A1a

Plan

1. Weil der Kreis beide Achsen berührt muss gelten : $(x-a)^2+(y-a)^2 = a^2$ (Mittelpunkt liegt auf der Winkelhalbierenden und Radius ist Abstand des Mittelpunkts von den Achsen).
2. Punkt $P = (25, 32)$ in obige Gleichung einsetzen.
3. Nach a auflösen.
4. Kreisgleichung erstellen und Mittelpunkt und Radius ablesen resp. angeben.

Durchführung:

2. $(25-a)^2 + (32-a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 114a + 1649 = 0$
3. Es gibt zwei Lösungen für a: $a_1 = 17$ und $a_2 = 97$. Bei $a_2 = 97$ liegt P auf der dem Ursprung zugewandten Seite des Kreises; also ist a_1 die Lösung.
4. $(x-17)^2 + (y-17)^2 = 289$ also $M = (17, 17)$ und $r = 17$.

A1b

Plan

1. Kreis berührt y-Achse bei $y = 7$. Das heisst einerseits, dass $M = (u, 7)$ ist und andererseits, dass der Punkt $P_1 = (0, 7)$ auf dem Kreis liegt. Weil $M = (u, 7)$ ist, heisst das, dass $v = 7$ ist.
2. Der Punkt $P_2 = (8, 3)$ liegt ebenfalls auf dem Kreis.
3. In der Gleichung $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$ haben wir zwei unbekannte Variablen und zwei Gleichungen (v ist bekannt).
4. Punkte in Gleichungen einsetzen und nach u und r auflösen.
5. Kreisgleichung aufstellen und Mittelpunkt und Radius ablesen resp. angeben.

Durchführung:

4. (i) Aus P_1: $(0-u)^2 + (7-7)^2 = r^2$
   (ii) Aus P_2: $(8-u)^2 + (3-7)^2 = r^2$

   Aufgelöst nach u und r ergibt $u = 5$ und $r = 5$.
5. $k : (x-5)^2 + (y-7)^2 = 25$ also $M = (5, 7)$ und $r = 5$.

A2

Plan

1. Beide Terme x und y Term quadratisch ergänzen.
2. In Standardform bringen und Mittelpunkt und Radius ablesen.

Durchführung:

1. $x^2 - 8x = (x-4)^2 - 16$ und $y^2 + 6y = (y+3)^2 - 9$
2. $x^2 - 8x + y^2 + 6y = 0$ also $(x-4)^2 - 16 + (y+3)^2 - 9 = 0$ also $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$ und damit $r = 5$ und $M = (4, -3)$

A3

Plan

1. Punkt auf Gerade in Kreisgleichung einsetzen.
2. Nach x auflösen.
3. Punkte auf Gerade berechnen.

Durchführung:

1. Punkt auf Gerade $(x, y) = (x, 2x + 10)$ in $x^2 + y^2 - 100$ einsetzen: $x^2 + (2x + 10)^2 = 100$
2. Nach x auflösen ergibt $x = -8$ und $x = 0$
3. x in $y = 2x + 10$ einsetzen und damit $P_1 = (-8, -6)$ und $P_2 = (0, 10)$

A23

Plan

1. Durchmesser AB heisst, dass der Mittelpunkt M in der Mitte zwischen A und B liegt.
2. Radius kann berechnet werden in dem die Länge von $\overrightarrow{AM}$ (oder $\overrightarrow{BM}$) berechnet wird.
3. Kugelgleichung aufstellen.

Durchführung:

1. Es ist $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
2. Daher ist $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und damit $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{12} \simeq 3.46$
3. Also $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 12$

A24

a) Gleich wie A2.

d) Zuerst auf Standardform bringen (d.h, durch 2 dividieren und dann gleich wie A2).

A25

Plan

1. Mittelpunkt M mit quadratisch ergänzen bestimmen.
2. Der Radius entspricht nun dem Abstand $d(M, P)$ also $r = |\overrightarrow{MP}|$.

Durchführung

1. Es ist $M = (2, 0, -6)$
2. Es ist $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix}$ und damit $r = |\overrightarrow{MP}| = 21$

A26d

Plan

1. Geradengleichung erstellen $g : \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$.
2. Punkt auf Geraden mit Parameter in Kugelgleichung einsetzen.
3. Erhaltene Gleichung nach t auflösen. Zwei Schnittpunkte ergibt zwei Lösungen für t.
4. t in Geradengleichung einsetzen und Punkte berechnen.

