Aufgaben zum Rechnen mit Komplexen Zahlen

1. Bestimme das Ergebnis in Normal- und Polarform
   a) $(1+i)^{10}$ b) $(3 \cdot e^{i \cdot \pi/3})^5$ c) $(2-3i)^6 + (2+3i)^4$ d) $(-1+2i)^9$
   e) $(\sqrt{6} \cdot e^{i \cdot 123°})^4 + (\sqrt{8} \cdot e^{i \cdot 321°})^6$
2. Berechne die kleinste natürliche Zahl n, für die
   a) der Realteil von $(8+i)^n$ negativ ist b) der Imaginärteil von $(12+i)^n$ negativ ist.
3. Schreibe das Resultat in Polarform mit Winkeln in $[0, 2\pi[$:
   a) $(e^{i \cdot 5\pi/6})^4 \cdot (e^{i \cdot 4\pi/3})^2$ b) $(e^{i \cdot \pi/3} : e^{i \cdot \pi/5})^5$ c) $(e^{i \cdot \pi/8})^{-3}$
   d) $(e^{-i \cdot 2\pi/5})^{-4}$ e) $\prod_{k=1}^{10} e^{i \cdot k\pi/5}$ f) $\prod_{k=0}^{21} e^{i \cdot 2k\pi/9}$
4. Beweise: $\dfrac{e^{i \cdot \varphi} - 1}{e^{i \cdot \varphi} + 1} = i \tan(\frac{\varphi}{2})$
5. Drücke mit Potenzen von $\cos(\varphi)$ aus:
   a) $\cos(2\varphi)$ b) $\cos(3\varphi)$ c) $\cos(4\varphi)$
6. Drücke mit Potenzen von $\sin(\varphi)$ und falls nötig dem linearen Term $\cos(\varphi)$ aus:
   a) $\sin(2\varphi)$ b) $\sin(3\varphi)$ c) $\sin(4\varphi)$
7. Schreibe als Produkt zweier Sinus- und Cosinus-Terme mit den Argumenten $\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\frac{\alpha-\beta}{2}$. Verwende dabei die Formel $e^{i \cdot \alpha} \pm e^{i \cdot \beta} = e^{i \cdot (\alpha+\beta)/2} \cdot \left(e^{i \cdot (\alpha-\beta)/2} \pm e^{i \cdot (\beta-\alpha)/2}\right)$. Beweise diese zuerst.
   a) $\cos(\alpha) + \cos(\beta)$ b) $\cos(\alpha) - \cos(\beta)$ c) $\sin(\alpha) + \sin(\beta)$ d) $\sin(\alpha) - \sin(\beta)$
8. Bestimme die Lösungen in der Polarform
   a) $z^3 = 27 \cdot e^{i \cdot 4\pi/9}$ b) $z^5 = -4$ c) $z^2 = 7 \cdot e^{i \cdot 2\pi/5}$ d) $z^4 = i$
9. Bestimme die Lösungen der Gleichungen in Normalform:
   a) $z^2 = 5 - 9i$ b) $z^3 = -2 - 2i$ c) $z^4 = 4 + 3i$ d) $z^5 = 1 + i$ e) $z^3 + 9 = 7i$
10. Die Zahl $\sqrt{3} - i$ ist eine Lösung der Gleichung $z^4 = a$. Berechne a und die restlichen Lösungen der Gleichung in Normalform.
11. Berechne das Produkt der 5. Einheitswurzeln. Wie kann diese Aussage verallgemeinert werden?
12. Bestimme die Summe der 5. Einheitswurzeln. Wie kann diese Aussage verallgemeinert werden?
13. Bestimme die Lösungen der Gleichung in der Polarform mit Hilfe einer Substitution:
    a) $z^4 - 4z^2 + 5 = 0$ b) $z^{10} + 2z^5 + 4 = 0$ c) $z^8 + z^4 + 1 = 0$
    d) $z^6 + 6z^3 + 25 = 0$
14. Löse folgende quadratische Gleichungen und gib die Resultate in Normalform an:
    a) $2z^2 + 4z + i = 0$ b) $z^2 - 3z + 30i = 0$ c) $(1-i)z^2 + z = 1$
    d) $z^2 + 5z - 12 = 7iz + 20i$ e) $4z^2 - (5+8i)z = 3 - 5i$
15. Bestimme die Lösung der Gleichungen mit Hilfe eines Gleichungssystems und der Formel $z = x + iy$
    a) $z^2 = 6 - 2i$ b) $z^2 = 3 + 4i$ c) $z^4 + 8z^2 + 16 = 0$
16. Berechne alle Lösungen der Gleichung in Normalform:
    a) $2z^3 + 7z^2 + 2iz + 7i = 0$ b) $4z^6 + 21z^4 + 4z^2 + 21 = 0$
17. Stelle eine möglichst einfache Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten auf, die von den angegebenen Zahlen gelöst werden:
    a) $2, -4, 3i$ b) $5 - 7i$ c) $0, 1 + \frac{1}{2}i, 4$ d) $1 + i, -1 - i$
18. Berechne $z_1 + z_2 + z_3$ sowie $\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}$. Verallgemeinerung?
    a) $z_1 = 7 + 2i$, $z_2 = -6 + 8.5i$, $z_3 = 1 - 3i$
    b) $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_3 = x_3 + iy_3$
19. Berechne az sowie $a\overline{z}$ für
    a) $z = 9 - 4i$, $a = 0.8$ b) $z = -3 + 5i$, $a = -2$ c) $z = x + iy$ und $a \in \mathbb{R}$
20. Berechne z^3 und $(\overline{z})^3$. Verallgemeinerung?
    a) $z = 2 + i$ b) $z = 2 \cdot e^{i \cdot 2\pi/7}$ c) $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$, $r > 0$

