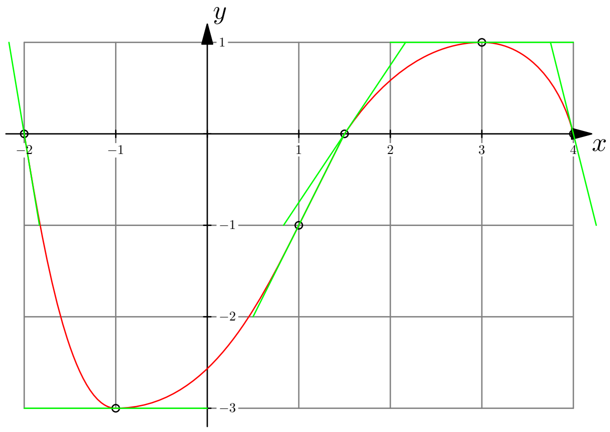
3+2=5 Punkte

a) $f'(x) = -\sin(x^2) \cdot 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos(x^2) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

b) $\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cdot(\cos(x)) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$

Aufgabe 2

5 Punkte



Aufgabe 3

2+2 Punkte

Abstand Parabel-Ursprung: $A(x) = \sqrt{x^2 + (f(x))^2}$

Minimum von $A(x)$: Gleichung $A'(x) = 0$ liefert folgende x-Werte mit Abständen:

$x = 2.23607 \Rightarrow A(x) = 2.62866$

$x = -2.23607 \Rightarrow A(x) = 4.25325$

$x = -3 \Rightarrow A(x) = 4.24264$

Der Abstand ist also 2.629 bei $x = 2.236$.

Aufgabe 4

6 Punkte

$O = (h + 2 \cdot \frac{s}{2}) \cdot 4s$

$V = s^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{s^2}$

$O(s) = \left(\frac{V}{s^2} + s\right) \cdot 4s$

All Masseinheiten in dm, $V = 10\,\text{dm}^3$.

$O'(s) = 0$ liefert $s = \sqrt[3]{5} \approx 1.70998$.

Daraus folgt $h = \frac{10}{5^{\frac{2}{3}}} = 2\sqrt[3]{5} \approx 3.41995$.

Aufgabe 5 *2+2+2+2+2=10 Punkte*

a) M(2), A(2), T(2), H(1), E(1), I(1), K(1), total 10 Buchstaben. $\frac{10!}{2\cdot 2\cdot 2} = 453'600$

b) $7! = 5040$.

c) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 4 = \frac{9!}{3!} = 60'480$.

d) Total 10^6 PINs. Nur gerade Ziffern $5^6 = 15625$.

e) $\binom{52}{5} = 2'598'960$.

Aufgabe 6 *3+4+3=10 Punkte*

a) Total $\binom{20}{4} = 4845$.

2 Richtige, 2 Falsche: $\binom{4}{2} \cdot \binom{16}{2} = 6 \cdot 120 = 720$

b) 3 Torhüter, Verteidiger, Angreifer, Captain: $3 \cdot \binom{10}{3} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{1} = 3 \cdot 120 \cdot 35 \cdot 1 = 50'400$

c) Total Sitzmöglichkeiten: $6! = 720$. Möglichkeiten, wo Tom und Tina nebeneinander sitzen: Wahl erster Platz, Wahl Ordnung, Wahl Rest $5 \cdot 2! \cdot 4! = 240$.

Gesuchte Anzahl: 720-240 = 480.

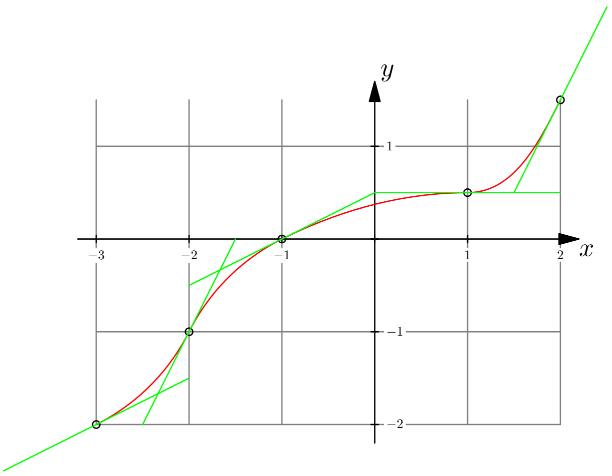
Alternative: Möglichkeiten 2 Plätze auszuwählen, die nicht nebeneinander sind: $\binom{6}{2} - 5 = 10$. Vertauschen von Tina und Tom: 2!, Rest 4!. Total also $10 \cdot 2 \cdot 4 = 240$.

