

1 Theorie

Man definiert den Differenzenquotienten für eine Funktion f (Sekantensteigung, durchschnittliche Änderung) als

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h};$$

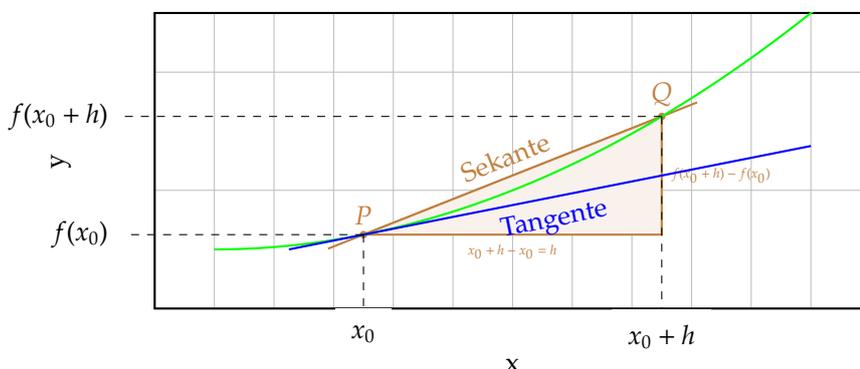
den Differentialquotienten (Tangentensteigung, momentane Änderung) als

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 ist nun der Differentialquotient an dieser Stelle x_0 , also

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Die Ableitung f' einer Funktion ordnet jedem Punkt x die Ableitung $f'(x)$ zu und gibt die Steigung der Tangente im jeweiligen Punkt an.



Die zweite Ableitung wird mit f'' bezeichnet und ist die Ableitung der ersten Ableitung. Die zweite Ableitung f'' gibt Aufschluss über das Krümmungsverhalten (die Änderung der ersten Ableitung) einer Funktion f und damit über Extremalstellen.

Höhere Ableitungen werden mit f''''' oder $f^{(n)}$ (n mal ableiten) bezeichnet.

Ableitungsregeln und Ableitungen wichtiger Funktionen (Matura)

Ableitungsregeln

- (i) Konstantenregel: $c \cdot f(x) \rightarrow c \cdot f'(x)$
- (ii) Summenregel: $f(x) + g(x) \rightarrow f'(x) + g'(x)$
- (iii) Produktregel: $f(x) \cdot g(x) \rightarrow f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- (iv) Kettenregel: $f(g(x)) \rightarrow g'(x) \cdot f'(g(x))$

Ableitung wichtiger Funktionen

- (i) $\sin(x) \rightarrow \cos(x)$
- (ii) $\cos(x) \rightarrow -\sin(x)$
- (iii) $x^\alpha \rightarrow \alpha x^{\alpha-1}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\alpha \neq 0$ (Achtung: $\sqrt{x} = x^{0.5}$)
- (iv) $\ln(x) \rightarrow \frac{1}{x}$
- (v) $e^x \rightarrow e^x$ ($e \approx 2.718281828459045$)
- (vi) $a^x = e^{\ln(a) \cdot x} \rightarrow a^x \cdot \ln(a)$ für $a \neq 0$.
- (vii) $\log_a(x) \rightarrow \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$

(i) bis (iv) sind Pflicht für die Matura ohne Hilfsmittel.

Funktionsuntersuchung

Es gelten folgende lokale Eigenschaften

- $f'(x_0) = 0$ notwendige Bedingung für Extrema oder Sattelpunkte.
- $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$: f hat in x_0 ein lokales Maximum (hinreichende Bedingung).
- $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$: f hat in x_0 ein lokales Minimum (hinreichende Bedingung).
- $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$: f hat in x_0 eine Sattelstelle (hinreichende Bedingung).
- $f''(x) > 0$: Linksgekrümmt in x_0
- $f''(x) < 0$: Rechtsgekrümmt in x_0
- $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$: x_0 ist eine Wendestelle (hinreichende Bedingung).

