

GARBENTHEORIE

OLAF M. SCHNÜRER

INHALTSVERZEICHNIS

1. Čech-Kohomologie	2
1.1. Erste Čech-Kohomologie und n -blättrige Überlagerungen (bei fixierter offener Überdeckung)	2
1.1.1. Aufgabenpool: Nachträge zu adjungierten Funktoren	7
1.1.2. Aufgabenpool: Äquivalenzen und adjungierte Funktoren	11
1.2. Limiten und Kolimiten	11
1.2.1. Diagramme	12
1.2.2. Limiten	13
1.2.3. Kolimiten	19
1.2.4. Diverse Aufgaben zu Limiten und Kolimiten	29
1.2.5. Gruppenobjekte und warum gewisse Vergissfunktoren mit Limiten bzw. filtrierenden Kolimiten kommutieren	30
1.3. Erste Čech-Kohomologie und n -blättrige Überlagerungen	32
1.4. Erste Čech-Kohomologie und Vektorbündel	34
1.5. Erste Čech-Kohomologie und Torsoren	35
1.6. Prägarben	41
1.7. Höhere Čech-Kohomologie	44
1.8. Nullte und erste Čech-Kohomologie	47
1.9. Berechnung der Čech-Kohomologie bezüglich einer fixierten offenen Überdeckung	49
2. Garben	56
2.1. Halme von Prägarben	56
2.2. Definition und erste Beispiele von Garben	58
2.3. Garben und Halme	60
2.4. Garben von Mengen und étale Räume	61
2.5. Garben von abelschen Gruppen und abelsche Gruppenobjekte étaler Räume	67
2.6. Garbifizierung	68
2.7. Limiten und Kolimiten von Garben	70
2.8. Direktes und inverses Bild von Garben	73
2.9. Mono- und Epimorphismen	80
2.10. Kerne und Kokerne in Kategorien	83
2.11. Präabelsche Kategorien	86
2.12. Additive und abelsche Kategorien	89
2.13. Träger von Garben und von Schnitten	93
2.14. Ausdehnung durch Null	94
2.15. Garben abelscher Gruppen als Grothendieck-Kategorie	100
2.16. Tensorprodukt und Hom-Garbe	102
3. Garbenkohomologie	108
3.1. Injektive (und projektive) Garben	108
3.2. Hauptlemma der homologischen Algebra	113

Datum: 29. Januar 2023.

Skript zur Vorlesung *Garbentheorie* im Sommersemester 2021 an der Universität Paderborn.

Ich halte mich eng an das Skript [Soe21]. Johanna Jakob, Carsten Hecht, Daniel Kahl und Alexis Chasiotis haben dankenswerterweise zu Verbesserungen des Skripts beigetragen. (Falls jemand hier nicht namentlich erscheinen möchte, bitte melden.)

3.3. Rechtsderivierte Funktoren	115
3.4. Definition der Garbenkohomologie	119
3.5. Derivieren mit azyklischen Auflösungen	121
4. Berechnung von Garbenkohomologie	123
4.1. Welche Garben	123
4.2. Garbenkohomologie der reellen Zahlengeraden	126
4.3. Zurückholen in der Garbenkohomologie	128
4.4. Homotopie-Invarianz der Garbenkohomologie	131
4.5. Ein Spektralsequenzargument	136
4.6. Garbenkohomologie und Čech-Kohomologie bezüglich offener Überdeckung	137
5. Vergleichssätze	140
5.1. Hom-Komplex und Dualität	140
5.2. Garbenkohomologie und singuläre Kohomologie	143
Literatur	153

1. ČECH-KOHOMOLOGIE

1.1. Erste Čech-Kohomologie und n -blättrige Überlagerungen (bei fixierter offener Überdeckung).

1.1.1. Obwohl einige Leser sicherlich den Begriff der Überlagerung kennen, wiederholen wir die Definition einer n -blättrigen Überlagerung. Für den Begriff eines Morphismus von Überlagerungen ist es auch sinnvoll, an den Begriff der Kategorie über einem Objekt zu erinnern (vgl. [Sch20, Definitionen 4.1.2 und 4.3.3, 4.3.4]).

Definition 1.1.2. Seien \mathcal{C} eine Kategorie und $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt. Die **Kategorie der Objekte von \mathcal{C} über X** ist die folgende Kategorie $\mathcal{C}_{/X}$: Sie hat

- als Objekte Morphismen $a: A \rightarrow X$, wobei wir damit genauer ein Paar (A, a) , bestehend aus einem Objekt $A \in \mathcal{C}$ und einem Morphismus $a: A \rightarrow X$ meinen, in Formeln

$$\text{Obj}(\mathcal{C}_{/X}) = \{(A, a) : A \in \mathcal{C}, a \in \mathcal{C}(A, X)\}$$

und

- als Morphismen von einem Objekt $A \xrightarrow{a} X$ in ein Objekt $B \xrightarrow{b} X$ all diejenigen Morphismen $f: A \rightarrow B$ in \mathcal{C} , für die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow a & \swarrow b \\ & X & \end{array}$$

kommutiert, in Formeln

$$\mathcal{C}_{/X}(A \xrightarrow{a} X, B \xrightarrow{b} X) = \mathcal{C}_{/X}((A, a), (B, b)) = \mathcal{C}_{/X}(A, B) = \mathcal{C}_{/X}(a, b) = \{f \in \mathcal{C}(A, B) \mid b \circ f = a\}$$

und

- als Verknüpfung die von \mathcal{C} induzierte Verknüpfung.

Ähnlich definiert man die als $\mathcal{C}_{X/}$ notierte **Kategorie der Objekte von \mathcal{C} unter X** . Objekte sind Morphismen $a: X \rightarrow A$, Morphismenmengen sind durch $\mathcal{C}_{X/}(A, B) = \{f \in \mathcal{C}(A, B) \mid f \circ a = b\}$ gegeben.

Beispiel 1.1.3. Es gibt offensichtliche Vergissfunktoren $\mathcal{C}_{/X} \rightarrow \mathcal{C}$ und $\mathcal{C}_{X/} \rightarrow \mathcal{C}$.

Beispiel 1.1.4. Die Kategorie $\text{Top}_{\{*\}}/$ aller topologischen Räume unter dem einpunktigen Raum $\{*\}$ ist die in [Sch20, Beispiele A.1.5.(d).(ii)] definierte Kategorie punktierter topologischer Räume, die wir dort als Top_* notiert haben (genauer ist der Funktor, der $a: \{*\} \rightarrow A$ auf $(A, a(*))$ abbildet, ein Isomorphismus von Kategorien).

Analog ist $\text{Set}_{\{*\}}/$ die **Kategorie punktierter Mengen**.

Definition 1.1.5. Seien X ein topologischer Raum und $n \in \mathbb{N}$. Eine n -blättrige **Überlagerung** ist eine stetige Abbildung¹ $p: \tilde{X} \rightarrow X$, für die es eine offene Überdeckung $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von X gibt, so dass für jedes $U \in \mathcal{U}$ ein Homöomorphismus

$$t_U: p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times \{1, \dots, n\}$$

existiert, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow[t_U]{\sim} & U \times \{1, \dots, n\} \\ p \downarrow & & \downarrow \text{pr}_U \\ U & = & U \end{array}$$

kommutativ macht. Gegeben eine offene Überdeckung \mathcal{U} , nennt man eine Familie $(t_U)_{U \in \mathcal{U}}$ solcher Homöomorphismen eine **Trivialisierung von p über der offenen Überdeckung \mathcal{U}** .

Die **Kategorie der n -blättrigen Überlagerungen** ist die volle Unterkategorie von Top/X , deren Objekte die n -blättrigen Überlagerungen von X sind. Morphismen in dieser Unterkategorie heißen **Morphismen von n -blättrigen Überlagerungen**. Insbesondere liefert dies den Begriff eines Isomorphismus von n -blättrigen Überlagerungen.

1.1.6. Jeder Morphismus n -blättriger Überlagerungen ist offen (siehe [Sch20, 4.3.11]). Somit ist ein Morphismus n -blättriger Überlagerungen genau dann ein Isomorphismus, wenn er bijektiv ist.

1.1.7. Unser Ziel in diesem Abschnitt ist eine Beschreibung aller n -blättrigen Überlagerungen eines topologischen Raums X bis auf Isomorphie. Wir orientieren uns dabei an dem folgenden Diagramm offensichtlicher Abbildungen, wobei \mathcal{U} eine fixierte offene Überdeckung von X ist.

$$\left\{ \begin{array}{l} n\text{-blättrige Überlagerungen} \\ \text{von } X \text{ zusammen mit einer} \\ \text{Trivialisierung über } \mathcal{U} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n\text{-blättrige Überlagerungen} \\ \text{von } X, \text{ die eine} \\ \text{Trivialisierung über } \mathcal{U} \text{ haben} \end{array} \right\} \hookrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n\text{-blättrige} \\ \text{Überlagerungen von } X \end{array} \right\}$$

Links stehen also über \mathcal{U} trivialiserte, in der Mitte über \mathcal{U} trivialisierbare und rechts n -blättrige Überlagerungen (die möglicherweise nicht über \mathcal{U} , sondern erst über einer „feineren“ offenen Überdeckung trivialisierbar sind).

Von links startend, werden wir diese drei Mengen bis auf geeignete Isomorphiebegriffe mit Mengen gewisser Čech-1-Kozykel bezüglich \mathcal{U} , Čech-1-Kohomologieklassen bezüglich \mathcal{U} und Čech-1-Kohomologieklassen identifizieren (siehe Propositionen 1.1.20 und 1.1.24, Satz 1.3.5).

1.1.8. Sei $(t_U)_{U \in \mathcal{U}}$ eine Trivialisierung einer n -blättrigen Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ über einer offenen Überdeckung \mathcal{U} von X . Für alle $U, V \in \mathcal{U}$ ist die Verknüpfung

$$U \cap V \times \{1, \dots, n\} \xrightarrow[t_U]{(t_V)^{-1}} p^{-1}(U \cap V) \xrightarrow[t_V]{\sim} U \cap V \times \{1, \dots, n\}$$

ein Automorphismus der trivialen n -blättrigen Überlagerung von $U \cap V$ und somit nach Aufgabe 1.1.9 von der Form

$$(x, f) \mapsto (x, \tau_{UV}(x)(f))$$

für eine eindeutige stetige Abbildung $\tau_{UV} = \tau_{U,V}: U \cap V \rightarrow S_n$, wobei S_n die mit der diskreten Topologie versehene Gruppe der Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ ist. Die Abbildung τ_{UV} heißt **Verklebungsfunktion**. Für alle $U, V, W \in \mathcal{U}$ gilt dann offensichtlich

$$\tau_{UV}(x) \circ \tau_{VW}(x) = \tau_{UW}(x) \quad \text{für alle } x \in U \cap V \cap W$$

oder kurz

$$\tau_{UV} \circ \tau_{VW} = \tau_{UW},$$

wobei \circ hier die Verknüpfung in der Gruppe $\text{Top}(U \cap V \cap W, S_n)$ ist (die offensichtliche Gruppenstruktur ist in 1.1.14 erläutert).

¹Hier ist implizit mitverstanden, dass \tilde{X} ein topologischer Raum ist, denn nur dann ist der Begriff *stetig* sinnvoll.

Aufgabe 1.1.9 (Automorphismen der trivialen n -blättrigen Überlagerung). Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei S_n mit der diskreten Topologie versehen. Sei $\text{pr}_X: X \times \{1, \dots, n\} \rightarrow X$ die triviale n -blättrige Überlagerung eines topologischen Raums X . Dann ist die wie folgt wohldefinierte Abbildung eine Bijektion

$$(1.1.1) \quad \begin{aligned} \text{Top}(X, S_n) &\xrightarrow{\sim} \text{Aut}_{\text{Top}/X}(\text{pr}_X, \text{pr}_X), \\ \tau &\mapsto \left(\tilde{\tau}: (x, f) \mapsto (x, \tau(x)(f)) \right) \end{aligned}$$

von Mengen und genauer ein Isomorphismus von Gruppen.

Bonus: Wie ist die linke Seite zu modifizieren, wenn man rechts den oberen Index \times weglässt, also alle Endomorphismen der trivialen n -blättrigen Überlagerung beschreiben möchte?

Definition 1.1.10. Eine **topologische Gruppe** ist eine Gruppe G mit einer Topologie, so dass Verknüpfung $G \times G \rightarrow G$ und Inversenbildung $G \rightarrow G$ stetig sind. Ein Morphismus topologischer Gruppen $G \rightarrow H$ ist eine stetige Abbildung $G \rightarrow H$, die ein Gruppenmorphismus ist.²

Beispiel 1.1.11. Die Determinante $\det: \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^\times$ ist ein Morphismus topologischer Gruppen. Die Inklusion $\text{SL}_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ ist ein Morphismus topologischer Gruppen.

Beispiel 1.1.12. Ist G eine (abstrakte) Gruppe, so ist G zusammen mit der diskreten Topologie eine topologische Gruppe G^{disc} . Topologische Gruppen mit diskreter Topologie nennt man auch **diskrete (topologische) Gruppen**. Abstrakte Gruppen und diskrete Gruppen sind „dasselbe“.³

Beispiel 1.1.13. Ist X ein beliebiger topologischer Raum, so ist $X^{\text{disc}} \rightarrow X$ eine stetige Abbildung, wobei X^{disc} die Menge X mit der diskreten Topologie ist. Analog haben wir für jede topologische Gruppe G einen Morphismus $G^{\text{disc}} \rightarrow G$ topologischer Gruppen.

