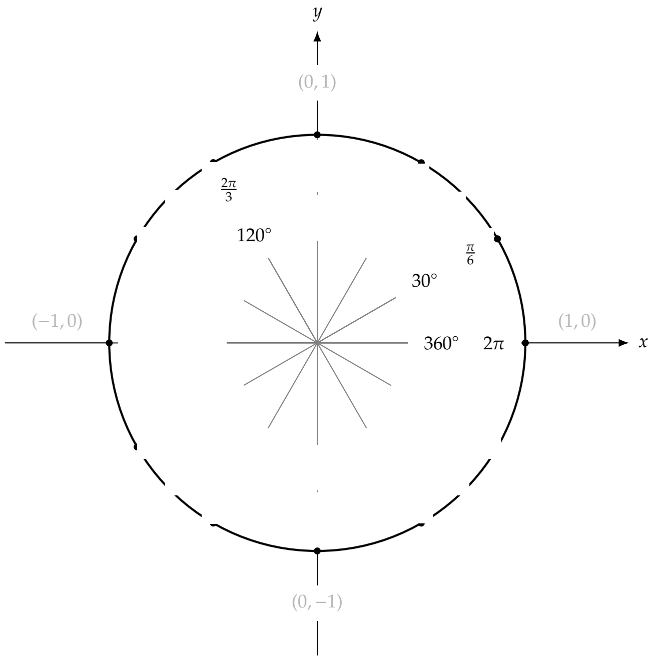
Repetitionsaufgaben Trigonometrie – Teil 1

Aufgabe 1 Alle berechneten Resultate sind auf 4 signifikante Stellen zu runden.

1. Mit Hilfe einer Handskizze, ohne Taschenrechner, schätzen Sie die Sinus-, Cosinus- und Tangenswerte vom Winkel 290° ab.
2. Mit Hilfe einer Handskizze, ohne Taschenrechner, schätzen Sie $\arccos(-0.2)$, $\arcsin(-0.2)$ und $\arctan(-2)$ ab.
3. Mit Hilfe einer Handskizze und einigen Stichwörtern, zeigen Sie, welche der folgenden Gleichungen richtig und welche falsch sind:

$$\sin(\alpha) = \cos(\alpha + 90^\circ) \qquad \sin(\alpha + 90^\circ) = \cos(\alpha) \qquad \tan(-\alpha) = \tan(\alpha) \qquad \tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$

4. Beschrifte die fehlenden Winkel unten in Grad un Bogenmass wie am unten am Beispiel von 30°, 120°360° illustriert.

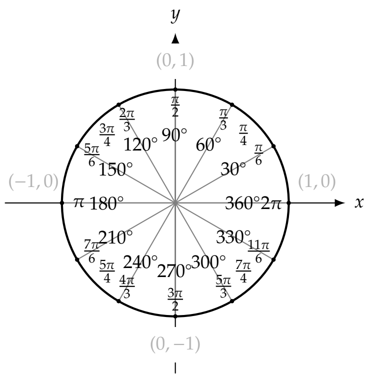


5. Eine Rampe für Rollstuhlfahrer sollte nicht mehr als 3.5° geneigt sein. Wie lange wird eine solche Rampe, um einen Höhenunterschied von 50 cm zu überwinden?
6. Wie gross ist der Diagonalenschnittwinkel in einem Rechteck, das doppelt so lang wie breit ist?
7. Von einem unbekannten Winkel α wissen wir, dass $\tan(\alpha) = 2$. Welche Werte kommen für $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ in Frage?
8. Berechne die fehlenden Grössen des rechtwinkligen Dreiecks ABC mit den bekannten Seiten $a = 7$ und $b = 3$.
9. Von einem Rhombus (gleichseitiges Parallelogramm) kennt man die Seitenlänge $s = 10$ und die Diagonalenlänge $e = 15$. Berechnen Sie die Länge der anderen Diagonalen sowie die Grössen der Innenwinkel.
10. Wie gross ist der Winkel zwischen einer Würfelfläche und einer Körperdiagonalen?
11. Gib die konventionellen Definitions- und Wertebereiche von cos, sin und tan, so dass diese umkehrbar sind. Gib ebenfalls die Definitions- und Wertebereiche ihrer Arcusfunktionen an.
12. Meteosat-9, ein geostationärer Satellit, steht knapp 36’000 km über dem Äquator. Dieser Satellit hat fast die gleiche Länge wie St. Gallen, nämlich 9.4° Ost. Wie hoch (als Winkel angegeben) über dem Horizont steht der Satellit, wenn man weiss, dass St. Gallen auf 47.5° nördlicher Breite liegt und der Erdradius ca. 6370 km beträgt?