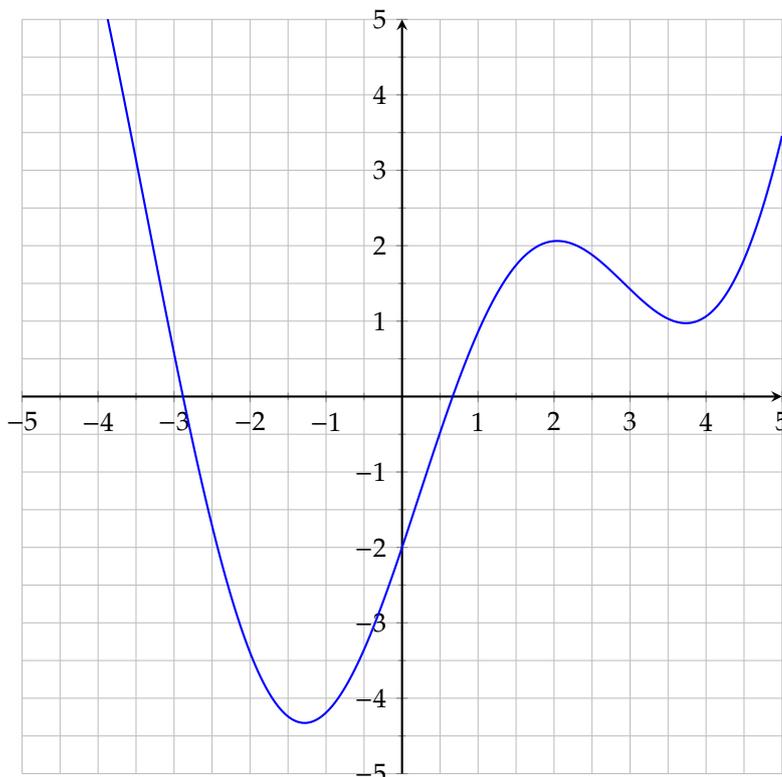
2 Aufgaben

1. Grundlagen: Differenzenquotienten und Differentialquotienten

- Gib den Differenzenquotienten von $f(x) = (x - 3)^4$ an der Stelle $x_0 = 2$ und für die allgemeine Stelle x_0 an.
- Berechne den Differentialquotienten im Punkt $x_0 = 2$ und für einen allgemeinen Punkt x_0 mit dem Differentialquotienten.
- Überprüfe deine Rechnung in der vorangehenden Aufgabe in dem du die Funktion f' angibst und den Wert an der Stelle $x_0 = 2$ resp. x_0 mit deinen Resultaten vergleichst.

2. Tangenten und Steigung

- Bestimme die Steigung der Tangente an der Stelle $x_0 = -2$ und $x_0 = 2$ im untenstehenden Graphen mit Messen:



- Kennzeichne Hoch-, Tief-, Sattel- und Wendepunkte (HOP, TIP, WEP, SAP).
- Wo ist die erste Ableitung positiv? Wo negativ? In welchen Bereichen ist die zweite Ableitung positiv/negativ?
- Die Funktion oben ist $f(x) = 3 \cdot \sin(x) + \frac{x^2}{3} - 2$. Kontrolliere deine Berechnung (Messung) indem du f' berechnest und dann $f'(-2)$ und $f'(2)$ mit deinen Resultaten vergleichst.

3. Steigung und Schnittwinkel

- Bestimme die Gleichung der Tangente der Funktion $f(x) = x^2 - 2x$ an der Stelle $x = 3$.
- Bestimme den Schnittpunkt und den (spitzen!) Schnittwinkel von f mit der Funktion $g(x) = 6 - x$.

4. Berechne die erste Ableitung der Funktionen

- $f(x) = 7x^9 - 3x^2$
- $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{x^2}{2}$
- $f(x) = \sin(x^2) - c \cdot x^2$
- $f(r) = e^{\cos(r)} + x^2$
- $f(x) = 3 \cdot (2x - 9)^8$

(f) $f(x) = x^3 \cdot \sqrt{x} + \sin(x) \cdot \cos(x)$

(g) $f(x) = 10x^{10}$, berechne die 22. Ableitung, $f^{(22)}$.

(h) $f(x) = x^{20}$, berechne $f^{(11)}$ (nutze die Definition von $n!$ um die Ableitung kompakt zu schreiben)

5. Bestimme die Extremalstellen (Minima, Maxima, Sattelpunkte) und Wendestelle von folgenden Funktionen. Achtung Winkelfunktionen in Bogenmass!