21. Beweise mit Hilfe der Resultate der Aufgaben 18 bis 20, dass $a(\overline{z})^3+b(\overline{z})^2+c\overline{z}+d$ mit a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ zu az^3+bz^2+cz+d konjugiert wird. Verallgemeinerung?

22. a) Stelle für die Gruppe der 6. Einheitswurzeln $\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$ eine Verknüpfungstafel auf, aus der man alle Produkte $z_k \cdot z_l = z_m$ entnehmen kann. Wie ergibt sich m allgemein aus k und l?

    b) Welches ist die kleinste Untergruppe, die z_2 enthält?

    c) Bilde die kleinste Untergruppe, die jeweils das Element z_0, z_1, z_3, z_4, z_5 enthält.

23. Bestimme sämtliche Lösungen der Gleichung $z^6+(1+i)z^3+i=0$.

24. Jemand schreibt $z=\sqrt{1+\sqrt{3}i}+\sqrt{1-\sqrt{3}i}$. Nach unserer Vereinbarung ist dies aber wegen der Mehrdeutigkeit komplexer Wurzeln nicht erlaubt. Welche Bedeutung könnte z haben?

25. a) **Zeige:** Ist z eine n-te Einheitswurzel, so ist auch $\overline{z}$ eine n-te Einheitswurzel. Was bedeutet dies geometrisch?

    b) **Beweise:** Ist z eine n-te Einheitswurzel, so auch $\frac{1}{z}$.

    c) Wenn $q \in \mathbb{R}$ ist, dann ist mit z auch $\overline{z}$ eine n-te Wurzel von q. Beweise diese Aussage. Ist in diesem Fall mit z auch die Zahl $\frac{1}{z}$ eine n-te Wurzel von q?

26. Die Koeffizienten von $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_0$ seien alle reell, ausserdem gelte $x \in \mathbb{R}$.
    Beweise: Ist n gerade und gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0)<0$, so hat f mindestens zwei reelle Nullstellen.

27. Beweise folgende Aussagen:

    a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist z^n-1 durch $z-1$ teilbar.

    b) Für jedes gerade n ist z^n-1 durch z^2-1 teilbar.

    c) Für jedes ungerades n ist z^n+1 durch $z+1$ teilbar.

    d) $2^{117}+1$ ist durch 3 teilbar.

    e) $3^{118}-1$ ist durch 8 teilbar.

28. Eine Lösung der Gleichung $z^3-12z^2+az+b=0$ ist gleich $3-i$. Bestimme die beiden anderen Lösungen sowie die Parameter a, $b \in \mathbb{R}$.

29. Die Gleichung $2z^3-9z+p=0$ hat eine komplexe Lösung mit Realteil $\frac{3}{2}$. Bestimme $p \in \mathbb{R}$ und die restlichen Lösungen.

30. Die Gleichung $z^4-12z^3+az^2+bz+72=0$ hat zwei rein imaginäre Lösungen sowie eine reelle Doppellösung. Berechne diese Lösungen sowie die reellen Parameter a und b.

