11 Gleichungssysteme

Beispiel: Für welche Werte von x und y sind beide der folgenden Gleichungen wahr?

$$\begin{cases} x + y = 60 & (G_1) \\ x - y = 40 & (G_2) \end{cases}$$

11.1 Lösungsmethoden

Es gibt verschiedene Lösungsmethoden für Gleichungssysteme. Einige sind universell, andere funktionieren nur für lineare Gleichungssysteme. (d.h. Polynome ersten Grades).

11.1.1 Auflösen und Einsetzen

- Eine Gleichung nach einer Variablen auflösen.
- Resultat in alle anderen Gleichungen einsetzen.
- Man löst das Gleichungssystem, das eine Variable weniger hat.
- Am Schluss setzt man die Lösungen «rückwärts» ein.

Diese Methode funktioniert zuverlässig, ist aber manchmal etwas umständlich. Es lohnt sich, die jeweils «einfachste» Gleichung nach der «einfachsten» Variablen aufzulösen.

Beispiel: $\begin{cases} 2x + y - z = 0 & (G_1) \\ x + 3y + 2z = 5 & (G_2) \\ -2x + 4y + 4z = 2 & (G_3) \end{cases}$ ✎ $(G_2) \Rightarrow x = 5 - 3y - 2z$. Eingesetzt:

$$\begin{cases} 2(5-3y-2z) + y - z & = & 0 & (G_1') \\ -2(5-3y-2z) + 4y + 4z & = & 2 & (G_3') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y - 5z & = & -10 & (G_1') \\ 10y + 8z & = & 12 & (G_3') \end{cases}$$

$(G_3') \Rightarrow y = \frac{6-4z}{5}$ Eingesetzt in (G_1'):

$-5 \cdot \frac{6-4z}{5} - 5z = -10 \quad \Leftrightarrow \quad -(6-4z) - 5z = -10 \quad \Leftrightarrow \quad z = 4$

Eingesetzt in (G_3'): $y = \frac{6-4z}{5} = \frac{6-16}{5} = -2$.

Eingesetzt in (G_1): $x = 5 - 3y - 2z = 5 - (-6) - 8 = 3$ und damit ist die Lösung

$$x = 3, \quad y = -2 \quad z = 4$$

Aus dieser Lösungmethode folgert man, dass es genau so viele Gleichungen wie Unbekannte braucht: In jedem Schritt wird eine Unbekannte **eliminiert** und man erhält ein System mit einer Gleichung weniger.

Merke

Damit ein Gleichungssystem überhaupt eine eindeutige Lösung haben kann, braucht es gleich viele Gleichungen wie Unbekannte.

Merke

Der TR kann auch Gleichungssysteme lösen. Dazu werden die Gleichungen mit **and** verknüpft und die Liste der Variablen zwischen «**{}**» geschrieben. Beispiel:

```
solve(x+y=60 and x-y=40, {x,y})
```

11.1.2 Linearkombination von Gleichungen

Addiert (bzw. subtrahiert) man zwei Gleichungen (oder Vielfache davon) eines Systems (voneinander), erhält man eine neue Gleichung, die von den Lösungen ebenfalls erfüllt wird.
Das ist besonders dann nützlich, wenn dabei eine Variable eliminiert wird.

Beispiel: $\begin{cases} 2x + y - z = 0 & (G_1) \\ x + 3y + 2z = 5 & (G_2) \\ -2x + 4y + 4z = 2 & (G_3) \end{cases}$ ✎ $\begin{matrix} (G_1) + (G_3): \\ 2 \cdot (G_2) + (G_3): \end{matrix} \begin{cases} 5y + 3z = 2 & (G_1') \\ 10y + 8z = 12 & (G_2') \end{cases}$

$(G_1') - (G_2'): \quad -2z = -8 \quad \Leftrightarrow \quad z = 4$
In (G_1') eingesetzt: $5y + 12 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = -2.$
In (G_2) eingesetzt: $x - 6 + 8 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3.$

$$x = 3, \quad y = -2 \quad z = 4$$

Der Vorteil dieser Methode ist, dass die zu lösenden Gleichungen meist einfacher sind. Der Nachteil ist, dass diese Methode nur bei linearen Gleichungen immer funktioniert.

11.2 Unterbestimmte Gleichungssysteme

Beispiel: Bestimmen Sie alle möglichen Lösungen von folgendem unterbestimmten Gleichungssystem. Finden Sie eine geometrische Interpretation der Lösungen:

$$x + 2y = 4 \quad (G_1)$$

✎ Nach y aufgelöst: $y = -\frac{1}{2}x + 2$. x ist frei wählbar, y ergibt sich daraus. Die Lösungen sind also alle Punkte des Graphen der linearen Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

Löst man ein unterbestimmtes Gleichungssystem durch Auflösen und Einsetzen, erhält man am Schluss eine Gleichung mit mehr als einer Variablen. Nach einer kann aufgelöst werden, alle restlichen können frei gewählt werden (im Definitionsbereich der entsprechenden Funktion). Geometrisch ergibt sich dann eine eventuell mehrdimensionale Punktemenge:

Anzahl Variablen	Anzahl Gleichungen	Allgemeine Lösungsmenge
2	1	Gerade (bzw. Kurve) in der Ebene
3	1	Ebene (bzw. Fläche) im Raum
3	2	Gerade (bzw. Kurve) im Raum
4	2	Ebene (bzw. Fläche) im 4-dimensionalen Raum
4	3	Gerade (bzw. Kurve) im 4-dimensionalen Raum

11.3 Spezialfälle von Gleichungssystemen

Beispiel: Lösen Sie: $\begin{cases} 4x - 3y = 2 & (G_1) \\ -8x + 6y = 1 & (G_2) \end{cases}$

✎ $2 \cdot (G_1) + (G_2): \quad 0 = 5$ Das System hat keine Lösung.