(a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 1$

(b) $f(x) = \sin(4x)$

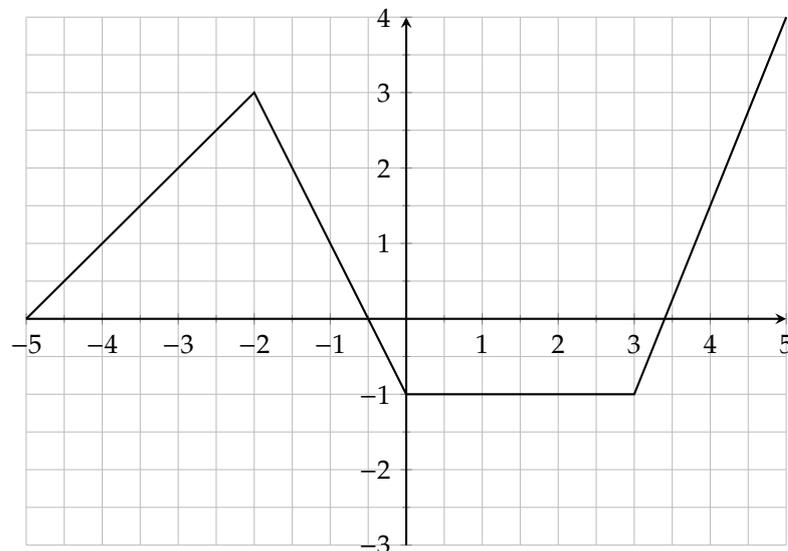
(c) $f(x) = x^6 - x^2$

(d) $f(x) = x^4$

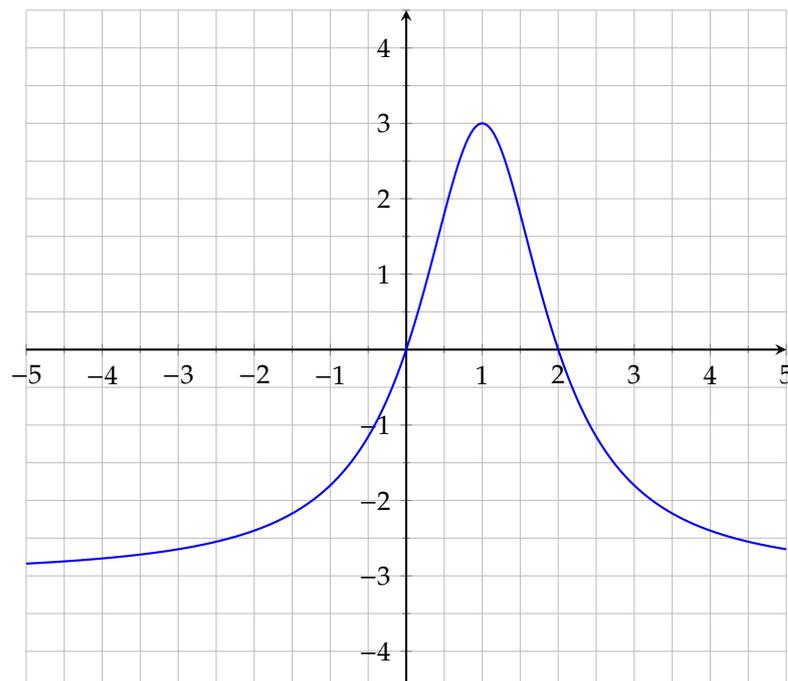
(e) $f(x) = \cos(x^2) + 3x$

6. Ableitungen graphisch zeichnen

(a) Zeichne die Ableitung (exakt) der nachfolgenden Funktion ins gleiche Koordinatensystem



(b) Skizziere die Ableitung der nachfolgenden Funktion.



- (c) Zeichne eine Funktion im Bereich $[-3.5, 3.5]$, die folgendes erfüllt: $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f'(-2) = -1$ und $f(-3) = 3$. Die Funktion soll symmetrisch zur y -Achse sein.

7. Löse die folgenden Aufgaben. Extremalstellen können auch durch geeignetes Begründen bestimmt werden.

- (a) Eine 400m Laufbahn in einem Stadion besteht aus zwei parallelen Strecken und zwei angesetzten Halbkreisen. Für welchen Radius r der Halbkreise wird die Rechteckige Spielfläche maximal? Vergleiche die Masse mit einem realen Fussballfeld (internationale Standardmasse).
- (b) Der Eingang zu Frederiks Reich ist in der Form einer Parabel begrenzt durch die x -Achse. Die Parabel ist durch $f(x) = 6 - \frac{1}{4}x^2$ gegeben. Frederik möchte maximal viel Käse bestellen und sucht also das Paket dessen Querschnitt maximale Fläche hat. Die Querschnitte aller Pakete sind Rechtecke. Wie ist der Querschnitt zu wählen? Gib die Breite und Höhe eines solchen Pakets an.
- (c) Einem Patienten wird zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Medikament verabreicht. Die Funktion

$$f(t) = \frac{3}{50}t^3 - \frac{9}{10}t^2 + \frac{5}{2}t + \frac{33}{5}$$

gibt die Konzentration des Medikaments im Blut an [Milliliter pro Liter Blut] nach t Stunden an.