14.1 Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1 ex-trigo-repe

1. Schätzung mit dem TR überprüfen.
2. Siehe a).
3. Erste Gleichung ist falsch (könnte mit einem negativen Vorzeichen auf einer Seite korrigiert werden). Zweite Gleichung ist richtig (die Phase[1] vom cos ist 90°. Die dritte ist falsch, die Steigung ändert das Vorzeichen, wenn man an der x-Achse spiegelt. Die vierte ist somit richtig.
4. Wichtig dabei ist Umrechnungsformel $x \mapsto \frac{x}{180°}\pi$ (Grad nach Bogenmass) resp. $y \mapsto \frac{y}{\pi}180°$ (Bogenmass nach Grad).



5. Wenn l die Länge ist (Hypotenuse), dann gilt $\sin(3.5°) = \frac{0.5}{l}$ und damit $l = \frac{0.5}{\sin(3.5°)} \approx 8.190$. Die Rampe müsste also knapp 8.2 m lang sein.
6. Der Schnittwinkel ist doppelt so gross, wie der kleine Winkel im Dreieck, das eine Diagonale aus dem Rechteck bildet. Daraus folgt $\alpha = 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 53.13°$.
7. Der Winkel α ist entweder $\arctan(2) \approx 63.43°$ oder $\arctan(2) + 180° \approx 243.43°$. Daraus ergeben sich die ungefähren Sinus- und Cosinuswerte von entweder 0.8944 und 0.4472 oder −0.8944 und −0.4472.

   Als alternativen Lösungsweg könnte man auch mit zwei Unbekannten $y = \sin(\alpha)$ und $x = \cos(\alpha)$ folgendes System lösen: $x^2 + y^2 = 1$ und $\frac{y}{x} = 2$ und erhält die exakten Lösungen $y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ und $x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.
8. Es ist $\alpha = \arctan(\frac{7}{3}) \approx 66.80°$, $\beta = \arctan(\frac{3}{7}) \approx 23.20°$ und $c = \sqrt{a^2 + b^2} \approx 7.616$.
9. Machen Sie ein gute Skizze und stellen Sie fest, dass sich die Diagonalen rechtwinklig schneiden. Damit ergibt sich die andere Diagonale mit Hilfe des Satzes von Pythagoras: $f = 2\sqrt{s^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2} \approx 13.23$.

   Für den Winkel α gilt: $\cos(\alpha) = \frac{\frac{e}{2}}{s}$ und damit $\alpha = \arccos\left(\frac{\frac{e}{2}}{s}\right) \approx 41.41°$. Daraus egibt sich $\beta = 180° - \alpha \approx 138.6°$.
10. Im Würfel drin kann ein rechtwinkliges Stützdreieck gezeichnet werden, mit Katheten Seitenlänge s und Flächendiagonalen $\sqrt{2} \cdot s$. Damit ist $\tan(\varepsilon) = \frac{s}{\sqrt{2} \cdot s} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Und somit ist $\varepsilon = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 35.26°$.
11. $\mathbb{D}_{\sin} = [-\pi/2, \pi/2]$, $\mathbb{W}_{\sin} = [-1, 1]$, $\mathbb{D}_{\cos} = [0, \pi]$, $\mathbb{W}_{\cos} = [-1, 1]$, $\mathbb{D}_{\tan} = [-\pi/2, \pi/2]$, $\mathbb{W}_{\tan} = \mathbb{R}$. Für die Arcusfunktionen arcsin, arccos und arctan sin die Bereiche vertauscht.

[1] Der Begriff «Phase» ist noch nicht bekannt, heisst aber, dass der cos dem sin um diesen Winkel «hinterher» ist

12. Gesucht ist der Winkel δ. Dazu wird erst der Winkel $\angle M\,SG\,S$ berechnet, für welchen zuerst $\sigma = \angle M\,S\,SG$ (sigma, griechisches «s») berechnet wird. Es gilt $\tan(\sigma) = \frac{y}{36000+3670-x}$. Wobei $y = \sin(47.5°) \cdot 6370$ und $y = \cos(47.5°) \cdot 6370$. Daraus ergibt sich $\sigma = \arctan\left(\frac{y}{36000+3670-x}\right) \approx 7.033°$. Damit ist $\angle M\,SG\,S = 180° - 47.5° - \sigma \approx 125.5°$. Und somit ist $\delta = \angle M\,SG\,S - 90° \approx 35.47°$.