Aufgabe 1 *3+2=5 Punkte*

a) $f'(x) = -\sin(x^2) \cdot 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos(x^2) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

b) $\left(\frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2}\right)' = \frac{2\sin(x)\cos(x)\cos(x)^2 + 2\sin(x)^2\sin(x)\cos(x)}{\cos(x)^4} = \frac{2\sin(x)\cos(x)\left(\cos(x)^2+\sin(x)^2\right)}{\cos(x)^4} = \frac{2\sin(x)}{\cos(x)^3} = 2\tan(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)^2}$

Aufgabe 2 *5 Punkte*



Aufgabe 3 *2+2 Punkte*

Abstand Parabel-Ursprung: $A(x) = \sqrt{x^2 + (f(x))^2}$
Minimum von $A(x)$: Gleichung $A'(x) = 0$ liefert folgende x-Werte mit Abständen:
$x \approx -1.2143197,\ A(x) \approx 1.332407$
$x \approx 1.53918887,\ A(x) \approx 3.24315$
$x \approx 2.67513087,\ A(x) \approx 3.11554696$

Aufgabe 4 *6 Punkte*

Länge l, Breite b, Höhe h, alles in dm.
Oberfläche ist $O = h \cdot (2l + 2b) + 4 \cdot b \cdot \frac{b}{2} + 4 \cdot l \cdot \frac{b}{2}$.
Das Volumen ist $V = l \cdot b \cdot h$.
Es gilt: $l = 2b$ und $V = 10$, daraus folgt $h = \frac{10}{lb} = \frac{10}{2b^2}$.
Damit ist
$O(b) = \frac{10}{2b^2} \cdot (2 \cdot 2b + 2b) + 4 \cdot b \cdot \frac{b}{2} + 4 \cdot 2b \cdot \frac{b}{2} = \frac{30}{b} + 2b^2 + 4b^2 = \frac{30}{b} + 6b^2$
All Masseinheiten in dm, $V = 10\,\mathrm{dm}^3$.
$O'(b) = 0$ liefert $b = \sqrt[3]{\frac{5}{2}} \approx 1.357209$.
Daraus folgt $l \approx 2.714418$ und $h \approx 2.714418$.

Aufgabe 5 *2+2+2+2+2=10 Punkte*

a) A(3), N(1), G(1), R(1), M(2), total 8 Buchstaben. $\frac{8!}{3!\cdot 2} = 3360$

b) $7! = 5040$.

c) $\frac{10!}{3!} = 604'800$.

d) Total $4^6 = 4096$ Pläne. Zwei mal vegi, 4 mal n. vegi. Auswahl der Vegi-Tage: $\binom{6}{2} = 15$. Total: $15 \cdot 3^4 = 1215$.

e) $\binom{10}{4} = 210$.

Aufgabe 6 *3+4+3=10 Punkte*

a) Total $8^6 = 262'144$.

Auswahl der richtigen Positionen: $\binom{6}{3} = 20$, Auswahl der restlichen Farben: $7^3 = 343$, total 6860 mögliche Tipps.

b) Bildung der Teams: Wörter mit 12 Buchstaben, wobei jeder doppelt: $\frac{12!}{(2!)^6} = 7'484'400$.

Verteilung der Teams: Wieder Wörter mit 6 Buchsten, wobei jeder doppelt: $\frac{6!}{(2!)^3} = 90$. Total also 673'596'000 Möglichkeiten.

c) Total Sitzmöglichkeiten: $\frac{6!}{5} = 120$ (6 Rotationen).

Tom platzieren, gibt noch 3 Plätze für Tina. Die restlichen 4 verteilen: $4! = 24$, total also 72 Platzierungen.