31. Die vier Lösungen der Gleichung $z^4-4z^3+az^2+bz+c=0$ bilden in der komplexen Ebene ein Quadrat, dessen eine Ecke im Ursprung liegt. Bestimme die restlichen Ecken sowie a, b, $c \in \mathbb{R}$.

32. $f(z)$ sei eine Polynomfunktion vom Grad $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten. Begründe mit dem Fundamentalsatz, dass die Gleichung $f(z)=a$ für jedes $a \in \mathbb{C}$ immer mindestens eine Lösung besitzt.

33. Bestimme die Polynomfunktion $f(z)$ mit möglichst kleinem Grad n, die die folgenden Bedingungen erfüllt:
    a) $f(-2)=f(3)=0$, $f(0)=1$
    b) $f(-1)=f(1)=f(-2)=f(2)=0$, $f(3)=1$
    c) $f(1)=f(2)=f(3)=1$, $f(0)=2$

34. Bei den folgenden Polynomen vom Grad 3 ist jeweils eine Nullstelle z_1 gegeben. Bestimme die übrigen Nullstellen.
    a) $f(z)=z^3-9z^2+15z+25, \quad z_1=5$
    b) $f(z)=z^3-3z^2+(3-i)z-2+2i, \quad z_1=-i$
    c) $f(z)=z^3-(9+2i)z^2+(31+12i)z-(39+26i), \quad z_1=3-2i$

35. Zeige mithilfe des Fundamentalsatzes: Der Wertebereich eines komplexen Polynoms vom Grad $n \geq 1$ ist ganz $\mathbb{C}$; dabei wird jeder Wert höchstens n-mal angenommen.