1.1.14. Ist G eine topologische Gruppe mit Verknüpfung $*$, so ist für jeden topologischen Raum X die Menge $\text{Top}(X, G)$ aller stetigen Abbildungen $X \rightarrow G$ mit punktweiser Verknüpfung $(f * g)(x) := f(x) * g(x)$ eine Gruppe, wobei $f, g \in \text{Top}(X, G)$. Alternativ formuliert ist die Verknüpfung von f und g die stetige Komposition

$$f * g: X \times X \xrightarrow{f \times g} G \times G \xrightarrow{*} G.$$

Definition 1.1.15. Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ eine offene Überdeckung von X und G eine topologische Gruppe mit Verknüpfung $*$. Ein G -wertiger **Čech-1-Kozykel bezüglich \mathcal{U}** ist eine Familie

$$\tau = (\tau_{UV})_{U, V \in \mathcal{U}}$$

stetiger Abbildungen $\tau_{UV}: U \cap V \rightarrow G$, so dass für alle $U, V, W \in \mathcal{U}$

$$\tau_{UV} * \tau_{VW} = \tau_{UW}$$

in $\text{Top}(U \cap V \cap W, G)$ gilt. Die Menge all solcher **Čech-1-Kozykel** wird als

$$\check{Z}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)$$

notiert. Der Buchstabe \mathcal{C} steht hier für englisch *continuous* oder französisch *continu* (die Notation wird später mehr Sinn ergeben, sobald die (Prä-)Garbe \mathcal{C}_G definiert ist).

Ist G eine diskrete topologische Gruppe, so schreiben wir oft abkürzend

$$\check{Z}^1(\mathcal{U}; G) := \check{Z}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G).$$

1.1.16. Ist $\tau = (\tau_{UV})_{U, V \in \mathcal{U}}$ wie eben ein 1-Kozykel, so gelten $\tau_{UU} = 1_G$ und $\tau_{UV} = \tau_{VU}^{-1}$ für alle $U, V \in \mathcal{U}$, wobei 1_G die konstante Funktion $U \rightarrow G$ bezeichnet, die jedes Element von U auf das neutrale Element $1_G \in G$ abbildet. Der einfache Beweis ist dem Leser überlassen.

²Für die kategoriell Interessierten: Eine topologische Gruppe ist ein Gruppenobjekt in der Kategorie Top (siehe 1.2.70 oder [nLa21, group object] oder [Wik20, Gruppenobjekt]).

³Die genaue Aussage ist: Sei $\text{Grp}(\text{Top})$ die Kategorie der topologischen Gruppen. Dann induziert der Funktor $\text{Grp} \rightarrow \text{Grp}(\text{Top}), G \mapsto G^{\text{disc}}$, einen Isomorphismus von Kategorien zwischen Grp und der vollen Unterkategorie von $\text{Grp}(\text{Top})$, deren Objekte die diskreten Gruppen sind.

1.1.17. Die Menge $\check{Z}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)$ besitzt ein ausgezeichnetes Element, den trivialen Čech-1-Kozykel $1_G = (1_G)_{U, V \in \mathcal{U}}$, ist also eine punktierte Menge (aber im Allgemeinen keine Gruppe). Ist G abelsch, so ist $\check{Z}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)$ in offensichtlicher Weise eine abelsche Gruppe.

Beispiel 1.1.18. Die Verklebungsfunktionen einer Trivialisierung einer n -blättrigen Überlagerung über einer offenen Überdeckung bilden einen S_n -wertigen Čech-1-Kozykel. Anders ausgedrückt: Fixieren wir einen topologischen Raum X , eine offene Überdeckung \mathcal{U} von X und $n \in \mathbb{N}$, so ist die in 1.1.8 beschriebene Zuordnung eine Abbildung

$$(1.1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} n\text{-blättrige Überlagerungen von } X \\ \text{mit einer Trivialisierung über } \mathcal{U} \end{array} \right\} \rightarrow \check{Z}^1(\mathcal{U}; S_n),$$

$$(\tilde{X} \xrightarrow{p} X, (t_U)_{U \in \mathcal{U}}) \mapsto (\tau_{UV})_{U, V \in \mathcal{U}}.$$

Definition 1.1.19. Seien X ein topologischer Raum, \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X und $n \in \mathbb{N}$. Seien zwei Paare $(\tilde{X} \xrightarrow{p} X, (t_U)_{U \in \mathcal{U}})$ und $(\hat{X} \xrightarrow{q} X, (s_U)_{U \in \mathcal{U}})$ gegeben, die jeweils aus einer n -blättrigen Überlagerung und einer Trivialisierung über \mathcal{U} bestehen. Ein Isomorphismus $f: \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$ von n -blättrigen Überlagerungen heißt **trivialisierungsverträglich**, falls $s_U \circ f = t_U$ für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt. Gibt es einen solchen, so heißen unsere beiden Paare **trivialisierungsverträglich isomorph**; dies definiert offensichtlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller solchen Paare.

Proposition 1.1.20. Seien X ein topologischer Raum, \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X und $n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung (1.1.2) induziert eine Bijektion

$$\frac{\left\{ \begin{array}{l} n\text{-blättrige Überlagerungen von } X \\ \text{mit einer Trivialisierung über } \mathcal{U} \end{array} \right\}}{\text{trivialisierungsverträgliche Isomorphie}} \xrightarrow{\sim} \check{Z}^1(\mathcal{U}; S_n)$$

punktierter Mengen, wobei das ausgezeichnete Element links die Klasse der trivialen Überlagerung $X \times \{1, \dots, n\} \rightarrow X$ sei; es entspricht dem trivialen Čech-1-Kozykel rechts.

Beweis. Der Begriff *trivialisierungsverträglich isomorph* ist so definiert, dass die Abbildung wohldefiniert ist. Ebenso ist klar, dass die triviale Überlagerung auf den trivialen Čech-1-Kozykel geht.

Injektivität: Seien $(\tilde{X} \xrightarrow{p} X, (t_U)_{U \in \mathcal{U}})$ und $(\hat{X} \xrightarrow{q} X, (s_U)_{U \in \mathcal{U}})$ Paare, bestehend aus einer n -blättrigen Überlagerung und einer Trivialisierung über \mathcal{U} , und seien $(\tau_{UV})_{U, V \in \mathcal{U}}$ und $(\sigma_{UV})_{U, V \in \mathcal{U}}$ die zugeordneten 1-Kozykel. Gelte $\tau_{UV} = \sigma_{UV}$ für alle $U, V \in \mathcal{U}$.

Für jedes $U \in \mathcal{U}$ betrachte die Verknüpfung

$$f_U: p^{-1}(U) \xrightarrow{t_U} U \times \{1, \dots, n\} \xrightarrow{(s_U)^{-1}} q^{-1}(U) \subset \hat{X}.$$

Alle f_U sind stetig. Für alle $U, V \in \mathcal{U}$ stimmen f_U und f_V wegen $\tau_{UV} = \sigma_{UV}$ auf $p^{-1}(U) \cap p^{-1}(V) = p^{-1}(U \cap V)$ überein. Deswegen gibt es genau eine Abbildung $f: \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$ mit $f|_{p^{-1}(U)} = f_U$ für alle $U \in \mathcal{U}$. Diese ist stetig nach [Sch20, Proposition 2.4.13.(a)]. Sie ist offensichtlich ein Morphismus von n -blättrigen Überlagerungen. Analog konstruiert man einen solchen Morphismus in die andere Richtung und sieht so, dass f ein Isomorphismus von n -blättrigen Überlagerungen ist. Nach Konstruktion ist er trivialisierungsverträglich. Dies zeigt die Injektivität unserer Abbildung.

Surjektivität: Sei $\tau = (\tau_{UV})_{U, V \in \mathcal{U}} \in \check{Z}^1(\mathcal{U}; S_n)$ ein 1-Kozykel. Betrachte auf dem topologischen Raum⁴

$$\bigsqcup_{U \in \mathcal{U}} \{U\} \times U \times \{1, \dots, n\}$$

die durch

$$(U, x, s) \sim (V, y, t) : \iff (x = y \text{ und } t = \tau_{UV}(x)(s))$$

⁴Die einelementigen Mengen $\{U\}$ werden hier zur besseren Unterscheidung der an der disjunkten Vereinigung beteiligten Mengen verwendet.

definierte Äquivalenzrelation \sim (sie ist nach 1.1.16 wohldefiniert). Die stetigen Projektionen $\{U\} \times U \times \{1, \dots, n\} \rightarrow U$, $(U, x, s) \mapsto x$, induzieren eine stetige Abbildung

$$p: \tilde{X} := \frac{\bigsqcup_{U \in \mathcal{U}} \{U\} \times U \times \{1, \dots, n\}}{\sim} \rightarrow X.$$

Der Leser prüft leicht, dass für jedes $U \in \mathcal{U}$

$$\begin{aligned} U \times \{1, \dots, n\} &\rightarrow \tilde{X}, \\ (u, s) &\mapsto (\{U\}, u, s), \end{aligned}$$

eine offene Einbettung mit Bild $p^{-1}(U)$ ist. Sei t_U die Umkehrabbildung des induzierten Homöomorphismus $U \times \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} p^{-1}(U)$. Wir folgern, dass p eine n -blättrige Überlagerung mit Trivialisierung $(t_U)_{U \in \mathcal{U}}$ über \mathcal{U} ist. Nach Konstruktion ist klar, dass die zugeordneten Verklebungsfunktionen genau die τ_{UV} des vorgegebenen 1-Kozykels sind. Dies zeigt die Surjektivität. \square

Ende der 1. Vorlesung am 13.04.2021.

1.1.21. Sei X ein topologischer Raum mit einer offenen Überdeckung \mathcal{U} . Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine n -blättrige Überlagerung, die über \mathcal{U} trivialisierbar ist. Seien $(t_U)_{U \in \mathcal{U}}$ und $(s_U)_{U \in \mathcal{U}}$ zwei Trivialisierungen und $\tau, \sigma \in \check{Z}^1(\mathcal{U}, S_n)$ die zugehörigen 1-Kozykel.

Für jedes $U \in \mathcal{U}$ gibt es nach der Bijektion (1.1.1) in Aufgabe 1.1.9 genau eine stetige Abbildung $\alpha_U: U \rightarrow S_n$, genannt **Übergangsfunktion**, so dass die Verknüpfung

$$U \times \{1, \dots, n\} \xrightarrow[\sim]{(t_U)^{-1}} p^{-1}(U) \xrightarrow[\sim]{s_U} U \times \{1, \dots, n\}$$

durch

$$(x, f) \mapsto (x, \alpha_U(x)(f))$$

gegeben ist. Offensichtlich gilt dann

$$\sigma_{UV} \circ \alpha_V = \alpha_U \circ \tau_{UV}$$

in $\text{Top}(U \cap V, S_n)$ für alle $U, V \in \mathcal{U}$.

Definition 1.1.22. Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ eine offene Überdeckung von X und G eine topologische Gruppe mit Verknüpfung $*$. Zwei G -wertige Čech-1-Kozykel $\tau, \sigma \in \check{Z}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)$ bezüglich \mathcal{U} heißen **kohomolog**, notiert $\tau \sim \sigma$, falls es eine Familie

$$\alpha = (\alpha_U)_{U \in \mathcal{U}}$$

stetiger Abbildungen $\alpha_U: U \rightarrow G$ gibt, so dass für alle $U, V \in \mathcal{U}$

$$\sigma_{UV} = \alpha_U \circ \tau_{UV} \circ (\alpha_V)^{-1}$$

in $\text{Top}(U \cap V, G)$ gilt. Kohomolog-Sein ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation. Die Menge der Äquivalenzklassen wird als

$$\check{H}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G) := \frac{\check{Z}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)}{\sim}$$

notiert und heißt **erste Čech-Kohomologie bezüglich \mathcal{U} und G** . Die Klasse eines G -wertigen Čech-1-Kozykels τ heißt seine Kohomologiekategorie und wird als $[\tau]$ notiert. Ist G eine diskrete topologische Gruppe, so schreiben wir oft abkürzend

$$\check{H}^1(\mathcal{U}; G) := \check{H}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G).$$

1.1.23. Die Čech-Kohomologie $\check{H}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)$ ist eine Menge mit einem ausgezeichnetem Element, nämlich der Klasse $[1_G]$ des trivialen 1-Kozykels. Ist G abelsch, so ist \sim mit der Gruppenstruktur auf $\check{Z}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)$ kompatibel und $\check{H}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)$ ist eine abelsche Gruppe.

Proposition 1.1.24. Seien X ein topologischer Raum, \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X und $n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung (1.1.2) induziert eine Bijektion

$$(1.1.3) \quad \frac{\left\{ \begin{array}{l} n\text{-blättrige Überlagerungen von } X, \\ \text{die über } \mathcal{U} \text{ trivialisierbar sind} \end{array} \right\}}{\text{Isomorphie}} \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(\mathcal{U}; S_n)$$

Die Klasse der trivialen Überlagerung $X \times \{1, \dots, n\} \rightarrow X$ links entspricht der Klasse des trivialen Čech-1-Kozykels rechts.

Beweis. Sei $f: \tilde{X} \xrightarrow{\sim} \hat{X}$ ein Isomorphismus von über \mathcal{U} trivialisierbaren Überlagerungen. Seien $t = (t_U)_{U \in \mathcal{U}}$ eine Trivialisierung von \tilde{X} und $(s_U)_{U \in \mathcal{U}}$ eine Trivialisierung von \hat{X} . Dann ist auch $\tilde{s} := (\tilde{s}_U)_{U \in \mathcal{U}} := (s_U \circ f)_{U \in \mathcal{U}}$ eine Trivialisierung von \tilde{X} . Seien τ, σ und $\tilde{\sigma}$ die zugehörigen 1-Kozykel. Nach der Diskussion in 1.1.21 sind τ und $\tilde{\sigma}$ kohomolog, und offensichtlich gilt $\sigma = \tilde{\sigma}$. Also ist unsere Abbildung wohldefiniert.