Zeichnen Sie die beiden Lösungsmengen von (G_1) und (G_2) in einem Koordinatensystem.

11.3.1 Lineare Gleichungssysteme mit 2 Variablen

Die Lösung einer einzelnen Gleichung entspricht den Koordinaten aller Punkte auf einer Geraden. Die Lösung des Systems entspricht dem Schnittpunkt der Geraden. Es gibt somit 3 Fälle:

Fall 1: ✎ Die Geraden schneiden sich. Es gibt genau eine Lösung (Schnittpunkt).

Fall 2: ✎ Die Geraden sind parallel und verschieden. Es gibt keine Lösung.

Fall 3: ✎ Die Geraden sind identisch. Alle Punkte auf der Geraden sind Lösung.

11.3.2 Lineare Gleichungssyteme mit 3 Variablen

Die Lösung eine einzelnen Gleichung entspricht den Koordinaten aller Punkte einer Ebene im Raum. Im Allgemeinen schneiden sich zwei Ebenen in einer Geraden (Heftrücken!). Für den Schnittpunkt dreier Ebenen ergeben sich folgende Fälle:

✎ **Fall 1**: Zwei der drei Ebenen sind parallel und verschieden. Es gibt also keine Lösung.
Fall 2: Zwei Ebenen fallen zusammen (aber nicht die dritte). Die Lösungen entsprechen den Koordinaten der Schnittgeraden.
Fall 3: Die drei Ebenen Fallen zusammen. Die ganze Ebene ist Lösung.
Fall 4: Die Schnittgeraden der 3 möglichen Ebenenpaare sind parallel (Tobleroneschachtel). Es gibt ebenfalls keine Lösung.
Fall 5: Die drei Ebenen schneiden sich in einem Punkt, der Lösung.

Aufgabe 197

a) $\begin{cases} -3x + 8y = 26 & (G_1) \\ -9x - 8y = -50 & (G_2) \end{cases}$
b) $\begin{cases} -x + 10y = -61 & (G_1) \\ -6x - y = 61 & (G_2) \end{cases}$
c) $\begin{cases} 7x - 10y = -36 & (G_1) \\ -10x = -20 & (G_2) \end{cases}$

d) $\begin{cases} -3x - y = -7 & (G_1) \\ -6x - 2y = -14 & (G_2) \end{cases}$
e) $\begin{cases} -10x + 6y = -70 & (G_1) \\ -2x = -20 & (G_2) \end{cases}$
f) $\begin{cases} -6x = 30 & (G_1) \\ -5x + 10y = 25 & (G_2) \end{cases}$

Aufgabe 198

a) $\begin{cases} -10x - 4y - 5z = -85 & (G_1) \\ 3x - 5y + 9z = -74 & (G_2) \\ 7y + 9z = 25 & (G_3) \end{cases}$
b) $\begin{cases} -8x - y + 6z = -58 & (G_1) \\ 3x + 10y - 2z = 99 & (G_2) \\ -x - 2y - 2z = -25 & (G_3) \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x - 8y - 9z = 6 & (G_1) \\ -3y + 9z = 54 & (G_2) \\ 7x + 7y = -21 & (G_3) \end{cases}$
d) $\begin{cases} -2y - 8z = -48 & (G_1) \\ 8x + 6y + z = 69 & (G_2) \\ x + 2y + 10z = 63 & (G_3) \end{cases}$

Aufgabe 199

a) $\begin{cases} -5a - 2b + 6c - 10d = 10 & (G_1) \\ 10a + 10b - 3c + 3d = 50 & (G_2) \\ -c - 9d = 50 & (G_3) \\ 8a - 4b + 2d = -30 & (G_4) \end{cases}$
b) $\begin{cases} -b + 10c + 7d = -130 & (G_1) \\ -7a - 7b - 7c - 8d = 10 & (G_2) \\ 10a + 3b + 3d = 50 & (G_3) \\ -9a - 9b - 10c + 4d = -125 & (G_4) \end{cases}$

Aufgabe 200

a) $\begin{cases} -a - b + 6c + 10d - 6e = -55 & (G_1) \\ 3b - 5c + 8d + 10e = 81 & (G_2) \\ -2a - b + 8c + 4d + 10e = -6 & (G_3) \\ -4a + 7b - 7c - 7d + 7e = 10 & (G_4) \\ 10a + 10b + 9c + 4d - 2e = -173 & (G_5) \end{cases}$
b) $\begin{cases} 6a + 5b - 3c - 3d + 3e = 12 & (G_1) \\ 8a - 3b - 7c + 8d + 5e = -44 & (G_2) \\ -8a - 5b - c + 3d - e = 16 & (G_3) \\ -5a - 2b + 8c - 2e = -34 & (G_4) \\ -8a - 4c - 7d - 9e = 124 & (G_5) \end{cases}$

11.4 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 197 ex-lineare-gleichungssysteme-2var

a) x=2, y=4
b) x=-9, y=-7
c) x=2, y=5
d) x=1, y=4
e) x=10, y=5
f) x=-5, y=0

Lösung zu Aufgabe 198 ex-lineare-gleichungssysteme-3var

a) x=7, y=10, z=-5
b) x=7, y=8, z=1
c) x=3, y=-6, z=4
d) x=5, y=4, z=5

Lösung zu Aufgabe 199 ex-lineare-gleichungssysteme-4var

a) a=0, b=5, c=-5, d=-5
b) a=5, b=10, c=-5, d=-10

Lösung zu Aufgabe 200 ex-lineare-gleichungssysteme-5var

a) a=1, b=-10, c=-9, d=2, e=5
b) a=-4, b=3, c=-7, d=-4, e=-4