- a) Wann ist das Medikament komplett abgebaut? b) Wann ist die Konzentration am höchsten?
c) Nebenwirkungen treten üblicherweise dann auf, wenn sich die Konzentration am stärksten verändert. Wann ist mit Nebenwirkungen zu rechnen? d) Der Patient ist ein Schwingerkönig und hat 8 Liter Blut. Wie viel Milligramm des Medikaments hat der Schwingerkönig im Blut?
e) Gib eine Interpretation des Differenzen- sowie des Differentialquotienten in diesem Beispiel an.
- (d) Frederik wechselt den Käseanbieter und zieht auch noch um. Der neue Anbieter versendet Würfel-förmige Boxen mit Kantenlänge 5. Frederik baut sich einen neuen Eingang in Form eines gleichschenkligen Dreiecks (die Grundlinie sei wiederum auf der x -Achse). Wie ist der Winkel an der Basis zu wählen, so dass Frederik eine möglichst kurze Distanz sägen muss?

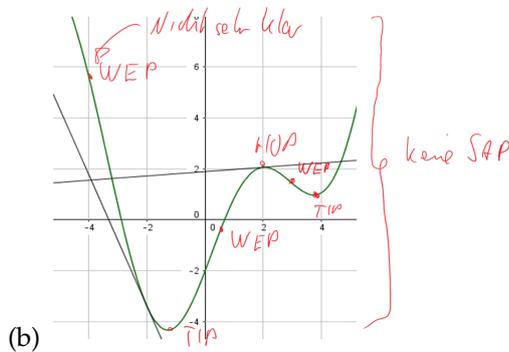
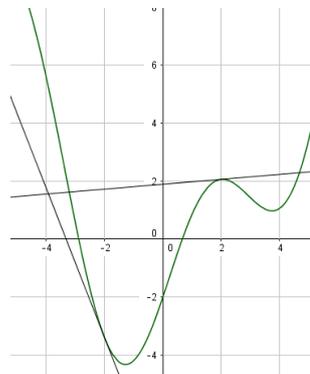
3 Lösungen

1. Grundlagen: Differenzenquotienten und Differentialquotienten. Hier spielt das Pascal'sche Dreieck eine grosse Rolle um $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ ausrechnen zu können.

- (a) Es ist $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h-3)^4 - (2-3)^4}{h} = \frac{h^4 - 4h^3 + 6h^2 - 4h}{h} = h^3 - 4h^2 + 6h - 4$ und $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{h^4 + 4x_0h^3 - 12h^3 + 6x_0^2h^2 - 36x_0h^2 + 54h^2 + 4x_0^3h - 36x_0^2h + 108x_0h - 108h}{h} = h^3 + 4x_0h^2 - 12h^2 + 6x_0^2h - 36x_0h + 54h + 4x_0^3 - 36x_0^2 + 108x_0 - 108$
- (b) Es ist $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = -4$ und $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 4x_0^3 - 36x_0^2 + 108x_0 - 108$
- (c) Es ist $f'(x) = 4(x - 3)^3 = 4x^3 - 36x^2 + 108x - 108$ und damit $f'(2) = -4$ und $f'(x_0) = 4x_0^3 - 36x_0^2 + 108x_0 - 108$.

2. Tangenten und Steigung

(a) Tangenten einzeichnen und Steigung («rise-over-run») berechnen.



- (c) f' ist positiv auf (ca.) $]-1.28, 2.04[$, $]3.73, 5]$ auf den restlichen Intervallen ist f' negativ. f'' ist positiv (f ist linksgekrümmt) auf $]-3.37, 0.22[$, $]2.92, 5]$. Auf den restlichen Intervallen ist f'' negativ, also f ist rechtsgekrümmt.
- (d) Es ist $f'(x) = \frac{2x}{3} + 3 \cos(x)$ und damit $f'(2) \approx 0.085$ und $f'(-2) \approx -2.58$.

3. Steigung und Schnittwinkel

- (a) Es ist $f'(x) = 2x - 2$. Für die Gleichung der Tangente muss also gelten $y = mx + q$ mit $m = f'(2) = 4$. Es ist $(x, y) = (3, f(3)) = (3, 3)$. Nach q auflösen ergibt $q = -9$ und damit $y = 4x - 9$
- (b) Plan:
 - i. Schnittpunkt berechnen
 - ii. Tangenten der beiden Funktionen berechnen
 - iii. Winkel der beiden Tangenten berechnen

Durchführung:

- i. Schnittpunkt ergibt sich durch Auflösen von $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x = 6 - x$. Man findet also $x_1 = 3$ und $x_2 = -2$ und damit für den Schnittpunkt (siehe vorige Aufgabe) $P_1 = (3, 3)$ resp. $P_2(-2, 8)$

- ii. Für P_1 kennen wir die Tangente bereits aus a): $y = 4x - 9$. Für P_2 ergibt sich in gleicher Manier $y = -6x + 4$. Für die zweite Funktion g muss die Tangente nicht berechnet werden, da es sich um eine Gerade handelt.
- iii. Den Winkel können wir entweder via Formel Fundamentum oder Vektorgeometrie (Zwischenwinkel von $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ (für P_1) resp. $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ (für P_2) und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$) berechnet werden. Es folgt $\alpha = 59.04^\circ$ (für P_1) resp. $\alpha = 35.54^\circ$ (für P_2).

