



# 1 Crash-Course komplexe Zahlen

Diese Dokument dient in erster Linie als Notizen für den Unterricht. Der Unterricht findet primär an der Tafel statt. Zum Selbststudium und für ausführlichere Theorie und weitere Aufgaben wird auf folgende Seiten verwiesen:

- <http://www.educ.ethz.ch/unterrichtsmaterialien/mathematik/komplexe-zahlen.html>
- <https://fginfo.ksbg.ch/blcb>

## 1.1 Definition der imaginären Einheit $i$

Lösungsformel von Gleichungen 3. Grades. «Funktioniert» auch mit Wurzeln aus negativen Zahlen. Ungemach. Überwindung.

Definition: Zusätzliche, nicht reelle Zahl  $i$  mit  $i^2 = -1$ .

Permanenzprinzip: Rechnen wie gewohnt, mit der Zusatzregel, dass  $i^2$  durch  $-1$  ersetzt werden kann.

Heute sind komplexe Zahlen enorm wichtig (und irgendwie natürlich) in Physik (z.B. Wechselstrom, Quantenphysik), Signalanalyse (Audio, Video, Stichwort Fouriertransformierte).

✂ **Aufgabe 1.1** Berechnen, bzw. vereinfachen Sie:

- |                             |                  |                      |                |
|-----------------------------|------------------|----------------------|----------------|
| a) $i + i$                  | b) $1 + i$       | c) $i \cdot (1 + i)$ | d) $i^4$       |
| e) $(2 - i) \cdot (1 + 2i)$ | f) $\frac{3}{i}$ | g) $\frac{1}{1+i}$   | h) $(1 + i)^8$ |

### Definition 1.1 Komplexe Zahlen

Die Menge der **komplexen Zahlen**  $\mathbb{C}$  wird wie folgt definiert:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{mit } i^2 = -1.$$

Für eine komplexe Zahl  $c = a + bi$  nennt man  $a = \operatorname{Re}(c)$  **Realteil** und  $b = \operatorname{Im}(c)$  **Imaginärteil**.

Insbesondere gilt  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

## 1.2 Geometrische Interpretation

Idee: Imaginäre Achse rechtwinklig zur reellen Achse. Zahlenebene. Addition (und Subtraktion) ist gewohnte Vektoraddition.

Wie lässt sich die Multiplikation geometrisch interpretieren?

### Definition 1.2 Betrag

Der Betrag einer komplexen Zahl  $c = a + bi$  entspricht der Distanz zu 0:

$$|c| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

✂ **Aufgabe 1.2** Zeigen Sie, dass für  $c, z \in \mathbb{C}$  folgendes gilt:  $|c \cdot z| = |c| \cdot |z|$ .

Für  $c \in \mathbb{C}$  mit  $c \neq 0$  gilt  $c = |c| \cdot \frac{c}{|c|}$ , wobei  $\frac{c}{|c|}$  die komplexe Zahl mit Betrag 1 und gleicher Richtung wie  $c$  ist.

Damit reicht es, die Multiplikation für komplexe Zahlen mit Betrag 1 zu untersuchen, d.h. komplexe Zahlen auf dem Einheitskreis in der komplexen Zahlenebene.



**Definition 1.3** Trigonometrie im Einheitskreis

Sei  $P_\alpha$  der Punkt auf dem Einheitskreis, der mit der positiven  $x$ -Achse und dem Nullpunkt den orientierten Winkel  $\alpha$  einschliesst. Für die Koordinaten von  $P_\alpha$  gilt:

$$P_\alpha = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)).$$

**Merke:**  $\cos(\alpha)$  und  $\sin(\alpha)$  sind die Koordinaten des entsprechenden Punktes auf dem Einheitskreis.

**Definition 1.4** Argument und  $\text{cis}(\varphi)$

Wir definieren für beliebige Winkel  $\varphi$  die komplexe Zahl

$$c = \text{cis}(\varphi) := \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

mit Betrag 1 und **Argument**  $\varphi = \arg(c)$ .