Durchführung

1. $g : \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. $(6-2t, t, 0)$ in $(x+1)^2+(y+4)^2+(z-2)^2 = 49$ eingesetzt ergibt $(6-2t+1)^2+(t+4)^2+(-2)^2 = 49 \Leftrightarrow 5t^2 - 20t + 20 = 0$ (also $a = 5, b = -20c = 20$)
3. Aufgelöst nach t ergibt $t = -2$. Achtung: Nur eine Lösung, das heisst, es ist ein Berührungspunkt, da die Diskriminante $b^2 - 4ac = 0$ ist.
4. Damit ist $P = (6 - 4, 2, 0) = (2, 2, 0)$.

A28a

Plan

1. Die Gerade ist eine Tangente wenn es genau einen Berührungspunkt gibt.
2. (x, y, z) eines Punktes auf der Geraden in die Kugelgleichung einsetzen.
3. Nach t auflösen und überprüfen ob es für t nur eine Lösung gibt.
4. t in Geradengleichung einsetzen und Punkt berechnen.

Durchführung

2. $(6 + 2t, 5 + 2t, 7 + 3t)$ in $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 + (z + 4)^2 = 49$ eingesetzt ergibt $(6 + 2t + 3)^2 + (5 + 2t - 5)^2 + (7 + 3t + 4)^2 = 49$
3. Aufgelöst nach t ergibt $t = -3$
4. Es ist $P = (6 - 6, 5 - 6, 7 - 9) = (0, -1, -2)$

A29a

Plan

1. Die Ebene berührt die Kugel im Punkt P wenn $\overrightarrow{MP}$ kollinear zum Normalenvektor ist und sie genau einen Schnittpunkt mit der Kugel hat.
2. Gerade g von M ausgehend mit dem Normalenvektor als Richtungsvektor erstellen.
3. Gerade g mit Ebene E schneiden ergibt den Berührungspunkt.
4. Die Länge des Vektors $\overrightarrow{MP}$ entspricht dem Radius.

5. Kugelgleichung aufstellen.

Durchführung

1.
2. $g : \overrightarrow{OM} + t \cdot \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
3. $P = (\frac{20}{3}, \frac{11}{3}, -\frac{5}{3})$
4. $r = |\overrightarrow{MP}| = 2$
5. $k : (x-6)^2 + (y-5)^2 + (z+3)^2 = 4$

A31

1. Da Kreis auf der xy-Ebene liegt muss $z = 0$.
2. $z = 0$ in Kugelgleichung einsetzen.
3. Kreisgleichung mit quadratisch ergänzen herleiten.
4. Mittelpunkt und Radius ablesen.

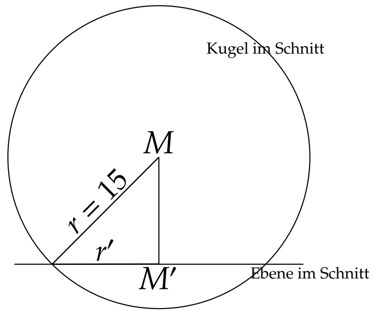
Durchführung:

2. $x^2 + y^2 + 6y - 135 = 0$
3. $x^2 + (y+3)^2 = 144$
4. Es ist $M = (0, -3, 0)$ und $r = 12$

A32

Plan

1. Normalenform der Kugel bestimmen und Radius ablesen.
2. Gerade ausgehend von M mit Normalenvektor als Richtungsvektor erstellen.
3. g mit Ebene E schneiden ergibt Mittelpunkt M' des Kreises.
4. Radius r' des Kreises mit Pythagoras bestimmen anhand folgender Überlegung:



Es gilt nun, dass $r'^2 = 15^2 - |\overrightarrow{MM'}|^2$ ist.

Durchführung

1. $x^2 + (y-1)^2 + (z-11)^2 = 225$ und damit $M = (0, 1, 11)$ und $r = 15$
2. $g : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
3. $2(0 + 2t) + 2(1 + 2t) - (11 - t) - 18 = 0$ ergibt $t = 3$ und damit $M' = (6, 7, 8)$.
4. Es ist $\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ und damit $|\overrightarrow{MM'}| = 9$. Also ist $r'^2 = 225 - 81 = 144$ und somit $r = 12$.

A36a

Plan

1. Gerade g durch M mit Richtungsvektor $\overrightarrow{n_E}$.
2. Schneide g mit E ergibt zwei Berührungspunkte P_1 und P_2.
3. Punkte müssen auf Ebene mit gegebenen Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ liegen. Das heisst, zwei mal Punkt in Ebenengleichung einsetzen und D in bestimmen.