4. Dabei geht es um das korrekte Anwenden der Ableitungsregeln und das Verknüpfen von mehreren Regeln.

- (a) $f'(x) = 63x^8 - 6x$
 (b) $f'(x) = x^3 - x^2 + x$
 (c) $f'(x) = 2x \cos(x^2) - 2cx$
 (d) $f'(r) = -e^{\cos(r)} \sin(r)$
 (e) $f'(x) = 48(2x - 9)^7$
 (f) $f(x) = \frac{7}{2}x^{5/2} + \cos^2(x) - \sin^2(x)$
 (g) $f^{(22)}(x) = 0$
 (h) $f^{(11)}(x) = \frac{20!}{9!}x^9 = 6704425728000x^9$

5. Bestimme die Extremalstellen (Minima, Maxima, Sattelstellen) und Wendestellen von folgenden Funktionen. Achtung Winkelfunktionen in Bogenmass!

Plan:

I HOP/TIP/SAP

1. Nullstellen der ersten Ableitung suchen → Kandidatenstellen
2. Zweite Ableitung an Kandidatenstellen betrachten und entscheiden ob HOP/TIP/SAP

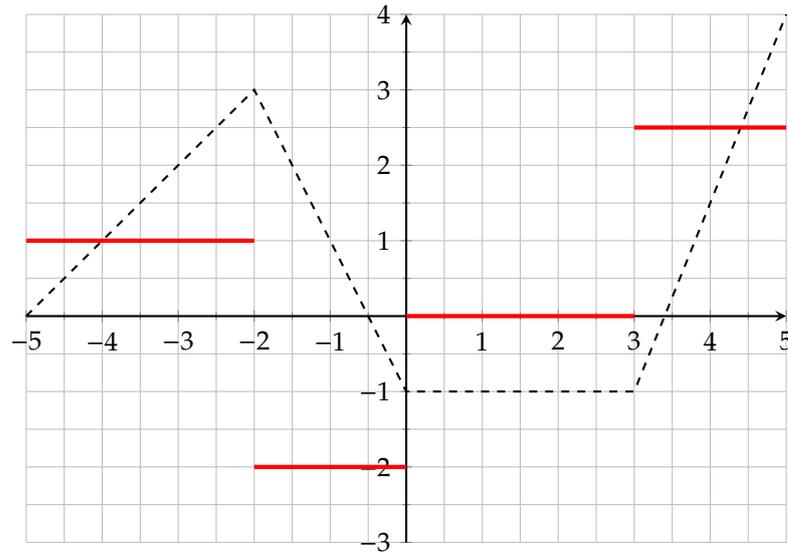
II WEP

1. Nullstellen der zweiten Ableitung suchen → Kandidatenstellen
2. Dritte Ableitung an Kandidatenstellen betrachten und WEP oder nicht.