**Additionstheoreme**

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad \text{und} \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

✳ **Aufgabe 1.3** Berechnen Sie  $\text{cis}(\alpha) \cdot \text{cis}(\beta)$ .

**Merke** Geometrische Interpretation der Multiplikation

Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl  $c \in \mathbb{C}$  entspricht einer Streckung am Ursprung mit Faktor  $|c|$  gefolgt von einer Drehung um den Ursprung mit dem Winkel  $\arg(c)$ .

Was passiert beim Quadrieren? Was passiert beim Potenzieren mit einem natürlichen Exponenten  $n$ ?

✳ **Aufgabe 1.4** Bestimmen Sie alle Lösungen in  $\mathbb{C}$  folgender Gleichungen:

- a)  $x^2 = -2$       b)  $x^4 = 1$       c)  $x^8 = 256$       d)  $x^{36} = 1$       e)  $x^{36} = -1$

✳ **Aufgabe 1.5** Wir betrachten die Bewegung auf einem Kreis mit Radius  $r$  und Zentrum 0, d.h. die komplexen Zahlen der Form  $r \cdot \text{cis}(t)$ , für  $t \in [0, 2\pi[$ , bzw.  $t \in [0^\circ, 360^\circ[$ .

Beschreiben Sie die Abbilder dieser Kreisbewegung, wenn man diese mit folgenden Funktionen abbildet:

- a)  $f(z) = z + (1 + i)$       b)  $f(z) = i \cdot z$       c)  $f(z) = z^2$       d)  $f(z) = z^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$

✳ **Aufgabe 1.6** Gegeben ist  $c \in \mathbb{C}$  mit  $|c| = r$  und  $\arg(c) = \varphi$  sowie  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| \leq \frac{1}{n}r$ , mit  $n \in \mathbb{N}$  gross genug (z.B. 10).

Was lässt sich über den Betrag und das Argument von  $c + z$  aussagen?

**1.3 Fundamentalsatz der Algebra**

Sei  $f(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_{n-1}z^{n-1} + c_nz^n$  ein Polynom mit komplexen Koeffizienten. Wir werden nachvollziehbar machen, dass  $f(z)$  eine Nullstelle hat. Dazu schreiben wir das Polynom erst einmal für  $z \neq 0$  um:

$$f(z) = c_n z^n \left( 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right) = c_n z^n \cdot (1 + g(z)), \quad \text{wobei } a_i = \frac{c_i}{c_n}.$$

Wir betrachten das Bild des Kreises  $r \cdot \text{cis}(t)$ , d.h. die Werte von  $f$  für Argumente  $z$  mit  $|z| = r$ .

Wenn wir  $r$  gross genug wählen, ist  $g(z)$  betragsmässig beliebig klein. Es gibt ein  $r$ , so dass z.B.  $|g(z)| < \frac{1}{k}$  für  $k \in \mathbb{N}^*$  beliebig. Das ist z.B. für  $r > \max(a_i) \cdot nk$  der Fall, weil dann alle Summanden von  $g(z)$  betragsmässig kleiner sind als  $\frac{1}{nk}$  und damit ist die Summe (aus  $n$  Summanden) betragsmässig kleiner als  $\frac{1}{k}$ .

D.h.  $f(z)$  liegt im Kreis mit Zentrum  $c_n z^n$  mit Radius  $\frac{1}{k} c_n z^n$ .

Das Abbild einer Umdrehung des Kreises  $r \cdot \text{cis}(t)$  ist also bis auf die Abweichung um den Faktor  $\frac{1}{k}$  der  $n$ -mal durchlaufene Kreis  $c_n^n \cdot r^n \cdot \text{cis}(t)$ . Man erhält also eine Kurve, die sich  $n$ -mal um den Nullpunkt windet.