Lösungen

1. a) $32e^{i\cdot\pi/2} = 32i$ b) $243e^{i\cdot 5\pi/3} = \frac{243}{2} - \frac{243\sqrt{3}}{2}i$
   c) $2197e^{-i\cdot 5.897} + 169e^{i\cdot 3.931} = 1916 + 708i$ d) $625\sqrt{5}e^{i\cdot 5.744} = 1199 - 718i$
   e) $36e^{i\cdot 132°} + 512e^{i\cdot 126°} = -325.035 + 440.970i$
2. a) $n = 13$ b) $n = 38$
3. a) 1 b) $e^{i\cdot 2\pi/3}$ c) $e^{i\cdot 13\pi/8}$ d) $e^{i\cdot 8\pi/5}$ e) $e^{i\cdot\pi}$ f) $e^{i\cdot 4\pi/3}$
5. a) $2\cos^2(\varphi) - 1$ b) $4\cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)$ c) $8\cos^4(\varphi) - 8\cos^2(\varphi) + 1$
6. a) $2\cos(\varphi)\sin(\varphi)$ b) $3\sin(\varphi) - 4\sin^3(\varphi)$ c) $4\sin(\varphi)\cos(\varphi) - 8\cos(\varphi)\sin^3(\varphi)$
7. a) $2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$ b) $-2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$ c) $2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
   d) $2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$
8. a) $3e^{i\cdot 4\pi/27}, 3e^{i\cdot 22\pi/27}, 3e^{i\cdot 40\pi/27}$ b) $\sqrt[5]{4}e^{i\cdot\pi/5}, \sqrt[5]{4}e^{i\cdot 3\pi/5}, \sqrt[5]{4}e^{i\cdot\pi}, \sqrt[5]{4}e^{i\cdot 7\pi/5}, \sqrt[5]{4}e^{i\cdot 9\pi/5}$
   c) $\sqrt{7}e^{i\cdot\pi/5}, \sqrt{7}e^{i\cdot 6\pi/5}$ d) $e^{i\cdot\pi/8}, e^{i\cdot 5\pi/8}, e^{i\cdot 9\pi/8}, e^{i\cdot 13\pi/8}$
9. a) $2.765 - 1.627i, -2.765 + 1.627i$
   b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}i, 1 - i$
   c) $1.48 + 0.24i, -0.24 + 1.48i, -1.48 - 0.24i, 0.24 - 1.48i$
   d) $1.06 + 0.17i, 0.17 + 1.06i, -0.95 + 0.49i, -0.76 - 0.76i, 0.49 - 0.95i$
   e) $1.52 + 1.66i, -2.20 + 0.49i, 0.67 - 2.15i$
10. $a = -8 - 8\sqrt{3}i$, weitere Lösungen: $1 + \sqrt{3}i, -\sqrt{3} + i, -1 - \sqrt{3}i$
11. Produkt: 1 allgemein: 1 für ungerades n, -1 für gerades n
12. Summe: 0 allgemein: 0
13. a) $\pm(1.46 + 0.34i), \pm(1.46 - 0.34i)$
    b) $\sqrt[5]{2}e^{i\cdot(2\pi/15+k\cdot 2\pi/5)}$ oder $\sqrt[5]{2}e^{i\cdot(4\pi/15+k\cdot 2\pi/5)}$ für $k = 0, \ldots 4$
    c) $e^{i\cdot(\pi/6+k\cdot\pi/2)}$ oder $e^{i\cdot(\pi/3+k\cdot\pi/2)}$ für $k = 0, \ldots 3$
    d) $\sqrt[3]{5}e^{i\cdot(\pm 2.21/3+k\cdot 2\pi/3)}$ für $k = 0, 1, 2$
14. a) $0.029 - 0.243i, -2.029 + 0.243i$ b) $5.52 - 3.73i, -2.521 + 3.73i$
    c) $0.56 + 0.14i, -1.06 - 0.64i$ d) $4i, -5 + 3i$ e) $1 + i, \frac{1}{4} + i$
15. a) $2.482 - 0.402i, -2.482 + 0.402i$ b) $2 + i, -2 - i$ c) $\pm 2i$
16. a) $-\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ b) $\pm\frac{\sqrt{21}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
17. a) $z^4 + 2z^3 + z^2 + 18z - 72$ b) $z^2 - 10z + 74$ c) $4z^4 - 24z^3 + 37z^2 - 20z$ d) $z^4 + 4$
18. a) $2 + 7.5i$ bzw. $2 - 7.5i$ b) $x_1 + x_2 + x_3 + i(y_1 + y_2 + y_3)$ bzw. $x_1 + x_2 + x_3 - i(y_1 + y_2 + y_3)$
    allgemein: $\overline{z_1 + z_2 + z_3} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}$
19. a) $7.2 - 3.2i$ bzw. $7.2 + 3.2i$ b) $6 - 10i$ bzw. $6 + 10i$ c) $ax + iay$ bzw. $ax - iay$
    allgemein: $\overline{az} = a\overline{z}$ für $a \in \mathbb{R}$
20. a) $2 + 11i$ bzw. $2 - 11i$ b) $8e^{i\cdot 6\pi/7}$ bzw. $8e^{-i\cdot 6\pi/7}$ c) $r^3e^{i\cdot 3\varphi}$ bzw. $r^3e^{-i\cdot 3\varphi}$
    allgemein: $(\overline{z})^n = \overline{z^n}$ für $n \in \mathbb{N}$
21. allgemein: $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$ für jedes Polynom $P(z)$ mit reellen Koeffizienten.
22. $z_0 = 1, z_1 = e^{i\cdot\pi/3}, z_2 = e^{i\cdot 2\pi/3}, z_3 = -1, z_4 = e^{i\cdot 4\pi/3}, z_5 = e^{i\cdot 5\pi/3}$ Es gilt $z_k \cdot z_l = z_m$ mit $k + l = m$
    b) $\{z_0, z_2, z_4\}$
    c) für z_0: $\{z_0\}$, für z_1, z_5: $\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$, für z_2, z_4: $\{z_0, z_2, z_4\}$, für z_3: $\{z_0, z_3\}$
23. $e^{i\cdot\pi/2}, e^{i\cdot 7\pi/6}, e^{i\cdot 11\pi/6}, e^{i\cdot\pi/3}, e^{i\cdot\pi}, e^{i\cdot 5\pi/3}$
24. z ist eine Lösung der Gleichung $z^2 - 6 = 0$
28. $a = 46, b = -60$, weitere Lösungen: $3 + i, 6$
29. $p = 27$, Lösungen: $\frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}i, -3$
30. $a = 38, b = -24$, Lösungen: $\pm\sqrt{2}i, 6$
31. $a = 6, b = -4, c = 0$, Lösungen: $0, 1 + i, 2, 1 - i$
33. a) $f(z) = -\frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{6}z + 1$ b) $f(z) = \frac{1}{40}z^4 - \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{10}$ c) $f(z) = -\frac{1}{6}z^3 + z^2 - \frac{11}{6} + 2$
34. a) $5, -1$ b) $2, 1 + i$ c) $3 + 2i$