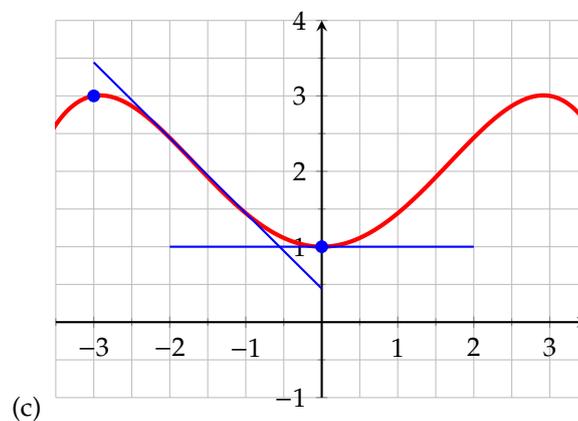
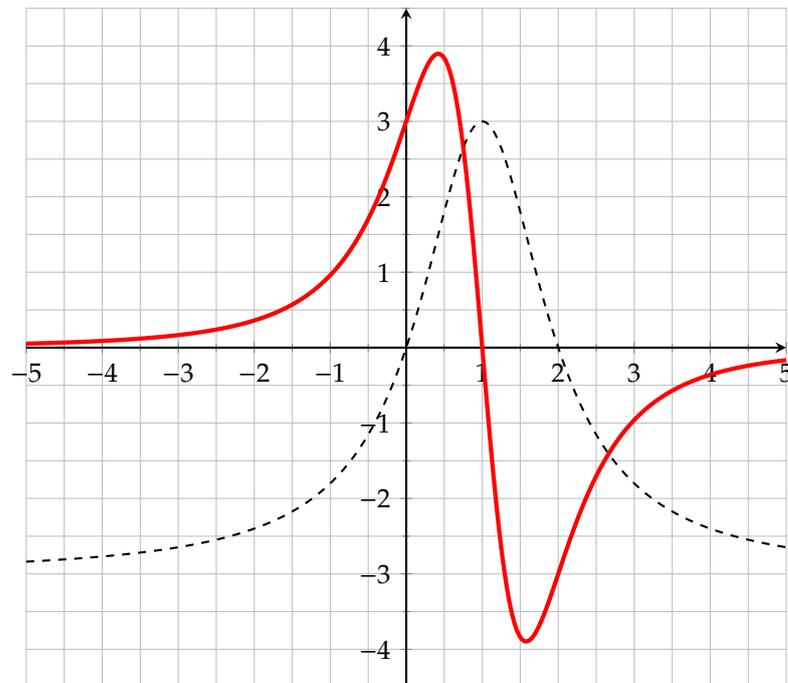
- (a) HOP bei $(-1.46, 7.01)$, TIP bei $(0.46, -0.01)$ und WEP bei $(-0.5, 3.5)$
 (b) HOP bei $(\frac{\pi}{8} + \mathbb{Z} \cdot \frac{\pi}{2}, 1)$, TIP bei $(-\frac{\pi}{8} + \mathbb{Z} \cdot \frac{\pi}{2}, -1)$ und WEP bei $(\frac{\pi}{2} \cdot \mathbb{Z}, 0)$
 Die Schreibweise « $\mathbb{Z} \cdot x$ » steht für beliebige ganzzahlige Vielfache von x ; da trigonometrische Funktionen periodisch sind, haben sie unendlich viele Minima resp. Maxima resp. Wendepunkte. Um diese kompakt zu schreiben, verwendet man eben die genannte Schreibweise.
 (c) TIP bei $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{4})$ und bei $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{4})$, HOP bei $(0, 0)$
 (d) TIP bei $(0, 0)$. Achtung: Es ist kein Sattelpunkt.
 (e) Die Funktion hat keine geschlossene Lösung für HOP, TIP und WEPs. Zur Hilfe könnte der Taschenrechner genommen werden.

6. Ableitungen graphisch zeichnen

- (a) Wichtig: Exakte Ableitung berechnen (durch Messen resp. Ablesung der Abschnitte der Geradensteigungen)



(b) Wichtig: Die Funktion ist symmetrisch zur Achse $x = 1$, also ist die Ableitung punktsymmetrisch zu $(1, 0)$.



(c)

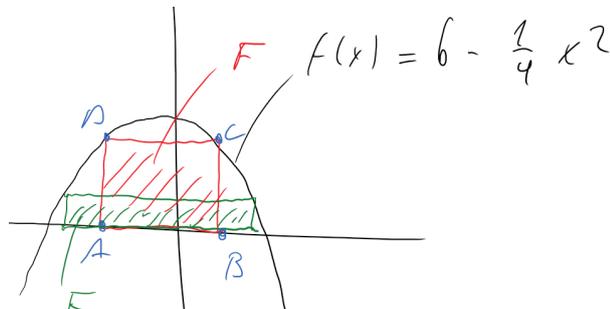
7. **Plan** für alle Aufgaben:

1. Problem verstehen (z.B. Skizze machen)

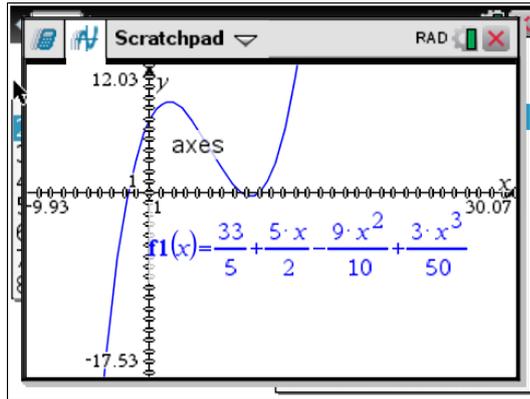
- i. Nebenbedingungen festlegen (wo nötig)
 - ii. Zielfunktion und Variable identifizieren und mathematisch formulieren
 - 2. Zielfunktion minimieren/maximieren
 - i. Zielfunktion ableiten
 - ii. Ableitung = 0 setzen und nach Variable auflösen
 - 3. Überprüfen ob Minimum / Maximum gefunden
 - 4. Frage beantworten.
- (a) 1. Skizze (siehe <https://goo.gl/maps/NWoBwDPfnkq>):