Sie ist surjektiv nach Proposition 1.1.20 und bildet die Klasse der trivialen Überlagerung auf die Klasse des trivialen Čech-1-Kozykels ab.

Injektivität: Seien $p: \tilde{X} \rightarrow X$ und $q: \hat{X} \rightarrow X$ Überlagerungen. Sei $t = (t_U)_{U \in \mathcal{U}}$ eine Trivialisierung von \tilde{X} mit zugeordnetem 1-Kozykel τ . Sei $s = (s_U)_{U \in \mathcal{U}}$ eine Trivialisierung von \hat{X} mit zugeordnetem 1-Kozykel σ . Gelte $[\tau] = [\sigma]$, d. h. es gibt eine Familie $\alpha = (\alpha_U)_{U \in \mathcal{U}}$ stetiger Abbildungen $\alpha_U: U \rightarrow G$ mit

$$\sigma_{UV} \circ \alpha_V = \alpha_U \circ \tau_{UV}$$

für alle $U, V \in \mathcal{U}$.

Für $U \in \mathcal{U}$ betrachte die stetige Verknüpfung

$$f_U: p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times \{1, \dots, n\} \xrightarrow[\sim]{(x, f) \mapsto (x, \alpha_U(x)(f))} U \times \{1, \dots, n\} \xrightarrow[\sim]{(s_U)^{-1}} q^{-1}(U) \subset \hat{X}.$$

Weil f_U und f_V auf $p^{-1}(U \cap V)$ übereinstimmen, wie der Leser leicht prüft, kommen sie von einer eindeutigen stetigen Abbildungen $f: \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$, die genauer ein Morphismus von Überlagerungen ist. Durch analoge Konstruktion der Umkehrabbildung sieht man, dass sie ein Isomorphismus ist. Dies zeigt die Injektivität. \square

1.1.25. Ist \mathcal{U} eine offene Überdeckung eines topologischen Raums X , so sind manchmal alle n -blättrigen Überlagerungen (oder sogar alle Überlagerungen) über \mathcal{U} trivialisierbar – dann kann man auf der linken Seite der Bijektion (1.1.3) die Bedingung „die über \mathcal{U} trivialisierbar sind“ weglassen und erreicht so unmittelbar das in 1.1.7 erklärte Ziel; dies ist sicher dann der Fall, wenn jede Überlagerung jeder offenen Menge $U \in \mathcal{U}$ trivial ist; in der Praxis ist dies durchaus oft der Fall, siehe [Sch20, 4.4.11]. Beispielsweise erfüllt die übliche Überdeckung der Kreislinie \mathbb{S}^1 durch zwei offene Mengen diese Bedingung.

Aufgabe 1.1.26. Für $X = \mathbb{S}^1$ mit der üblichen offenen Überdeckung $\mathcal{U} = \{U, V\}$ beschreibe $\check{Z}^1(\mathcal{U}; S_n)$ und $\check{H}^1(\mathcal{U}; S_n)$. **nachträglich eingefügt: Zeige, dass $\check{H}^1(\mathcal{U}; S_n)$ zur Menge der Konjugationsklassen in S_n isomorph ist.**

Berechne diese Mengen explizit für $n = 2$ und $n = 3$. **nachträglich eingefügt: Welcher Isomorphieklasse n -blättriger Überlagerungen entspricht welche Konjugationsklasse? Bemerkung: Nach 1.1.25 sind damit alle n -blättrigen Überlagerungen bis auf Isomorphie klassifiziert.**

1.1.27. Unser nächstes Ziel ist Satz 1.3.5. Dazu benötigen wir den Begriff des filtrierenden Kolimes und diskutieren deswegen in Abschnitt 1.2 Limiten und Kolimiten.

1.1.28. Die beiden folgenden Aufgabenpools enthalten einige wohlbekannt Aussagen über Adjunktionen und Äquivalenzen, die wir später verwenden möchten. Sicher sind sie einigen Lesern wohlbekannt, aber eine Auffrischung schadet selten. Die anderen müssen eben etwas mehr arbeiten.

1.1.1. *Aufgabenpool: Nachträge zu adjungierten Funktoren.*

1.1.29. Ziel dieses Abschnitts ist, mit einer Folge von Aufgaben zu zeigen, dass die beiden Definitionen [Sch20, Definition 5.3.11] und [Sch21, Definition A.0.17] einer Adjunktion äquivalent sind, siehe 1.1.35 für die Zusammenfassung. Außerdem werden einige weitere nützliche Eigenschaften von Adjunktionen besprochen.

Aufgabe 1.1.30. Seien L und R Funktoren zwischen Kategorien \mathcal{C} und \mathcal{D} wie im folgenden Diagramm angedeutet.

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ \mathcal{C} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} & \mathcal{D} \\ & R & \\ & 7 & \end{array}$$

(a) Sei

$$\alpha: \mathcal{D}(L-, -) \Rightarrow \mathcal{C}(-, R-)$$

eine natürliche Transformation von Funktoren $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}$.⁵ Für $C \in \mathcal{C}$ definiere

$$\hat{\alpha}_C := \alpha_{C, LC}(\text{id}_{LC}): C \rightarrow RLC.$$

Zeige, dass $\hat{\alpha} := (\hat{\alpha}_C)_{C \in \mathcal{C}}: \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow RL$ eine natürliche Transformation ist.

Hinweis: Verwende das Diagramm in Fußnote 5 für geschickte Wahlen von Objekten und Morphismen.

(b) Sei $\eta: \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow RL$ eine natürliche Transformation. Für $C \in \mathcal{C}$ und $D \in \mathcal{D}$ sei $\tilde{\eta}_{C,D}$ die Verknüpfung

$$\tilde{\eta}_{C,D}: \mathcal{D}(LC, D) \xrightarrow{R} \mathcal{C}(RLC, RD) \xrightarrow{? \circ \eta_C} \mathcal{C}(C, RD).$$

Zeige, dass $\tilde{\eta} := (\tilde{\eta}_{C,D})_{(C,D) \in \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D}}: \mathcal{D}(L-, -) \Rightarrow \mathcal{C}(-, R-)$ eine natürliche Transformation ist.

(c) Zeige, dass die Zuordnung $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$ eine Bijektion

$$(1.1.4) \quad \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D}}(\mathcal{D}(L-, -), \mathcal{C}(-, R-)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\mathcal{C}}(\text{id}_{\mathcal{C}}, RL)$$

mit Inversem $\eta \mapsto \tilde{\eta}$ definiert.

1.1.31 (zu Aufgabe 1.1.30; Berechnung von α aus η). Entspricht unter der Bijektion (1.1.4) ein α links einem η rechts, so ist das Diagramm

$$(1.1.5) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(LC, D) & \xrightarrow{R} & \mathcal{C}(RLC, RD) \\ & \searrow \alpha_{C,D} & \downarrow ? \circ \eta_C \\ & & \mathcal{C}(C, RD) \end{array}$$

für alle $C \in \mathcal{C}$ und $D \in \mathcal{D}$ kommutativ. Dies ist klar nach der zitierten Aufgabe.

Aufgabe 1.1.32. Seien $L: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $R: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ Funktoren wie in Aufgabe 1.1.30. Zeige, dass

$$(1.1.6) \quad \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D}}(\mathcal{C}(-, R-), \mathcal{D}(L-, -)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^{\mathcal{D}}(LR, \text{id}_{\mathcal{D}}),$$

$$\beta \mapsto \check{\beta} = \beta^{\vee} \text{ mit } \check{\beta}_D = \beta_D^{\vee} = \beta_{RD, D}(\text{id}_{RD}) \text{ für } D \in \mathcal{D},$$

eine Bijektion ist.

Hinweis: Variiere Aufgabe 1.1.30.

1.1.33 (zu Aufgabe 1.1.32; Berechnung von β aus ε). Entspricht unter der Bijektion (1.1.6) ein β links einem $\varepsilon: LR \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ rechts, so kommutiert das Diagramm

$$(1.1.7) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(LC, D) & & \\ \varepsilon_D \circ ? \uparrow & \swarrow \beta_{C,D} & \\ \mathcal{C}(LC, LRD) & \xleftarrow{L} & \mathcal{C}(C, RD) \end{array}$$

für alle $C \in \mathcal{C}$ und $D \in \mathcal{D}$. Dies ist klar nach der zitierten Aufgabe.

Aufgabe 1.1.34. Seien $L: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $R: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ Funktoren wie in Aufgabe 1.1.30.

⁵ Explizit bedeutet dies, dass für alle Morphismen $c: C' \rightarrow C$ in \mathcal{C} und $d: D \rightarrow D'$ in \mathcal{D} (oder äquivalent alle Morphismen $(c^{\text{op}}, d): (C^{\text{op}}, D) \rightarrow (C'^{\text{op}}, D')$ in $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D}$) das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(LC, D) & \xrightarrow{\alpha_{C,D}} & \mathcal{C}(C, RD) \\ f \mapsto d \circ f \circ Lc \downarrow & & g \mapsto Rd \circ g \circ oc \downarrow \\ \mathcal{D}(LC', D') & \xrightarrow{\alpha_{C', D'}} & \mathcal{C}(C', RD') \end{array}$$

kommutativ ist, dass also

$$\alpha(d \circ f \circ Lc) = Rd \circ \alpha(f) \circ c$$

für alle Morphismen $f: LC \rightarrow D$ gilt.

(a) Sei eine Isotransformation

$$\alpha: \mathcal{D}(L-, -) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(-, R-)$$

gegeben, also eine Adjunktion zwischen L und R im Sinne von [Sch21, Definition A.0.17]. Setze $\eta := \hat{\alpha}$ und $\varepsilon := (\alpha^{-1})^\vee$ in der Notation der Aufgaben 1.1.30 und 1.1.32; man nennt η die **Eins** und ε die **Koeins** der Adjunktion α . Dann sind die beiden Diagramme

$$(1.1.8) \quad \begin{array}{ccc} LC & \xrightarrow{L\eta_C} & LRLC \\ & \searrow \text{id}_{LC} & \downarrow \varepsilon_{LC} \\ & & LC \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} RD & \xrightarrow{\eta_{RD}} & RLRD \\ & \searrow \text{id}_{RD} & \downarrow R\varepsilon_D \\ & & RD \end{array}$$

für alle $C \in \mathcal{C}$ und alle $D \in \mathcal{D}$ kommutativ; man nennt diese kommutativen Diagramme bzw. äquivalent die Gleichheiten $\varepsilon_L \circ L\eta = L$ und $R\varepsilon \circ \eta R = R$ **Dreiecksidentitäten**.

- (b) Seien natürliche Transformationen $\eta: \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow RL$ und $\varepsilon: LR \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ gegeben. Seien $\alpha: \mathcal{D}(L-, -) \Rightarrow \mathcal{C}(-, R-)$ und $\beta: \mathcal{C}(-, R-) \Rightarrow \mathcal{D}(L-, -)$ die nach den Aufgaben 1.1.30 und 1.1.32 eindeutig existierenden natürlichen Transformationen mit $\hat{\alpha} = \eta$ und $\check{\beta} = \beta^\vee = \varepsilon$. Sind die beiden Diagramme (1.1.8) für alle $C \in \mathcal{C}$ und alle $D \in \mathcal{D}$ kommutativ, d. h. η und ε sind Eins und Koeins einer Adjunktion zwischen L und R im Sinne von [Sch20, Definition 5.3.11], so sind α und β zueinander invers; insbesondere ist α eine Isotransformation.
- (c) Die beiden so definierten Zuordnungen sind invers zueinander und definieren eine Bijektion zwischen den beiden folgenden Mengen:
- der Menge aller Isotransformationen $\alpha: \mathcal{D}(L-, -) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(-, R-)$;
 - der Menge aller Paare $(\eta: \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow RL, \varepsilon: LR \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}})$ natürlicher Transformationen mit $\varepsilon_L \circ L\eta = L$ und $R\varepsilon \circ \eta R = R$

1.1.35. Als Zusammenfassung der Aufgaben 1.1.30, 1.1.32 und 1.1.34 erhalten wir Bijektionen zwischen den folgenden Mengen, wobei $L: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $R: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ Funktoren sind:

- der Menge aller Isotransformationen $\alpha: \mathcal{D}(L-, -) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(-, R-)$;
- der Menge aller Paare $(\eta: \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow RL, \varepsilon: LR \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}})$ natürlicher Transformationen mit $\varepsilon_L \circ L\eta = L$ und $R\varepsilon \circ \eta R = R$;
- der Menge aller natürlichen Transformationen $\eta: \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow RL$, für die $\tilde{\eta}$ eine Isotransformation ist;
- der Menge aller natürlichen Transformationen $\varepsilon: LR \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$, für die $\bar{\varepsilon}$ eine Isotransformation ist, wobei hier $\varepsilon \mapsto \bar{\varepsilon}$ die zu (1.1.6) inverse Abbildung bezeichne.

Die konkrete Beschreibung der Bijektionen ist klar nach den zitierten Aufgaben.