Durchführung

1. $g : \overrightarrow{OM} + t \cdot \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$
2. Geschnitten mit E ergibt $P_1 = (0, -1, 4)$ und $P_2 = (6, 3, -8)$
3. $-2 - 24 + D = 0$ resp. $18 + 6 + 48 + D = 0$ ergibt $D = 26$ und $D = -72$ und damit $E_1 : 3x + 2y - 6z + 26 = 0$ resp. $E_1 : 3x + 2y - 6z - 72 = 0$

A36a

Plan

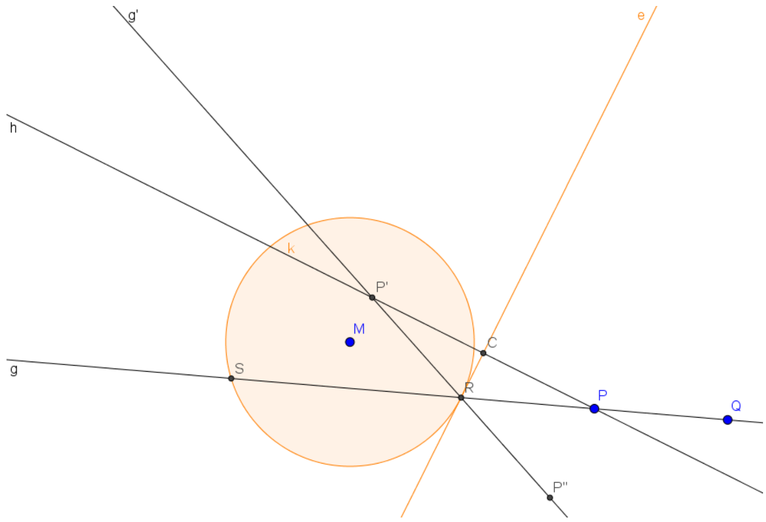
1. Gerade g durch M mit Richtungsvektor $\overrightarrow{n_E}$.
2. Schneide g mit E ergibt zwei Berührungspunkte P_1 und P_2.
3. Punkte müssen auf Ebene mit gegebenen Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ liegen. Das heisst, zwei mal Punkt in Ebenengleichung einsetzen und D in bestimmen.

Durchführung

1. $g : \overrightarrow{OM} + t \cdot \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$
2. g geschnitten mit k ergibt $P_1 = (0, -1, 4)$ und $P_2 = (6, 3, -8)$
3. $-2 - 24 + D = 0$ resp. $18 + 6 + 48 + D = 0$ ergibt $D = 26$ und $D = -72$ und damit $E_1 : 3x + 2y - 6z + 26 = 0$ resp. $E_1 : 3x + 2y - 6z - 72 = 0$

A37

Die Hauptidee hierbei ist wieder, das ganze in einer geeigneten Ansicht zu skizzieren.



Plan

1. Reflexionspunkt berechnen und Tangentialebene E angeben
   (a) Gerade g durch P und Q aufstellen.
   (b) Reflexionspunkt als Schnittpunkt der Geraden g mit der Kugel bestimmen. Bei zwei Schnittpunkten ist der Reflexionspunkt, derjenige Punkt welcher näher an P liegt.
   (c) Der Normalenvektor der Ebene entspricht nun dem Vektor $\overrightarrow{PR}$
   (d) Ebenegleichung mit $\overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{PR}$ und Punkt R bestimmen.
2. Punkt P an E spiegeln
   (a) h als Normalengerade der Ebene E durch P aufstellen.
   (b) Schnittpunkt von h und E ergibt Punkt C.
   (c) Den Punkt P' erhält man nun durch $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PC}$.
3. Gerade des reflektierten Lichtstrahls durch gespiegelten Punkt Reflexionspunkt aufstellen und Winkel der beiden Geraden berechnen
   (a) Gerade g' durch den gespiegelten Punkt P' und Reflexionspunkt R ergibt den gespiegelten Lichtstrahl.
   (b) Winkel kann nun mit dem Skalarprodukt und den beiden Richtungsvektoren der Geraden g und g' berechnet werden.

Durchführung:

1. Reflexionspunkt berechnen und Tangentialebene E angeben
   (a) Es ist $g = \begin{pmatrix} 5 \\ 38 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -16 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) Parametergleichung der Geraden in die Gleichung der Kugel eingesetzt ergibt $(46-16t)^2+(2-2t)^2+(t-7)^2 = 225$. Aufgelöst nach t ergibt sich $t_1 = 2$ und $t_2 = \frac{108}{29}$. Für t_1 ergibt sich $R_1 = (1, 6, -5)$ und für t_2 ergibt sich $R_2 \simeq (-2.45, -21.59, -3.28)$. Weil $|\overrightarrow{PR_2}| < |\overrightarrow{PR_2}|$, ist $R = R_1$ der Reflexionspunkt.