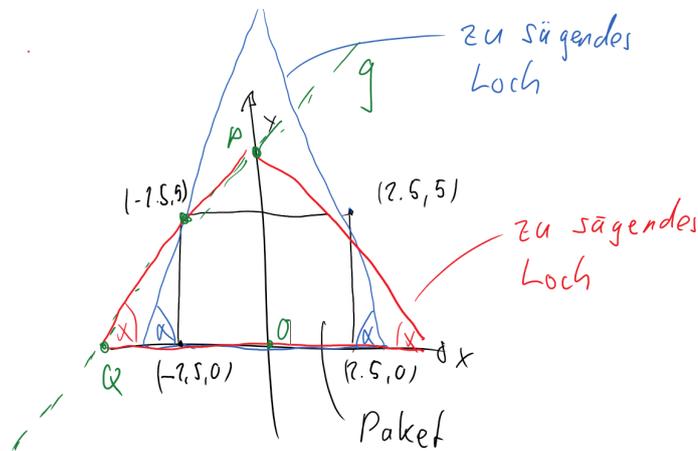
- i. Der Gesamtumfang muss 400 betragen und besteht aus den Halbkreisen (Umfang beider Halbkreise zusammen: $2\pi r$) und den parallelen Strecken x . Weil $2x + 2\pi r = 400$ sein muss, muss für $x = 200 - \pi r$ gelten.
 - ii. Die Fläche ist gegeben durch $x \cdot 2r = (200 - \pi r) \cdot 2r$. Damit ist $f(r) = (200 - \pi r) \cdot 2r$ die Zielfunktion.
 - 2. i. Es ist $f'(r) = 2(200 - \pi r) - 2\pi r$.
 - ii. Auflösen nach r ergibt $r^* = \frac{100}{\pi} \approx 31.831$
 - 3. Es muss ein Maximum sein. Es kann kein Minimum sein, da die minimale Fläche des Fußballfelds 0 wäre.
 - 4. Das Feld hat also die Masse $2r \times (200 - \pi r) \approx 63.662 \times 100$. Die internationalen Masse betragen für die Breite 64 m bis 75 m und für die Länge 100 m bis 110 m
- (b) 1. Wir suchen also ein Rechteck, dessen Ecken auf der Parabel resp. der x -Achse liegen und maximale Fläche hat. In der Skizze unten sind zwei Varianten (rot und grün) eingezeichnet.



- Man sucht nun also diese Variante, welche maximale Fläche hat. Wählt man für $B = (x, 0)$ so ergibt sich für $A = (-x, 0)$, für $C = (x, f(x))$ und für $D = (-x, f(-x))$ als Koordinaten und wir suchen x so, dass die Fläche $F = |AB| \cdot |BC|$ maximal ist. Es ist $|AB| = 2x$ und $|BC| = f(x) = 6 - \frac{1}{4}x^2$ und damit $F = 2x \cdot (6 - \frac{1}{4}x^2)$
- i.
 - ii. Die Zielfunktion ist die Fläche in Abhängigkeit von x also $g(x) = 2x \cdot (6 - \frac{1}{4}x^2)$
 - 2. i. Es ist $g'(x) = 2(6 - \frac{x^2}{4}) - x^2$
 - ii. Als Lösung ergibt sich $x = \pm 2\sqrt{2} \approx \pm 2.8284$. Die beiden Lösungen sind äquivalent, da nur die Rollen von A und B vertauscht sind.
 - 3. Es muss sich um ein Maximum handeln; ein Minimum hätte Fläche 0.
 - 4. Das Paket hat also die Dimensionen $B \times H = 2 \cdot 2\sqrt{2} \times f(2\sqrt{2}) \approx 5.6568 \times 4$
- (c) Funktion mit TR plotten.