**✂ Lösung zu Aufgabe 1.6** ex-betrag-der-summe-eingrenzen

Die Punkte auf dem Kreis um  $c$  mit Radius  $\frac{1}{n}r$  sind mindestens  $\frac{n-1}{n}$  und höchstens  $\frac{n+1}{n}r$  von 0 entfernt:

$$\frac{n-1}{n}r = |c| - |z| \leq |c+z| \leq |c| + |z| = \frac{n+1}{n}r$$

Die maximale Winkeldifferenz  $\psi$  zwischen  $c$  und  $c+z$  erhält man mit der Tangente durch 0 an den Kreis um  $c$  mit Radius  $\frac{1}{n}r$ . Für diese Differenz gilt:

$$\sin(\psi) = \frac{1}{n} \quad \text{und damit} \quad \psi \approx \frac{1}{n} \text{ im Bogenmass, für grosse } n$$

**✂ Lösung zu Aufgabe 1.7** ex-gleichungen-loesen

a) Mitternachtsformel: Diskriminante  $D = 1 - 4 = -3$ . Die Lösungen sind wie folgt:  $x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$ .

b) 2 Lösungsansätze:

**Via Polarform**  $4i - 3 = r \cdot \text{cis}(\varphi)$ , dann sind die Lösungen  $x = \pm \sqrt{r} \text{cis}(\frac{\varphi}{2})$ .  $\varphi$  kann angenähert mit dem TR über trigonometrische Umkehrfunktionen bestimmt werden. Oder

**algebraisch**  $x = a + bi$ , also  $x^2 = a^2 - b^2 + 2abi$  und damit haben wir das folgende, reelle Gleichungssystem

$$-3 = a^2 - b^2 \tag{1}$$

$$4 = 2ab \tag{2}$$

Aus (2) folgt  $b = \frac{2}{a}$  und damit

$$\begin{aligned} -3 &= a^2 - \frac{4}{a^2} && | \cdot a^2 \\ -3a^2 &= a^4 - 4 && | + 3a^2 \\ 0 &= a^4 + 3a^2 - 4 \\ a^2 &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \\ a^2 &\in \{1, -4\} \\ a &= \pm 1 \end{aligned}$$

Und damit  $b = \pm 2$ . Damit sind die Lösungen  $x = \pm(1 + 2i)$

c) Diskriminante der Gleichung ist  $D = (1 + 7i)^2 - 4(1 + i)(2 + 14i) = -50i$ . Davon sind die Wurzeln zu bestimmen. Es gilt  $-50i = 50 \text{cis}(270^\circ)$ , also sind die Wurzeln  $\pm \sqrt{50} \cdot \text{cis}(135^\circ) = \pm \sqrt{50} \cdot \sqrt{2}(-1 + i) = \pm(-5 + 5i)$ .

Daraus ergibt sich mit der Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{(1+7i) \pm (-5+5i)}{2(1+i)}$$

$$x_1 = \frac{(-4+12i)}{2(1+i)} = \frac{(-2+6i)(1-i)}{2} = (-1+3i)(1-i) = 2+4i \text{ und}$$

$$x_2 = \frac{(6+2i)}{2(1+i)} = \frac{(3+i)(1-i)}{2} = \frac{4-2i}{2} = 2-i$$

**✂ Lösung zu Aufgabe 1.8** ex-ehochib

Hinweis: Für  $k \in \mathbb{Z}$  ist  $i^k$  einer der vier Werte  $\pm 1$  oder  $\pm i$  und zwar je nach 4er-Rest  $r$  von  $k$ . Wir können schreiben  $k = 4n + r$  mit  $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

$$i^k = i^{4n+r} = i^{4n} \cdot i^r = (i^4)^n \cdot i^r = 1^n \cdot i^r = i^r$$



Beweis:

$$e^{ib} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ib)^k}{k!} =^*$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ib)^{2k}}{2k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ib)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i^2)^k \cdot b^{2k}}{2k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i^2)^k \cdot i \cdot b^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot b^{2k}}{2k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot i \cdot b^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\ & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{b^{2k}}{2k!} + i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{b^{2k+1}}{(2k+1)!} = \end{aligned}$$

$$\cos(b) + i \sin(b) = \operatorname{cis}(b)$$

\* Weil die Summe absolut konvergiert, darf die Reihenfolge der Summanden beliebig vertauscht werden.