Die Bijektion zwischen den ersten beiden Mengen zeigt, inwiefern [Sch21, Definition A.0.17] und [Sch20, Definition 5.3.11] dasselbe definieren. Entspricht unter dieser Bijektion α einem Paar (η, ε) , so ist das Diagramm

$$(1.1.9) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(LC, D) & \xrightarrow{R} & \mathcal{C}(RLC, RD) \\ \varepsilon_D \circ ? \uparrow & \searrow \alpha_{C,D} & \downarrow ? \circ \eta_C \\ \mathcal{C}(LC, LRD) & \xleftarrow{L} & \mathcal{C}(C, RD) \end{array}$$

für alle $C \in \mathcal{C}$ und $D \in \mathcal{D}$ kommutativ. Das ist klar nach Aufgabe 1.1.34 und zeigt, wie α durch ε bzw. η eindeutig bestimmt ist.

1.1.36. Das Diagramm (1.1.9) kann auch so gelesen werden (gegeben ist wie dort eine Isotransformation $\alpha: \mathcal{D}(L-, -) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(-, R-)$ mit Eins η und Koeins ε).

- (a) (Kommutativität des oberen Dreiecks) Sei $C \in \mathcal{C}$ fixiert. Dann hat der Morphismus $\eta_C: C \rightarrow RLC$ die folgende universelle Eigenschaft: Für alle Objekte $D \in \mathcal{D}$ und alle Morphismen $f: C \rightarrow RD$ in \mathcal{C}

existiert genau ein Morphismus $\tilde{f}: LC \rightarrow D$ mit $R\tilde{f} \circ \eta_C = f$:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\eta_C} & RLC \\ & \searrow \forall f & \downarrow R\tilde{f} \\ & & RD \end{array} \quad \begin{array}{c} LC \\ \vdots \exists \tilde{f} \\ \downarrow \\ D \end{array}$$

(Im Sinne der Definition in Aufgabe 1.1.38 ist η_C also ein universeller \mathcal{C} - \mathcal{D} -Morphismus.)

- (b) (Kommutativität des unteren Dreiecks) Sei $D \in \mathcal{D}$ fixiert. Dann hat der Morphismus $\varepsilon_D: LRD \rightarrow D$ die folgende universelle Eigenschaft: Für alle Objekte $C \in \mathcal{C}$ und alle Morphismen $f: LC \rightarrow D$ in \mathcal{D} existiert genau ein Morphismus $\hat{f}: C \rightarrow RD$ mit $\varepsilon_D \circ L\hat{f} = f$:

$$\begin{array}{ccc} LC & & C \\ L\hat{f} \downarrow & \searrow \forall f & \vdots \exists \hat{f} \\ LRD & \xrightarrow{\varepsilon_D} & D \\ & & \downarrow \\ & & RD \end{array}$$

1.1.37. Dem Leser mag aufgefallen sein, dass die Diagramme, die die universellen Eigenschaften von *universellen Menge-Monoid-Abbildungen* oder *universelle Menge-Gruppe-Abbildung* beschreiben (siehe [Sch20, Satz 3.8.3, insbesondere Diagramm (3.8.3), und Satz 3.8.10]), dem Diagramm in 1.1.36.(a) ähneln. Die folgende Aufgabe 1.1.38 versucht, dies zu präzisieren.⁶

Aufgabe 1.1.38 (Adjunktion per universeller Eigenschaft definieren). Sei $R: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor und $L_{\text{Obj}}: \text{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{D})$ eine Zuordnung auf Objekten (ich denke an das folgende Beispiel: R ist der Vergissfunktor $\text{Grp} \rightarrow \text{Set}$ und L_{Obj} ist die Zuordnung, die einer Menge X die freie Gruppe über X zuweist).

Sei $C \in \mathcal{C}$ ein Objekt. Ad-hoc-Definition: Ein Morphismus $u: C \rightarrow RL_{\text{Obj}}C$ heißt **universeller \mathcal{C} - \mathcal{D} -Morphismus (bezüglich R und L_{Obj})**, falls für alle Objekte $D \in \mathcal{D}$ die Verknüpfung

$$\mathcal{D}(L_{\text{Obj}}C, D) \xrightarrow{R} \mathcal{C}(RL_{\text{Obj}}C, RD) \xrightarrow{?ou} \mathcal{C}(C, RD)$$

bijektiv ist.

Sei eine Familie $\eta = (\eta_C: C \rightarrow RL_{\text{Obj}}C)_{C \in \mathcal{C}}$ universeller \mathcal{C} - \mathcal{D} -Morphismen gegeben. Zeige: Dann gibt es genau eine Möglichkeit, die Zuordnung L_{Obj} auf Objektebene zu einem Funktor $L: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ so auszudehnen (also auf Morphismen zu definieren), dass η eine natürliche Transformation ist.

Konsequenz: Die Annahme, dass alle η_C universelle \mathcal{C} - \mathcal{D} -Morphismen sind, zeigt dann, dass $\alpha := \tilde{\eta}$ (wie in Aufgabe 1.1.30 definiert) eine Isotransformation ist. Mit anderen Worten ist η die Eins einer Adjunktion (L, R) (vgl. 1.1.35).

Anwendung: Der Freie-Gruppe-Funktor ist linksadjungiert zum Vergissfunktor $\text{Grp} \rightarrow \text{Set}$.

Aufgabe 1.1.39 (Eindeutigkeit von Adjungierten). Sei $L: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor, der „zwei Rechtsadjungierte hat“, genauer seien $(L, R, \eta, \varepsilon)$ und $(L, R', \eta', \varepsilon')$ Adjunktionen. Dann sind R und R' in kanonischer Weise isomorph.

Analog sind zwei Linksadjungierte eines Funktors R kanonisch isomorph.

Aufgabe 1.1.40. Sei $\alpha: \mathcal{D}(L-, -) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}(-, R-)$ eine Adjunktion zwischen Funktoren $L: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $R: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ mit Eins $\eta: \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow RL$ und Koeins $\varepsilon: LR \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$. Dann gelten:

- (a) Die Eins η ist eine Isotransformation $\iff L$ ist volltreu (etwa die Inklusion einer vollen Unterkategorie).

Genau dann sind alle η_C , für $C \in \mathcal{C}$, Monomorphismen (siehe Definition 2.9.1), wenn L treu ist.

(Leicht:) Gelten diese beiden äquivalenten Bedingungen, so ist R essentiell surjektiv.

Hinweis: Mögliche Vorgehensweise zum Beweis der Äquivalenz der beiden Bedingungen:

⁶Es handelt sich eigentlich nur um eine abstrakte Formulierung von Aufgabe 3.8.9.

- Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}(C, C') & \xrightarrow{L} & \mathcal{D}(LC, LC') \\
 & \searrow \eta_{C' \circ ?} & \downarrow \sim \alpha_{C, LC'} \\
 & & \mathcal{C}(C, RLC')
 \end{array}$$

ist für alle $C, C' \in \mathcal{C}$ kommutativ; verwende dafür (1.1.5).

- Damit ist die Implikation \Rightarrow klar.
 - Für die Implikation \Leftarrow verwende man zusätzlich, dass der Yoneda-Funktor $\mathcal{C} \rightarrow \text{Set}^{(\mathcal{C}^{\text{op}})}$, $C \mapsto \mathcal{C}(-, C)$, volltreu ist: Dies ist die Aussage von [Soe20, Korollar A.0.14] angewandt auf \mathcal{C}^{op} .
- (b) Die Koeins ε ist eine Isotransformation $\iff R$ ist volltreu (etwa die Inklusion einer vollen Unterkategorie).

Genau dann sind alle ε_D , für $D \in \mathcal{D}$, Epimorphismen (siehe Definition 2.9.1), wenn R treu ist.

(Leicht:) Gelten diese beiden äquivalenten Bedingungen, so ist L essentiell surjektiv.

Bemerkung: Ich habe diese Aussagen mittlerweile auch in [Sch20, Lemma 5.3.21] aufgeschrieben.

1.1.2. Aufgabenpool: Äquivalenzen und adjungierte Funktoren.

Aufgabe 1.1.41 (Äquivalenzen und Adjunktionen). In [Sch20, Definition 5.3.17] haben wir eine Äquivalenz als volltreuen, essentiell surjektiven Funktor definiert. Zeige: Die folgenden Bedingungen an einen Funktor $R: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ sind äquivalent:

- Es gibt einen Funktor $L: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und Isotransformationen $LR \xrightarrow{\cong} \text{id}_{\mathcal{D}}$ und $RL \xrightarrow{\cong} \text{id}_{\mathcal{C}}$. (Man sagt in diesem Fall, dass L und R **quasi-invers** zueinander sind als Abschwächung des Begriffs *invers*, der bedeuten würde, dass die beiden Verknüpfungen die jeweiligen Identitäten sind.)
- R ist Teil einer Adjunktion $(L, R, \eta, \varepsilon)$ für geeignete L, η und ε , wobei η und ε Isotransformationen sind.^{7 8}
- R ist eine Äquivalenz.

Aufgabe 1.1.42. Sei $(L, R, \eta, \varepsilon)$ eine Adjunktion zwischen Funktoren $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[R]{L} \mathcal{D}$. Betrachte die vollen Unterkategorien

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_0 &:= \{C \in \mathcal{C} \mid \text{Die Eins ist ein Isomorphismus } \eta_C: C \xrightarrow{\sim} RLC\}, \\
 \mathcal{D}_0 &:= \{D \in \mathcal{D} \mid \text{Die Koeins ist ein Isomorphismus } \varepsilon_D: LRD \xrightarrow{\sim} D\}.
 \end{aligned}$$

Dann induzieren L und R Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
 L_0: \mathcal{C}_0 &\xrightarrow{\cong} \mathcal{D}_0 \quad \text{und} \\
 \mathcal{C}_0 &\xleftarrow{\cong} \mathcal{D}_0: R_0,
 \end{aligned}$$

die zueinander quasi-invers sind: Eins und Koeins der Adjunktion restringieren zu Isotransformationen

$$\begin{aligned}
 \eta_0: \text{id}_{\mathcal{C}_0} &\xrightarrow{\cong} R_0 L_0, \\
 \varepsilon_0: L_0 R_0 &\xrightarrow{\cong} \text{id}_{\mathcal{D}_0}.
 \end{aligned}$$

1.2. Limiten und Kolimiten.

⁷Man nennt solch eine Adjunktion auch eine **adjungierte Äquivalenz**.

⁸Dann ist automatisch auch $(R, L, \varepsilon^{-1}, \eta^{-1})$ eine Adjunktion, deren Eins und Koeins invertierbar sind. Der Funktor R ist also sowohl rechts- als auch linksadjungiert zu L . Dies zeigt, dass diese a priori asymmetrisch wirkende Bedingung in Wirklichkeit symmetrisch ist.

1.2.1. *Diagramme.*

Definition 1.2.1. Einen Funktor $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ zwischen Kategorien nennt man auch ein **Diagramm der Form \mathcal{I} in \mathcal{C}** . Wir notieren in diesem Kontext Objekte von \mathcal{I} oft durch Kleinbuchstaben i und schreiben D_i statt $D(i)$. Ist $\alpha: i \rightarrow j$ ein Morphismus in \mathcal{I} , so schreibt man den Morphismus $D(\alpha): D_i \rightarrow D_j$ oft (by *abuse of notation*) als $\alpha: D_i \rightarrow D_j$. Oft wird \mathcal{I} in diesem Kontext als **Indexkategorie** bezeichnet.⁹

Beispiele 1.2.2. Sei \mathcal{C} eine Kategorie.

- (a) Ist \mathcal{I} die diskrete Kategorie (siehe [Sch20, Beispiel A.1.5.(g)]) mit zwei Objekten 1 und 2, veranschaulicht durch das Diagramm

$$\mathcal{I} = \left(\begin{array}{cc} & \\ 1 & \\ & 2 \end{array} \right)$$

oder genauer durch

$$\mathcal{I} = \left(\begin{array}{cc} \text{id}_1 \circlearrowleft & 1 & 2 & \circlearrowright \text{id}_2 \\ & & & \end{array} \right),$$

so ist ein \mathcal{I} -förmiges Diagramm D in \mathcal{C} dasselbe wie das Datum zweier Objekte

$$(1.2.1) \quad \begin{array}{ccc} & X & Y \\ & & \end{array}$$

in \mathcal{C} , wobei $X = D_1$ und $Y = D_2$.

- (b) Ein Diagramm der Form

$$(1.2.2) \quad \begin{array}{ccc} & & Y \\ & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

in \mathcal{C} ist dasselbe wie ein \mathcal{I} -förmiges Diagramm in \mathcal{C} , wobei \mathcal{I} durch

$$\begin{array}{ccc} & & b \\ & & \downarrow \beta \\ a & \xrightarrow{\alpha} & c \end{array}$$

gegeben ist und wir die Identitätsmorphisme der drei Objekte nicht eingezeichnet haben (die Kategorie hat genau drei Objekte und fünf Morphisme).

- (c) Ein Diagramm

$$(1.2.3) \quad X \xrightarrow{f} Y$$

in \mathcal{C} ist dasselbe wie ein Diagramm der Form

$$\mathcal{I} = \left(\begin{array}{ccc} \text{id}_1 \circlearrowleft & 1 & \xrightarrow{\alpha} 2 & \circlearrowright \text{id}_2 \\ & & & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} & 1 & \xrightarrow{\alpha} 2 \\ & & \end{array} \right)$$

in \mathcal{C} .

- (d) Ein Diagramm

$$(1.2.4) \quad X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xRightarrow{g} \end{array} Y$$

⁹Betrachten wir im Folgenden solche Diagramme, sollte der Leser stets annehmen, dass die Kategorie \mathcal{I} „nicht zu groß“ ist, um nicht in mengentheoretische Probleme verstrickt zu werden. Wenn man diese vermeiden will, sollte man mit Universen oder ähnlichem arbeiten, worauf ich aber im Rahmen dieser Vorlesung keine Lust habe.