(c) Es ist $\overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{RM} = \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ 5 \end{pmatrix}$

(d) Die Ebenengleichung kann nun wie immer bestimmt werden: Entweder mit auflösen nach D oder mit $D = -\overrightarrow{n_E} \cdot \overrightarrow{OR}$. Es ist dann $D = 107$ und damit $E : 2x - 14y + 5z + 107 = 0$.

2. Punkt P an E spiegeln

   (a) Gerade h durch P mit Richtungsvektor $\overrightarrow{n_E}$ ergibt $h : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 22 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ 5 \end{pmatrix}$

   (b) h eingesetzt in E ergibt $-14(22 - 14t) + 2(2t + 3) + 5(5t - 6) + 107 = 0$ und damit $t = 1$ und damit Punkt $C = (5, 8, -1)$

   (c) Damit ist $\overrightarrow{PC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ 5 \end{pmatrix}$ und damit $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PC} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ ergibt den gespiegelten Punkt $P' = (7; -6; 4)$.

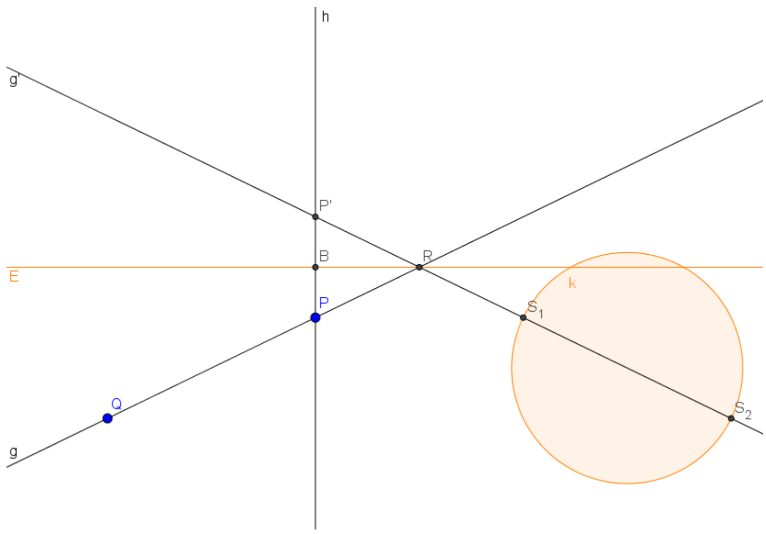
3. Gerade des reflektierten Lichtstrahls durch gespiegelten Punkt Reflexionspunkt aufstellen und Winkel der beiden Geraden berchechnen

   (a) Gerade g' ist $g' : \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 12- \\ 9 \end{pmatrix}$

   (b) Die Richtungsvektoren sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -16 \\ 1 \end{pmatrix}$ für g und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ für g'. Mit $\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ folgt, dass $\alpha \simeq 43.6°$ ist.

A38

Die Hauptidee hierbei ist wieder, das ganze in einer geeigneten Ansicht zu skizzieren.



Plan:

1. Gerade g durch Q und P aufstellen.
2. Gerade g mit xz-Ebene schneiden ergibt R.
3. Punkt P an xz-Ebene spiegeln (Standardvorgehen nachfolgend; ansonsten einfach y Koordinate mit -1 multiplizieren)
   (a) Hilfsgerade h rechtwinklig zur xz-Ebene durch P erstellen
   (b) Hilfsgerade h mit xz-Ebene schneiden ergibt Punkt B
   (c) P' kann nun aus $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PB}$ errechnet werden
4. Gerade g' durch P' und R erstellen.
5. Gerade g' mit Kugel schneiden und den zu R näheren Punkt auswählen.

Durchführung

1. $g : \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$
2. $R = (8, 0, 3)$
3. Punkt P an xz-Ebene spiegeln
   (a) $h : \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   (b) $B = (12, 0, 2)$
   (c) $P' = (12, -2, 2)$
4. $g' : \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$
5. Es gibt zwei Schnittpunkte $S_1 = (4, 2, 4)$ und $S_2 = (-4, 6, 6)$. Weil nun aber $|\overrightarrow{RS_1}| < |\overrightarrow{RS_2}|$ ist, gilt dass $S = S_1 = (4, 2, 4)$ ist.