- i. Nullstelle der Funktion $f(t)$ suchen; es ergibt sich $t = 7.54385$ als erste Nullstelle.
 - ii. Nullstellen der Ableitung bei $t_1 = \frac{5}{3}$ und $t_2 = \frac{25}{3}$. Es ist $f''(\frac{5}{3}) = -\frac{6}{5}$ und $f''(\frac{25}{3}) = \frac{6}{5}$. Damit ist $t_1 = \frac{5}{3}$ eine Maximalstelle. Die Konzentration ist also zum Zeitpunkt $t = \frac{5}{3}$ am höchsten.
 - iii. Die Veränderung der Konzentration ist durch f' gegeben. Wir suchen also Maximalstellen von f' . Nennen wir nun $g = f'$ so können wir g' auf Nullstellen untersuchen und g'' auf das Vorzeichen, um festzustellen, wo das Maximum resp. Minimum von g (der Veränderung der Konzentration) ist. $g'(x) = 0$ aufgelöst nach x ergibt $x = 5$. $g''(5) = \frac{9}{25}$. Das heisst, bei $t = 5$ hat g ein Minimum, resp. die Konzentration verändert sich am *schwächsten*. Zeichnet man g resp. f' ergibt sich der höchste Wert (zwischen $[0, 7.54385]$) bei $t = 0$. Das heisst, bei der Gabe des Medikaments zum Zeitpunkt $t = 0$ ist mit Nebenwirkungen zu rechnen.
 - iv. Die Menge in Milligramm des Medikaments ergibt sich aus Konzentration \cdot Blutmenge, also $h(t) = 8 \cdot f(t) = \frac{12t^3}{25} - \frac{36t^2}{5} + 20t + \frac{264}{5}$.
 - v. Der Differenzenquotient ist die durchschnittliche Veränderung der Konzentration; der Differentialquotient gibt die momentane Änderung der Konzentration an.
- (d) 1. Eine Skizze ist dabei zentral.



Wir haben ein Quadrat mit den Ecken $(-2.5, 0)$, $(2.5, 0)$, $(2.5, 5)$, $(-2.5, 5)$ gegeben (schwarz) und suchen das Dreieck (blau oder rot), welches minimalen Umfang hat. Die Idee dabei ist eine Gerade g durch die Punkte P und $(-2.5, 5)$ zu legen. Dann können wir den Schnittpunkt Q dieser Geraden mit der x -Achse ausrechnen. Der Umfang des Dreiecks ist dann $2(|PQ| + |OQ|)$. Wählen wir $P = (0, h)$ können wir die restlichen Punkte in Abhängigkeit von h ausdrücken.

- Gerade durch P und $(-2.5, 5)$: Ansatz $y = mx + q$ und $(0, h)$ sowie $(-2.5, 5)$ einsetzen und m und q berechnen ergibt: $y = (\frac{2(h-5)}{5})x + h$. Die Nullstelle dieser Geraden ist $x_0 = -\frac{5h}{2(h-5)}$ und damit $Q = (-\frac{5h}{2(h-5)}, 0)$.
- Es ist dann $|OP| = \frac{5h}{2(h-5)}$ und $|PQ| = \sqrt{(\frac{5h}{2(h-5)})^2 + h^2}$ (mit Pythagoras).
- i. Nebenbedingungen sind bereits integriert in der Berechnung von g .
- ii. Es ist $f(h) = 2(|PQ| + |OQ|) = 2(\frac{5h}{2(h-5)} + \sqrt{\frac{25h^2}{4(h-5)^2} + h^2})$.

- 2. Zielfunktion minimieren/maximieren

- i. Die Ableitung ist sehr kompliziert. Es empfiehlt sich, direkt mit dem TR `solve(fp(h)=0,h)` zu berechnen.

The screenshot shows a TI-84 Plus calculator Scratchpad window with the following content:

$$f(h) := 2 \cdot \left(\frac{5 \cdot h}{2 \cdot (-5+h)} + \sqrt{h^2 + \frac{25 \cdot h^2}{4 \cdot (-5+h)^2}} \right)$$

Done

$$fp(h) := \frac{d}{dh}(f(h))$$

Done

$$\text{solve}(fp(h)=0,h)$$

- ii. Es ergibt sich $h_1 = 2.84504$ und $h_2 = 9.58772$.
3. h_1 ist keine zulässige Lösung, da $h_1 < 5$, d.h., das Paket passt nicht durch. $h_2 = 9.58772$ muss ein Minimum sein, da für wachsendes h der Umfang zunimmt.
4. Wir kennen nun h , allerdings den Winkel α noch nicht. Wir wissen aber, dass $\tan(\alpha) = \frac{|OQ|}{|PO|} = \frac{h}{\frac{5h}{2(h-5)}}$. Setzt man $h = 9.58772$ in diesen Bruch ein, erhält man $\tan(\alpha) = 1.83509$ und damit $\alpha \approx \tan^{-1}(1.83509) \approx 61.4126^\circ$.