Diese Fußnote sollte aber nicht so verstanden werden, dass hier ungenaue Mathematik folgt: So wie Sie vermutlich Analysis gelernt haben, ohne sich um axiomatische Mengenlehre zu kümmern, lernen sie eben jetzt Garbentheorie.

in \mathcal{C} ist dasselbe wie ein Diagramm der Form

$$(1.2.5) \quad \mathcal{I} = \left(\text{id}_1 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} 2 \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{array} \text{id}_2 \right) = \left(1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} 2 \right)$$

in \mathcal{C} .

- (e) Wie sieht eine Kategorie \mathcal{I} aus, so dass \mathcal{I} -förmige Diagramme kommutative Quadrate sind?
- (f) Sei \mathcal{I} die der geordneten Menge (\mathbb{N}, \leq) zugeordnete Kategorie (siehe [Sch20, Beispiel A.1.5.(f)]). Dann ist ein \mathcal{I} -förmiges Diagramm dasselbe wie ein Diagramm

$$(1.2.6) \quad X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \rightarrow \dots$$

(warum?).

1.2.2. Limiten.

Definition 1.2.3. Sei $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm. Ein **Kegel über D** ist ein Paar (S, s) , bestehend aus

- einem Objekt S von \mathcal{C} (der **Spitze des Kegels**),
- einer Familie $s = (s_i)_{i \in \mathcal{I}}$ von Morphismen $s_i: S \rightarrow D_i$ in \mathcal{C} , für alle Objekte $i \in \mathcal{I}$,

so dass gilt:

- Für alle Morphismen $\alpha: i \rightarrow j$ in \mathcal{I} kommutiert das Diagramm

$$(1.2.7) \quad \begin{array}{ccc} & S & \\ s_i \swarrow & & \searrow s_j \\ D_i & \xrightarrow{\alpha} & D_j \end{array}$$

Hier meint α wie in Definition 1.2.1 beschrieben eigentlich den Morphismus $D(\alpha)$.

1.2.4. Ein Kegel über D ist also ein Objekt S zusammen mit einer Familie kompatibler Morphismen in alle D_i .

Ich stelle mir einen Kegel meist vereinfachend als ein kommutatives Diagramm (1.2.7) vor, wobei jedoch in Wirklichkeit ein im Allgemeinen viel größeres kommutatives Diagramm gemeint ist, in dessen unterer Zeile alle D_i und alle $D(\alpha)$ auftauchen.

Definition 1.2.5. Sei $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm. Ein Kegel (L, p) über D heißt **Limes von D** , falls die folgende universelle Eigenschaft gilt: Für alle Kegel (S, s) über D existiert genau ein Morphismus $f: S \rightarrow L$, so dass für alle Objekte $i \in \mathcal{I}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & L \\ s_i \searrow & & \swarrow p_i \\ & D_i & \end{array}$$

kommutativ ist (ein „besser merkbares“ Diagramm befindet sich in 1.2.7). Wir notieren diesen Morphismus f oft als $\langle s \rangle = \langle s_i \rangle = \langle s_i \rangle_{i \in \mathcal{I}}$, was andeuten soll, dass er eindeutig durch die Familie der s_i bestimmt ist. Die Morphismen p_i heißen dann **kanonische Projektionen**.

1.2.6. Ein Limes von D ist im folgenden Sinne eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus: Sind (L, p) und (L', p') zwei Limiten von D , so gibt es genau einen Isomorphismus $f: L' \xrightarrow{\sim} L$ mit $p_i \circ f = p'_i$ für alle $i \in \mathcal{I}$.¹⁰ Wir sprechen deswegen von *dem* Limes und notieren ihn als

$$\left(\lim_{\mathcal{I}} D, \text{pr} \right) \quad \text{oder nachlässig als} \quad \lim D,$$

in Wirklichkeit meistens aber als

$$\lim_{i \in \mathcal{I}} D_i.$$

¹⁰In der in offensichtlicher Weise definierten Kategorie aller Kegel über D ist f ein Isomorphismus.

Die kanonischen Projektionen werden als

$$\text{pr}_j: \lim_{i \in \mathcal{I}} D_i \rightarrow D_j$$

notiert.

Bisweilen ist es auch angebracht, in der Notation zu erwähnen, in welcher Kategorie der Limes gebildet wird. Man mag dies etwa durch die Verwendung eines oberen Index andeuten, also durch $\lim^{\mathcal{C}} D$.

1.2.7. Die universelle Eigenschaft eines Limes wird durch das folgende Diagramm illustriert.

$$\begin{array}{ccc}
 & S & \\
 s_j \swarrow & \text{---} & \searrow s_k \\
 & \lim D_i & \\
 \text{pr}_j \swarrow & & \searrow \text{pr}_k \\
 D_j & \xrightarrow{\alpha} & D_k
 \end{array}$$

Beispiele 1.2.8 (Limiten zu den Beispielen in 1.2.2). Sei \mathcal{C} eine Kategorie.

- (a) Ein Limes des Diagramms (1.2.1) ist dasselbe wie ein Produkt $X \times Y$ von X und Y in \mathcal{C} im Sinne von [Sch20, Definition 3.6.2] (dieses mag oder mag nicht existieren). Daher kommt der Name für die *kanonischen Projektionen*.

Analog kann man eine Familie $(X_i)_{i \in I}$ von Objekten von \mathcal{C} als \mathcal{I} -förmiges Diagramm X in \mathcal{C} auffassen, wobei die Indexkategorie \mathcal{I} die diskrete Kategorie zur Indexmenge I ist. Ein Limes dieses Diagramms ist dasselbe wie ein Produkt der X_i , in Formeln $\lim_{i \in \mathcal{I}} X_i = \prod_{i \in I} X_i$ im Fall der Existenz.

- (b) Ist \mathcal{I} die leere Kategorie (also die Kategorie mit leerer Objektmenge), so ist der Limes über jedes \mathcal{I} -förmige Diagramm D in \mathcal{C} dasselbe wie das terminale Objekt in \mathcal{C} .

Wir notieren das terminale Objekt einer Kategorie \mathcal{C} als $*$ = $*_{\mathcal{C}}$ oder als $\text{term}_{\mathcal{C}}$, falls es existiert. Beispielsweise ist $*_{\text{Set}}$ eine beliebige einelementige Menge, $*_{\text{Top}}$ ist ein beliebiger einelementiger topologischer Raum, $*_{\text{Mod}(R)}$ ist der Nullmodul $\{0\}$, für den aber die Bezeichnung $0 = 0_{\text{Mod}(R)}$ üblich ist, denn er ist sogar ein Nullobjekt (dazu später mehr).

- (c) Der Limes des Diagramms (1.2.2) ist der Pullback (= das Faserprodukt) dieses Diagramms (siehe [Sch20, Definition 3.7.3]). Nennen wir unser Diagramm D , so gilt also $\lim_{i \in \mathcal{I}} D_i = X \times_Z Y$ im Falle der Existenz.
- (d) Sei $f: M \rightarrow N$ ein Morphismus von Moduln über einem Ring R . Dann ist der Kern von f nichts anderes als der Limes des Diagramms

$$M \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \rightrightarrows \\ \xrightarrow{0} \end{array} N$$

in $\text{Mod}(R)$. Implizit wird hier (1.2.5) als Indexkategorie \mathcal{I} verwendet.

Hier kann man $\text{Mod}(R)$ auch durch die Kategorie $\text{Kom}(R)$ der Komplexe von R -Moduln ersetzen oder allgemeiner durch jede beliebige abelsche Kategorie.

- (e) Den Limes über ein beliebiges Diagramm der Form

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \rightrightarrows \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y$$

in \mathcal{C} nennt man auch den **Egalisator von f und g** (manchmal wird er als $\text{eq}(X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \rightrightarrows \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y)$ notiert.

Man nennt ein Diagramm

$$E \xrightarrow{e} X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \rightrightarrows \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y$$

in \mathcal{C} ein **Egalisatordiagramm**, falls $f \circ e = g \circ e$ gilt und E zusammen mit den Morphismen e und $f \circ e = g \circ e$ ein Egalisator von $X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \rightrightarrows \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y$ ist.

Für $\mathcal{C} = \text{Set}$ ist

$$E := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

mit der Inklusion $E \subset X$ und der Abbildung $f|_E = g|_E: E \rightarrow Y$ ein Egalisator des obigen Diagramms. Genauso wird der Egalisator in $\mathcal{C} = \text{Top}$ oder $\mathcal{C} = \text{Mod}(R)$ oder $\mathcal{C} = \text{Grp}$ gebildet.

- (f) Das Diagramm (1.2.3) hat als Limes X samt der kanonischen Projektionen $\text{id}: X \rightarrow X$ und $f: X \rightarrow Y$. (Ist $\alpha: X' \xrightarrow{\sim} X$ ein Isomorphismus, so ist auch X' ein Limes.) Ähnlich langweilig ist X_0 der Limes des Diagramms (1.2.6).

Definition 1.2.9. Sei \mathcal{C} eine Kategorie.

Ist \mathcal{I} eine fixierte Indexkategorie, so sagen wir, dass \mathcal{C} **(alle/beliebige) \mathcal{I} -Limiten hat** oder dass **\mathcal{I} -Limiten in \mathcal{C} existieren**, wenn alle Diagramme $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ einen Limes in \mathcal{C} haben.

Wir sagen, dass \mathcal{C} **beliebige Limiten hat**¹¹, wenn für alle Indexkategorien \mathcal{I} alle \mathcal{I} -Limiten in \mathcal{C} existieren.

Wir sagen, dass \mathcal{C} **endlichen Limiten hat**, wenn für alle endlichen¹² Indexkategorien \mathcal{I} alle \mathcal{I} -Limiten in \mathcal{C} existieren.

In analoger Weise werden Sprechweisen wie **hat beliebige Produkte**, **hat endliche Produkte**¹³, **hat alle Egalisatoren**, **hat Pullbacks**, **hat ein terminales Objekt**, ... verwendet.

Satz 1.2.10. *In der Kategorie Set der Mengen existieren alle Limiten: Ist D ein \mathcal{I} -förmiges Diagramm in Set, so gilt*

$$\lim_{i \in \mathcal{I}} D_i = \left\{ (x_i)_{i \in \mathcal{I}} \in \prod_{i \in \mathcal{I}} D_i \mid D(\alpha)(x_i) = x_j \text{ für alle Morphismen } \alpha: i \rightarrow j \text{ in } \mathcal{I} \right\},$$

wobei die kanonischen Projektionen die Restriktionen der Projektionen aus dem Produkt sind.

Dieselbe Aussage (mit derselben expliziten Beschreibung des Limes) gilt, wenn man die Kategorie Set durch eine der folgenden Kategorien ersetzt:

- Top;
- Grp;
- $\text{Mod}(R)$, wobei R ein Ring ist; insbesondere $\text{Ab} = \text{Mod}(\mathbb{Z})$;
- Ring.

¹⁴

Slogan 1.2.11 (zu Satz 1.2.10). Limiten in Set, Top, Grp, Ab, $\text{Mod}(R)$, Ring stimmen überein.

Beweis. Für Set prüft man die universelle Eigenschaft des Limes ohne Schwierigkeit.

Für jede der anderen Kategorien ist die angegebene Teilmenge des Produkts wieder in naheliegender Weise ein Objekt der betrachteten Kategorie (Initialtopologie bzw. komponentenweise Verknüpfungen) und die Projektionen sind Morphismen in der betrachteten Kategorie. Man prüft wieder ohne Schwierigkeit die universelle Eigenschaft des Limes. \square

Aufgabe 1.2.12. Genau dann hat eine Kategorie alle Limiten, wenn sie beliebige Produkte und Egalisatoren hat.

Hinweis für die nicht triviale Implikation \Leftarrow : Der in Satz 1.2.10 konstruierte Limes ist der Egalisator zweier Abbildungen zwischen Produkten.

Ende der 2. Vorlesung am 15.04.2021.

Hausaufgaben: Vier der folgenden sechs Aufgaben eigener Wahl:

- (1) Aufgabe 1.1.9: Automorphismen der trivialen n -blättrigen Überlagerung
- (2) Lies [Sch20, Definition 4.1.11] und zeige die ersten beiden Punkte von [Sch20, Aufgabe 4.1.16]: Eigenschaften étaler Abbildungen.
- (3) Aufgabe 1.1.30 oder Aufgabe 1.1.32 (und die andere dann glauben – vermutlich sind die beiden Aussagen eh dual zueinander).
- (4) Aufgabe 1.1.34: Äquivalenz zweier möglicher Definitionen einer Adjunktion.

¹¹oder dass \mathcal{C} **vollständig** ist

¹²Eine Kategorie heißt **endlich**, wenn sie nur endlich viele Objekte und Morphismen hat.

¹³Insbesondere also das Produkt über die leere Indexkategorie, also ein terminales Objekt.

¹⁴Auch viele andere Kategorien haben alle Limiten, vgl. [Wik20, Complete category].

- (5) Aufgabe 1.1.26: Čech-1-Kozykel und erste Čech-Kohomologie für die Kreislinie mit der üblichen Überdeckung
 (6) Aufgabe 1.2.12: Limiten versus Produkte und Egalisatoren

1.2.13 (Diagramme bilden Kategorie). Seien \mathcal{I} eine Indexkategorie und \mathcal{C} eine beliebige Kategorie. Da die Objekte der Funktorkategorie $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ nichts anderes als \mathcal{I} -förmige Diagramme $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ sind, nennt man diese Kategorie auch **Kategorie der \mathcal{I} -förmigen Diagramme in \mathcal{C}** . Ein Morphismus zwischen \mathcal{I} -förmigen Diagramm D und E ist also schlicht eine natürliche Transformation $\tau: D \Rightarrow E$, die wir im Folgenden auch oft als $\tau: D \rightarrow E$ schreiben.

1.2.14 (Limes als Funktor). Sei $\tau: D \Rightarrow E$ ein Morphismus von Diagrammen $D, E: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$. Existieren die beiden Limiten $\lim D$ und $\lim E$, so folgt aus der universellen Eigenschaft von $\lim E$ sofort, dass es genau einen Morphismus $\lim D \rightarrow \lim E$ gibt, den wir $\lim \tau = \lim_{\mathcal{I}} \tau = \lim_{i \in \mathcal{I}} \tau_i$ nennen, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \lim D & \xrightarrow{\exists! \lim \tau} & \lim E \\ \downarrow \text{pr}_i & & \downarrow \text{pr}_i \\ D_i & \xrightarrow{\tau_i} & E_i \end{array}$$

für alle Objekte $i \in \mathcal{I}$ kommutiert.

Ist \mathcal{I} eine Indexkategorie und hat \mathcal{C} alle \mathcal{I} -Limiten, so ist

$$(1.2.8) \quad \begin{aligned} \lim = \lim_{\mathcal{I}}: \mathcal{C}^{\mathcal{I}} &\rightarrow \mathcal{C}, \\ D &\mapsto \lim_{\mathcal{I}} D, \\ \tau &\mapsto \lim_{\mathcal{I}} \tau, \end{aligned}$$

ein Funktor.^{15 16}

Beispiel 1.2.15. Ist beispielsweise \mathcal{I} eine diskrete Kategorie mit genau zwei Objekten 1 und 2, so ist der Funktor (1.2.8) modulo des offensichtlichen Isomorphismus $\mathcal{C}^{\mathcal{I}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ von Kategorien der Produktfunktoren

$$\begin{aligned} \times: \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C}, \\ (X, Y) &\mapsto X \times Y, \\ (f: X \rightarrow X', g: Y \rightarrow Y') &\mapsto f \times g: X \times Y \rightarrow X' \times Y'. \end{aligned}$$

Wenn \mathcal{I} eine beliebige diskrete Kategorie ist, ist dieser Funktor analog der Produktfunktoren $\prod_{i \in \mathcal{I}}: \prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, $(X_i) \mapsto \prod X_i$, $(f_i) \mapsto \prod f_i$.

1.2.16 (Wechsel der Indexkategorien beim Limes). Sei $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm und $r: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$ ein Funktor, so dass $\lim_{\mathcal{I}} D$ und $\lim_{\mathcal{J}} (D \circ r)$ existieren. Dann gibt es genau einen Morphismus $\lim_{\mathcal{I}} D \rightarrow \lim_{\mathcal{J}} (D \circ r)$, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \lim_{\mathcal{I}} D & \xrightarrow{\exists!} & \lim_{\mathcal{J}} (D \circ r) \\ & \searrow \text{pr}_{r(j)} & \swarrow \text{pr}_j \\ & D_{r(j)} & \end{array}$$

für alle Objekte $j \in \mathcal{J}$ kommutativ macht.

Definition 1.2.17. Sei $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor.

¹⁵Implizit ist hier für jedes Diagramm eine Wahl eines Limes $\lim_{\mathcal{I}} D$ getroffen. Trifft man andere Wahlen, so sind die beiden erhaltenen Funktoren eindeutig isomorph.

¹⁶Wir fassen hier den Limes als Objekt von \mathcal{C} auf und vergessen die kanonischen Projektionen. Genauer kann man den Limes als Funktor von der Kategorie $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ in die „Kategorie der Kegel über \mathcal{I} -förmigen Diagrammen“ auffassen: Ein Objekt ist ein Tripel (K, k, D) bestehend aus einem Kegel (K, k) über einem \mathcal{I} -förmigen Diagramm D in \mathcal{C} . Morphismen sind in offensichtlicher Weise definiert.

- Sei $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm, das einen Limes $(\lim D, \text{pr})$ in \mathcal{C} hat. Wir sagen, dass F **den Limes** $(\lim D, \text{pr})$ **erhält**, falls $(F(\lim), F(\text{pr}))$ ein Limes des Diagramms $F \circ D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$ ist, wobei $F(\text{pr}) := (F(\text{pr}_i))_{i \in \mathcal{I}}$.
- Ist \mathcal{I} eine Indexkategorie, so sagen wir, dass F **\mathcal{I} -Limiten erhält** oder **mit \mathcal{I} -Limiten kommutiert**, falls gilt: Ist $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein beliebiges \mathcal{I} -förmiges Diagramm, dessen Limes $(\lim D, \text{pr})$ in \mathcal{C} existiert, so erhält F diese Limes.¹⁷
- Wir sagen, dass F **Limiten erhält** oder **mit Limiten kommutiert**, falls für alle Indexkategorien \mathcal{I} gilt, dass F \mathcal{I} -Limiten erhält.
- Analog werden Sprechweisen wie **kommutiert mit endlichen Limiten**, **kommutiert mit Produkten**, **kommutiert mit endlichen Produkten**, **kommutiert mit Egalisatoren**, **kommutiert mit Pullbacks**, **erhält terminale Objekte**, ... verwendet.

1.2.18. Seien $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor und $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm. Haben D und $F \circ D$ Limiten, so gibt es genau einen Morphismus

$$F(\lim D) \rightarrow \lim(F \circ D),$$

so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(\lim D) & \xrightarrow{\exists!} & \lim(F \circ D) \\ & \searrow F(\text{pr}_i) & \swarrow \text{pr}_i \\ & & F(D_i) \end{array}$$

für alle $i \in \mathcal{I}$ kommutiert. Dieser Morphismus ist genau dann ein Isomorphismus, wenn F den Limes $\lim D$ erhält.

1.2.19. Satz 1.2.10 besagt, dass alle Kategorien im Diagramm

$$(1.2.9) \quad \begin{array}{ccccccc} \text{Mod}(R) & \longrightarrow & \text{Ab} & \longrightarrow & \text{Grp} & \longrightarrow & \text{Set} \\ & & \uparrow & & & & \uparrow \\ & & \text{Ring} & & & & \text{Top} \end{array}$$

alle Limiten haben und dass alle Vergissfunktoren alle Limiten erhalten.¹⁸

Aufgabe 1.2.20 (Limiten in der Kategorie der Objekte über bzw. unter einem Objekt). Sei \mathcal{C} eine beliebige der in Satz 1.2.10 genannten Kategorien und sei $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt.

- Dann hat auch $\mathcal{C}_{X/}$ alle Limiten und der Vergissfunktor $\mathcal{C}_{X/} \rightarrow \mathcal{C}$ erhält diese.
- Dann hat auch $\mathcal{C}_{/X}$ alle Limiten (hoffentlich stimmt das; ich denke, man nimmt den Limes in \mathcal{C} und dann den „simultanen Egalisator aller Morphismen nach X “), aber der Vergissfunktor $\mathcal{C}_{/X} \rightarrow \mathcal{C}$ erhält diese im Allgemeinen nicht (schon falsch für $\mathcal{C} = \text{Set}$ und $X = \{1, 2\}$).

1.2.21. Sei $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm. Ist $S \in \mathcal{C}$ ein beliebiges Objekt, so ist

$$\mathcal{C}(S, -) \circ D = \mathcal{C}(S, D(-)): \mathcal{I} \rightarrow \text{Set}$$

ein \mathcal{I} -förmiges Diagramm in Set . Sein Limes ist nach Satz 1.2.10 wie folgt gegeben.

$$(1.2.10) \quad \begin{aligned} \lim_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{C}(S, D_i) &= \left\{ s = (s_i)_{i \in \mathcal{I}} \in \prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{C}(S, D_i) \mid D(\alpha) \circ s_i = s_j \text{ für alle Morphismen } \alpha: i \rightarrow j \text{ in } \mathcal{I} \right\} \\ &= \left\{ s = (s_i)_{i \in \mathcal{I}} \in \prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{C}(S, D_i) \mid (S, s) \text{ ist Kegel über } D \right\} \end{aligned}$$

¹⁷Meist wird es so sein, dass in \mathcal{C} alle \mathcal{I} -Limiten existieren, und man könnte dies auch in der Definition fordern. Wir wollen es aber stets explizit dazusagen.

¹⁸Ich wollte verstehen, was der tiefere Grund dafür ist. In 1.2.74 geben wir eine kategorielle Begründung, warum dies für Grp und $\text{Grp} \rightarrow \text{Set}$ zutrifft; dazu werden 1.2.70 und Aufgabe 1.2.26 verwendet. Die analoge Argumentation funktioniert auch für alle Kategorien im obigen Diagramm außer Top .

Für jeden Kegel $(L, p) = (L, (p_i)_{i \in \mathcal{I}})$ über D erhalten wir eine (wohldefinierte) Abbildung

$$(1.2.11) \quad \begin{aligned} \mathcal{C}(S, L) &\rightarrow \lim_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{C}(S, D_i), \\ f &\mapsto (p_i \circ f)_{i \in \mathcal{I}}. \end{aligned}$$

Proposition 1.2.22. *Genau dann ist ein Kegel (L, p) über einem Diagramm $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Limes dieses Diagramms, wenn die Abbildung*

$$\mathcal{C}(S, L) \xrightarrow{(1.2.11)} \lim_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{C}(S, D_i)$$

von Mengen für alle $S \in \mathcal{C}$ bijektiv ist.

Insbesondere gilt: Hat ein Diagramm $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ einen Limes $\lim_{i \in \mathcal{I}} D_i$, so ist die offensichtliche Abbildung für alle $S \in \mathcal{C}$ eine Bijektion

$$\mathcal{C}(S, \lim_{i \in \mathcal{I}} D_i) \xrightarrow{\sim} \lim_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{C}(S, D_i).$$

Mit anderen Worten erhält der Funktor $\mathcal{C}(S, -): \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ für alle $S \in \mathcal{C}$ alle Limiten.¹⁹

Beweis. Dies ist mehr oder weniger tautologisch: Ein Element von $\lim_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{C}(S, D_i)$ ist nach (1.2.10) eine Familie $s = (s_i)_{i \in \mathcal{I}}$ von Morphismen mit der Eigenschaft, dass (S, s) ein Kegel über D ist. Mit dieser Beobachtung ist die Aussage der Proposition nur eine Umformulierung der definierenden universellen Eigenschaft eines Limes (siehe Definition 1.2.5). \square

Satz 1.2.23. *Jeder rechtsadjungierte²⁰ Funktor erhält alle Limiten.*

Beweis. Seien $R: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor und (L, R, α) eine Adjunktion. Sei $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Diagramm, das einen Limes $\lim D_i$ hat. Zu zeigen ist, dass $R(\lim D_i)$ der Limes des Diagramms $R \circ D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ist.

Für jedes Objekt $S \in \mathcal{C}$ haben wir ein (offensichtlich) kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(LS, \lim D_i) & \xrightarrow[\sim]{\alpha_{S, \lim D_i}} & \mathcal{C}(S, R \lim D_i) \\ \downarrow (1.2.11) & & \downarrow (1.2.11) \\ \lim \mathcal{D}(LS, D_i) & \xrightarrow[\sim]{\lim \alpha_{S, D_i}} & \lim \mathcal{C}(S, RD_i) \end{array}$$

mit der Adjunktionsbijektion bzw. einem Limes von Adjunktionsbijektionen als bijektiven Horizontalen (nach 1.2.14 ist jeder Limes von Isomorphismen ein Isomorphismus). Nach Annahme und Proposition 1.2.22 ist die linke Vertikale bijektiv. Also ist auch die rechte Vertikale für alle $S \in \mathcal{C}$ bijektiv, was wiederum nach Proposition 1.2.22 die gewünschte Behauptung zeigt.

Man kann die obige Bijektionskette, startend mit einem Element s der Menge rechts unten, auch konkret so interpretieren: Ist (S, s) ein Kegel über $R \circ D$, so ist $(LS, (\alpha^{-1}(s_i))_i)$ ein Kegel über D , der von genau einem Morphismus $LS \rightarrow \lim D_i$ herkommt, welcher einem Morphismus $S \rightarrow R(\lim D_i)$ entspricht. \square

Beispiel 1.2.24. Der Vergissfunktor $\text{Grp} \rightarrow \text{Set}$ hat den Funktor Freie-Gruppe als Linksadjungierten, ist also rechtsadjungiert. Also erhält $\text{Grp} \rightarrow \text{Set}$ alle Limiten, wie wir schon in 1.2.19 bemerkt haben.

Ich vermute (ohne mir die Details überlegt zu haben), dass alle Funktoren im Diagramm (1.2.9) rechtsadjungierte sind und deswegen Limiten erhalten.

Aufgabe 1.2.25. Sei \mathcal{C} eine Kategorie, so dass je zwei Objekte $X, Y \in \mathcal{C}$ ein Produkt $X \times Y$ haben.

- (a) Seien $A, B \in \mathcal{C}$ Objekte. Dann ist der von den Projektionen induzierte Morphismus ein Isomorphismus

$$A \times B \xrightarrow{\sim} B \times A.$$

- (b) Seien $A, B, C \in \mathcal{C}$ Objekte. Dann ist der von den Projektionen induzierte Morphismus ein Isomorphismus

$$A \times (B \times C) \xrightarrow{\sim} (A \times B) \times C$$

und das Produkt $A \times B \times C$ existiert.

- (c) Existiert in \mathcal{C} ein terminales Objekt $*$, so sind A und $A \times *$ und $* \times A$ kanonisch isomorph.

¹⁹ Etwas abstrakter und mit Aufgabe 1.2.68: Der Yoneda-Funktor $\mathcal{C} \rightarrow \text{Set}^{\text{cop}}$, $D \mapsto \mathcal{C}(-, D)$ erhält alle Limiten.

²⁰ Wir nennen einen Funktor F rechtsadjungiert, wenn er Teil einer Adjunktion (L, R, α) ist.

- (d) Sind $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$ Objekte, mit $n \geq 1$, so existiert das Produkt $A_1 \times \dots \times A_n$ in \mathcal{C} .
Insbesondere gilt: Hat \mathcal{C} ein terminales Objekt, so hat es alle endlichen Produkte.

Aufgabe 1.2.26 (Limiten vertauschen mit Limiten). Seien \mathcal{I}, \mathcal{J} Indexkategorien und sei $F: \mathcal{I} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm in einer weiteren Kategorie \mathcal{C} , die alle Limiten hat. Zeige, dass der offensichtliche Morphismus ein Isomorphismus

$$(1.2.12) \quad \lim_{(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}} F(i, j) \xrightarrow{\sim} \lim_{i \in \mathcal{I}} \lim_{j \in \mathcal{J}} F(i, j)$$

ist.²¹ Aus Symmetriegründen folgt

$$(1.2.13) \quad \lim_{j \in \mathcal{J}} \lim_{i \in \mathcal{I}} F(i, j) \cong \lim_{(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}} F(i, j) \cong \lim_{i \in \mathcal{I}} \lim_{j \in \mathcal{J}} F(i, j)$$

Bemerkung: Man kann (1.2.13) auch so verstehen, dass der Funktor $\lim_{j \in \mathcal{J}}: \mathcal{C}^{\mathcal{J}} \rightarrow \mathcal{C}$ mit allen Limiten vertauscht (denn ein \mathcal{I} -förmiges Diagramm $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ ist „dasselbe“ wie ein Diagramm $F: \mathcal{I} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$).

Bemerkung: Analoges vertauschen Kolimiten mit Kolimiten (Kolimiten hier noch nicht definiert).

Hinweis: Das Hauptproblem hier ist eventuell, die rechte Seite von (1.2.12) zu verstehen: Für jedes fixierte Objekt $i \in \mathcal{I}$ sei $F^{(i)}: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ der Funktor $j \mapsto F(i, j)$. Laut Annahme existiert sein Limes $\lim_{\mathcal{J}} F^{(i)} = \lim_{j \in \mathcal{J}} F(i, j)$. Für jeden Morphismus $\alpha: i \rightarrow i'$ in \mathcal{I} liefert die offensichtliche natürliche Transformation $F^{(i)} \rightarrow F^{(i')}$ wegen der Funktorialität des Limes 1.2.14 einen Morphismus $\lim_{\mathcal{J}} F^{(i)} \rightarrow \lim_{\mathcal{J}} F^{(i')}$. Insgesamt ist $\lim_{\mathcal{J}} F^{(?)}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm, das wiederum nach Annahme einen Limes $\lim_{\mathcal{I}} \lim_{\mathcal{J}} F^{(?) = \lim_{i \in \mathcal{I}} \lim_{j \in \mathcal{J}} F(i, j)$ hat.

1.2.3. Kolimiten.

1.2.27. Die Kurzfassung einiger der folgenden Erklärungen ist: Ein Kolimes in \mathcal{C} ist ein Limes in der opinierten Kategorie \mathcal{C}^{op} . In diesem Sinne sind die Begriffe *Limes* und **Kolimes** dual zueinander und der aktuelle Abschnitt ist dual zu Abschnitt 1.2.3 in dem Sinne das ich oft nur die Richtung der Pfeile ändern musste. Wir erklären nun aber trotzdem ausführlich den Begriff des Kolimes.

Definition 1.2.28. Sei $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm. Ein²² **Kegel unter D** ist ein Paar (S, s) , bestehend aus

- einem Objekt S von \mathcal{C} (der **Spitze des Kegels**),
- einer Familie $s = (s_i)_{i \in \mathcal{I}}$ von Morphismen $s_i: D_i \rightarrow S$, für alle Objekte $i \in \mathcal{I}$,

so dass gilt:

- Für alle Morphismen $\alpha: i \rightarrow j$ in \mathcal{I} kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D_i & \xrightarrow{D(\alpha)} & D_j \\ & \searrow s_i & \swarrow s_j \\ & S & \end{array}$$

1.2.29. Ein Kegel unter D ist also ein Objekt S zusammen mit einer Familie kompatibler Morphismen von allen D_i .

Definition 1.2.30. Sei $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm. Ein Kegel (K, k) unter D heißt **Kolimes von D** , falls die folgende universelle Eigenschaft gilt: Für alle Kegel (S, s) unter D existiert genau ein Morphismus $f: K \rightarrow S$, so dass für alle Objekte $i \in \mathcal{I}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & D_i & \\ k_i \swarrow & & \searrow s_i \\ K & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

²¹Etwas genauer gilt: Existieren alle Limiten auf der rechten Seite von (1.2.12), so existiert auch der auf der linken Seite mit dem behaupteten Isomorphismus.

²²Ist *Kokegel* bessere Terminologie?

kommutativ ist (ein „besser merkbares“ Diagramm befindet sich 1.2.32). Wir notieren diesen Morphismus f oft als $\langle s \rangle = \langle s_i \rangle = \langle s_i \rangle_{i \in \mathcal{I}}$, was andeuten soll, dass er eindeutig durch die Familie der s_i bestimmt ist.²³ Die Morphismen k_i heißen dann **kanonische Morphismen**.²⁴

1.2.31. Ein Kolimes ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir sprechen deshalb von *dem* Kolimes und notieren ihn als

$$(\operatorname{colim}_{\mathcal{I}} D, \operatorname{in}) \quad \text{oder nachlässig als} \quad \operatorname{colim} D,$$

in Wirklichkeit meistens aber als

$$\operatorname{colim}_{i \in \mathcal{I}} D_i.$$

Die kanonischen Morphismen werden als

$$\operatorname{in}_j: D_j \rightarrow \operatorname{colim}_{i \in \mathcal{I}} D_i$$

notiert.

Bisweilen ist es auch angebracht, in der Notation zu erwähnen, in welcher Kategorie der Limes gebildet wird. Man mag dies etwa durch die Verwendung eines oberen Index andeuten, also durch $\operatorname{colim}^{\mathcal{C}} D$.

1.2.32. Die universelle Eigenschaft eines Limes wird durch das folgende Diagramm illustriert.

$$\begin{array}{ccc}
 D_j & \xrightarrow{\alpha} & D_k \\
 \operatorname{in}_j \searrow & & \swarrow \operatorname{in}_k \\
 & \operatorname{colim} D_i & \\
 s_j \searrow & \downarrow \exists! \langle s_i \rangle & \swarrow s_k \\
 & S &
 \end{array}$$

Beispiele 1.2.33 (Kolimiten zu einigen der Beispiele in 1.2.2). Sei \mathcal{C} eine Kategorie.

- (a) Ein Kolimes des Diagramms (1.2.1) ist dasselbe wie ein Koproduct $X \coprod Y$ von X und Y in \mathcal{C} im Sinne von [Sch20, Definition 3.6.10] (dieses mag oder mag nicht existieren).

Analog kann man eine Familie $(X_i)_{i \in I}$ von Objekten von \mathcal{C} als \mathcal{I} -förmiges Diagramm X in \mathcal{C} auffassen, wobei die Indexkategorie \mathcal{I} die diskrete Kategorie zur Indexmenge I ist. Ein Kolimes dieses Diagramms ist dasselbe wie ein Koproduct der X_i , in Formeln $\operatorname{colim}_{i \in \mathcal{I}} X_i = \coprod_{i \in I} X_i$ im Fall der Existenz.

- (b) Der Kolimes über das leere Diagramm ist dasselbe wie das initiale Objekt in \mathcal{C} .

Wir notieren das initiale Objekt einer Kategorie \mathcal{C} als $\operatorname{init}_{\mathcal{C}}$, falls es existiert. Beispielsweise ist $\operatorname{init}_{\text{Set}}$ die leere Menge, $\operatorname{init}_{\text{Top}}$ ist ebenfalls die leere Menge und $\operatorname{init}_{\text{Mod}(R)}$ ist der Nullmodul $\{0\}$.

- (c) Der Kolimes des Diagramms (1.2.2) ist langweilig, er ist durch Z zusammen mit den naheliegenden Morphismen gegeben.

- (d) Der Kolimes über ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xrightarrow{g} & Y \\
 f \downarrow & & \\
 X & &
 \end{array}$$

in \mathcal{C} ist nichts anderes als der Pushout $X \coprod_W Y$.

- (e) Sei $f: M \rightarrow N$ ein Morphismus von Moduln über einem Ring R . Dann ist der Kokern von f nichts anderes als der Kolimes des Diagramms

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & N \\
 & \searrow & \\
 & 0 &
 \end{array}$$

²³Ich hoffe, dass dieselbe Notation bei Limiten nicht zu Verwechslungen führt. Eventuell könnte man bei Kolimiten eine andere Klammerart verwenden?

²⁴Ich vermeide den Begriff *kanonische Inklusion* bewußt, denn im Allgemeinen sind die k_i keine Monomorphismen (was das kategorielle Analogon zu einer injektiven Abbildung von Mengen ist, siehe Definition 2.9.1).

in $\text{Mod}(R)$. Implizit wird hier (1.2.5) als Indexkategorie \mathcal{I} verwendet.

Hier kann man $\text{Mod}(R)$ auch durch die Kategorie $\text{Kom}(R)$ der Komplexe von R -Moduln ersetzen oder allgemeiner durch jede beliebige abelsche Kategorie.

(f) Den Kolimes über ein beliebiges Diagramm der Form

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \rightrightarrows \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y$$

in einer Kategorie nennt man auch den **Koegalisor** von f und g . Ein Diagramm $X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \rightrightarrows \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y \xrightarrow{c} C$ heißt **Koegalisor-Diagramm**, falls $c \circ f = c \circ g$ gilt und C ein Koegalisor von $X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \rightrightarrows \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y$ ist.

Für $\mathcal{C} = \text{Set}$ ist

$$\frac{Y}{\sim} = Y/\sim$$

ein Ko-Egalisor, wobei \sim die kleinste Äquivalenzrelation ist, für die $f(x) \sim g(x)$ für alle $x \in X$ gilt.

Analog wird der Ko-Egalisor in $\mathcal{C} = \text{Top}$ oder $\mathcal{C} = \text{Mod}(R)$ gebildet.

1.2.34. Die in den Definitionen 1.2.9 und 1.2.17 eingeführten Sprechweisen haben offensichtliche Varianten für Kolimiten, die wir im Folgenden verwenden.

Satz 1.2.35. *In der Kategorie Set der Mengen existieren alle Kolimiten: Ist D ein \mathcal{I} -förmiges Diagramm in Set , so gilt²⁵*

$$\text{colim } D = \frac{\bigsqcup_{i \in I} D_i}{\sim} = \left(\bigsqcup_{i \in I} D_i \right) / \sim,$$

wobei die kanonischen Morphismen von den offensichtlichen Inklusionen in die disjunkte Vereinigung herkommen und \sim die kleinste Äquivalenzrelation ist, so dass $x_i \sim D(\alpha)(x_i)$ für alle Morphismen $\alpha: i \rightarrow j$ in \mathcal{I} und alle $x_i \in D_i$ gilt.

Explizit kann man diese Äquivalenzrelation wie folgt beschreiben: Für Elemente $x_i \in D_i \subset \bigsqcup_{l \in I} D_l$ und $x_j \in D_j \subset \bigsqcup_{l \in I} D_l$ gilt genau dann $x_i \sim x_j$, wenn es ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} & & i_1 & & i_3 & \dots & i_{2n-1} \\ & \swarrow \alpha_1 & & \searrow \beta_1 & \swarrow \alpha_3 & & \searrow \beta_{2n-1} \\ & i = i_0 & & i_2 & & \dots & i_{2n} = j \end{array}$$

in \mathcal{I} und Elemente $y_1 \in D_{i_1}, y_3 \in D_{i_3}, \dots, y_{2n-1} \in D_{i_{2n-1}}$ gibt, so dass

- $x_i = D(\alpha_1)(y_1)$,
- $D(\beta_{r-1})(y_{r-1}) = D(\alpha_{r+1})(y_{r+1})$ für alle $r \in \{2, 4, \dots, 2n-2\}$,
- $x_j = D(\beta_{2n-1})(y_{2n-1})$

gelten.

Dieselbe Aussage gilt, wenn man Set durch Top ersetzt.²⁶

Beweis. Die universelle Eigenschaft des Kolimes ist offensichtlich erfüllt. □

Beispiel 1.2.36 (Geometrische Realisierung eines Simplizialkomplexes als Kolimes). Sei $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex. Die Menge \mathcal{K} der Simplizes ist per Inklusion partiell geordnet und kann somit als Kategorie aufgefasst werden (genau dann gibt es einen Morphismus $\sigma \rightarrow \tau$, wenn $\sigma \subset \tau$ gilt).

Wir definieren wir folgt einen Funktor

$$\mathcal{K} \rightarrow \text{Top}.$$

Einem q -Simplex $\sigma = \{\sigma_0, \dots, \sigma_q\} \in \mathcal{K}_q$ ordnen wir die konvexe Hülle $\text{conv}(\sigma) = \text{conv}(\sigma_0, \dots, \sigma_q) \subset \mathbb{R}\sigma_0 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}\sigma_q = \mathbb{R}^\sigma$ zu.

²⁵Das Symbol \bigsqcup meint die disjunkte Vereinigung, die in der Kategorie der Mengen das Koproduct ist.

²⁶Das Symbol \bigsqcup meint dann die mit der Finaltopologie versehene disjunkte Vereinigung, die in der Kategorie der topologischen Räume das Koproduct ist.

Einer Inklusion $\sigma \subset \tau$ von Simplizes alias einem Morphismus $\sigma \rightarrow \tau$ in \mathcal{K} ordnen wir die Inklusion $\text{konv}(\sigma) \subset \text{konv}(\tau)$ zu, die von der offensichtlichen Inklusion $\mathbb{R}^\sigma \subset \mathbb{R}^\tau$ herkommt.

Ist $\Delta(\mathcal{K})$ die in [Sch21, Definition 2.2.2] definierte geometrische Realisierung von \mathcal{K} , so bilden die offensichtlichen Abbildungen $\text{konv}(\sigma) \xrightarrow{\sim} \Delta(\sigma) \subset \Delta(\mathcal{K})$ einen Kegel über $\Delta(\mathcal{K})$. Nach der universellen Eigenschaft des Kolimes liefern sie eine stetige Abbildung

$$\text{colim}_{\sigma \in \mathcal{K}} \text{konv}(\sigma) \rightarrow \Delta(\mathcal{K}).$$

Sie ist ein Homöomorphismus: Leicht definiert man ihre Umkehrabbildung und zeigt, dass diese stetig ist.

1.2.37. Es ist nicht besonders erfreulich, mit der Beschreibung der Äquivalenzrelation in Satz 1.2.35 zu arbeiten. Oft hat jedoch die Indexkategorie \mathcal{I} gewisse Eigenschaften, die eine einfachere Beschreibung dieser Äquivalenzrelation gestatten, siehe (Beweis von) Satz 1.2.54.

Warnung 1.2.38. Im Gegensatz zur Situation für Limiten (siehe Satz 1.2.10) stimmen Kolimiten in Set nicht mit Kolimiten in $\text{Ab} = \text{Mod}(\mathbb{Z})$ oder $\text{Mod}(R)$ überein (für sogenannte filtrierende Kolimiten gilt dies aber doch, siehe Satz 1.2.54).

Dies sieht man schon im Spezialfall von endlichen Koproducten: Der Kolimes zweier Moduln M und N ist ihre direkte Summe, in Formeln $M \coprod N = M \oplus N$. Das Koproduct der unterliegenden Mengen ist aber die disjunkte Vereinigung, in Formeln $M \coprod N = M \sqcup N$. Noch einfacher kann man Koproducte über die leere Indexkategorie betrachten: Das initiale Objekt in einer Modulkategorie ist der Nullmodul 0 , das initiale Objekt in Set aber die leere Menge \emptyset .

Satz 1.2.39. Die Kategorie $\text{Mod}(R)$ aller Moduln über einem Ring R hat alle Kolimiten: Für ein \mathcal{I} -förmiges Diagramm in $\text{Mod}(R)$ ist der Kolimit durch $\frac{\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} D_i}{U}$ gegeben, wobei U der Untermodul ist, der von allen Elementen $x_i - D(\alpha)(x_i)$ erzeugt wird.

Beweis. Offensichtlich. □

Satz 1.2.40. Die Kategorie $\text{Set}_{\{*\}}$ der punktierten Mengen hat alle Kolimiten: Ist $(D_i, b_i)_{i \in \mathcal{I}}$ ein \mathcal{I} -förmiges Diagramm punktierter Mengen, so betrachte man auf der disjunkten Vereinigung $\{*\} \sqcup (\bigsqcup_{i \in \mathcal{I}} D_i)$ die kleinste Äquivalenzrelation \approx , so dass $x_i \approx D(\alpha)(x_i)$ für alle Morphismen $\alpha: i \rightarrow j$ in \mathcal{I} und alle $x_i \in D_i$ und außerdem $b_i \approx *$ für alle $i \in \mathcal{I}$ gelten. Dann ist $(\{*\} \sqcup (\bigsqcup_{i \in \mathcal{I}} D_i)) / \approx$ mit der Klasse von $*$ als Basispunkt der Kolimes unseres Diagramms.

Die analoge Aussage gilt für die Kategorie $\text{Top}_{\{*\}}$ der punktierten topologischen Räume.

Beweis. Offensichtlich. (Wir betrachten $\{*\} \sqcup (\bigsqcup_{i \in \mathcal{I}} D_i)$ statt $(\bigsqcup_{i \in \mathcal{I}} D_i)$, damit auch im Fall $\mathcal{I} = \emptyset$ alles gut geht.) □

1.2.41. Auch viele andere Kategorien haben alle Kolimiten, vgl. [Wik20, Cocomplete category]. Beispielsweise hat Grp alle Kolimiten, aber die Konstruktion ist aufwändiger als für die oben erwähnten Kategorien, wie wir das ja bereits bei der Konstruktion von Pushouts gesehen haben (siehe [Sch20, Satz 3.9.13]).

Beispiel 1.2.42. Sei eine Menge X die Vereinigung $X = U \cup V$ zweier Teilmengen. Dann ist X der Kolimes (= Pushout) des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \\ U & & \end{array}$$

in Set . Dies ist nur eine Umformulierung der Trivialität, dass eine Abbildung $X \rightarrow Y$ in eine beliebige andere Menge Y „dasselbe“ ist wie zwei Abbildungen $U \rightarrow Y$ und $V \rightarrow Y$, die auf $U \cap V$ übereinstimmen.

Beispiel 1.2.43. Sei $X = U \cup V$ eine offene Überdeckung eines topologischen Raums X . Dann ist X der Kolimes (= Pushout) des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \\ U & & \end{array}$$

in Top. (Die Aussage bleibt korrekt, wenn $X = U \cup V$ eine abgeschlossene Überdeckung ist.) ²⁷

Ende der 3. Vorlesung am 20.04.2021.

1.2.44 (Kolimes als Funktor, vgl. 1.2.14). Sei $\tau: D \Rightarrow E$ ein Morphismus von Diagrammen $D, E: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$. Existieren die beiden Kolimiten $\operatorname{colim} D$ und $\operatorname{colim} E$, so folgt aus der universellen Eigenschaft von $\operatorname{colim} D$ sofort, dass es genau einen Morphismus $\operatorname{colim} D \rightarrow \operatorname{colim} E$ gibt, den wir $\operatorname{colim} \tau = \operatorname{colim}_{\mathcal{I}} \tau$ nennen, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{colim} D & \xrightarrow{\exists! \operatorname{colim} \tau} & \operatorname{colim} E \\ \uparrow \operatorname{in}_i & & \uparrow \operatorname{in}_i \\ D_i & \xrightarrow{\tau_i} & E_i \end{array}$$

für alle Objekte $i \in \mathcal{I}$ kommutiert.

Sind \mathcal{I} und \mathcal{C} Kategorien, so dass alle \mathcal{I} -förmigen Diagramme in \mathcal{C} einen Kolimes haben, so ist

$$\begin{aligned} \operatorname{colim} &= \operatorname{colim}_{\mathcal{I}}: \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{C}, \\ D &\mapsto \operatorname{colim}_{\mathcal{I}} D, \\ \tau &\mapsto \operatorname{colim}_{\mathcal{I}} \tau, \end{aligned}$$

ein Funktor.

1.2.45 (Wechsel der Indexkategorien beim Kolimes, vgl. 1.2.16). Sei $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm und $r: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$ ein Funktor, so dass $\operatorname{colim}_{\mathcal{I}} D$ und $\operatorname{colim}_{\mathcal{J}} (D \circ r)$ existieren. Dann gibt es genau einen Morphismus $\operatorname{colim}_{\mathcal{J}} (D \circ r) \rightarrow \operatorname{colim}_{\mathcal{I}} D$, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{colim}_{\mathcal{J}} (D \circ r) & \xrightarrow{\exists!} & \operatorname{colim}_{\mathcal{I}} D \\ \swarrow \operatorname{in}_j & & \nearrow \operatorname{in}_{r(j)} \\ & D_{r(j)} & \end{array}$$

für alle Objekte $j \in \mathcal{J}$ kommutativ macht.

1.2.46 (vgl. 1.2.18). Seien $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor und $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm. Haben D und $F \circ D$ Kolimiten, so gibt es genau einen Morphismus

$$\operatorname{colim}(F \circ D) \rightarrow F(\operatorname{colim} D),$$

so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{colim}(F \circ D) & \xrightarrow{\exists!} & F(\operatorname{colim} D) \\ \swarrow \operatorname{in}_i & & \nearrow F(\operatorname{in}_i) \\ & F(D_i) & \end{array}$$

für alle $i \in \mathcal{I}$ kommutiert. Dieser Morphismus ist genau dann ein Isomorphismus, wenn F den Kolimes $\operatorname{lim} D$ erhält.

²⁷Dies läßt sich zu beliebigen offenen Überdeckungen verallgemeinern: Sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung eines topologischen Raumes X . Betrachte die folgende Kategorie \mathcal{I} : Ihre Objektmenge ist $\mathcal{U} \sqcup (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$. Außer den Identitäten jedes Objekts gibt es nur genau einen Morphismus $(U, V) \rightarrow U$ und genau einen Morphismus $(U, V) \rightarrow V$ für alle $U, V \in \mathcal{U}$. Die Verknüpfungen sind die einzig möglichen. Dann ist X der Kolimes des Funktors

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &\rightarrow \operatorname{Top}, \\ U &\mapsto U, \\ (U, V) &\mapsto U \cap V, \end{aligned}$$

der auf Morphismen in der naheliegenden Weise definiert ist: Aus [Sch20, Proposition 2.4.13.(a)] folgt sofort, dass X die geforderte universelle Eigenschaft des Kolimes hat. Dieselbe Aussage stimmt für endliche abgeschlossene bzw. allgemeiner für lokal endliche abgeschlossene Überdeckungen von X nach [Sch20, Proposition 2.4.13.(b)] bzw. Aufgabe 2.4.18].

1.2.47 (vgl. 1.2.21). Sei $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm. Dann gilt nach Satz 1.2.10 für jedes Objekt $S \in \mathcal{C}$

$$(1.2.14) \quad \lim_{i \in \mathcal{I}^{\text{op}}} \mathcal{C}(D_i, S) = \left\{ s = (s_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{C}(D_i, S) \mid (S, s) \text{ ist Kegel unter } D \right\}.$$

Man beachte, dass unter dem Limesymbol die opponierte Kategorie \mathcal{I}^{op} steht, denn $\mathcal{C}(-, S) \circ D$ ist ein Diagramm $\mathcal{I}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$.

Proposition 1.2.48 (vgl. Proposition 1.2.22). *Genau dann ist ein Kegel (K, k) unter einem Diagramm $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Kolimes dieses Diagramms, wenn die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(K, S) &\rightarrow \lim_{i \in \mathcal{I}^{\text{op}}} \mathcal{C}(D_i, S), \\ f &\mapsto (f \circ k_i)_{i \in \mathcal{I}} \end{aligned}$$

von Mengen für alle $S \in \mathcal{C}$ bijektiv ist.

Insbesondere gilt: Hat ein Diagramm $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ einen Kolimes $\text{colim}_{i \in \mathcal{I}} D_i$, so ist die offensichtliche Abbildung für alle $S \in \mathcal{C}$ eine Bijektion

$$\mathcal{C}(\text{colim}_{i \in \mathcal{I}} D_i, S) \xrightarrow{\sim} \lim_{i \in \mathcal{I}^{\text{op}}} \mathcal{C}(D_i, S).$$

28

Beweis. Wegen (1.2.14) ist die Behauptung nur eine Umformulierung der definierenden universellen Eigenschaft des Kolimes (siehe Definition 1.2.30). \square

Satz 1.2.49 (vgl. Satz 1.2.23). *Jeder linksadjungierte Funktor erhält alle Kolimiten.*

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 1.2.23 unter Verwendung von Proposition 1.2.48. \square

Beispiel 1.2.50. Der Funktor Freie-abelsche-Gruppe $\mathbb{Z}(-): \text{Set} \rightarrow \text{Ab}$ ist ein linksadjungierter (sein rechtsadjungierter ist der Vergissfunktor). Also erhält er alle Kolimiten. Dies gibt eine kategorielle Begründung der Formel $\mathbb{Z}(X \sqcup Y) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}X \oplus \mathbb{Z}Y$.

Ebenso ist der Funktor Freie-Gruppe $F: \text{Set} \rightarrow \text{Grp}$ linksadjungiert (sein rechtsadjungierter ist der Vergissfunktor) und erhält somit alle Kolimiten. Beispielsweise gilt $F(X \sqcup Y) \xrightarrow{\sim} F(X) \amalg F(Y)$, wobei rechts das Koprodukt von Gruppen steht (siehe [Sch20, Satz 3.9.2]).

1.2.51. Wir besprechen nun filtrierende Kolimiten und zeigen, dass sie in vielen der vertrauten Kategorien in einfacher und gleicher Weise berechnet werden können (siehe Satz 1.2.54).

Definition 1.2.52. Eine Kategorie \mathcal{I} heißt **filtrierend**²⁹, wenn

- es ein Objekt $i \in \mathcal{I}$ gibt;
- für je zwei Objekte $i, j \in \mathcal{I}$ ein Objekt $k \in \mathcal{I}$ zusammen mit Morphismen $i \rightarrow k$ und $j \rightarrow k$ existiert;
- für je zwei parallele Morphismen $i \begin{smallmatrix} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{smallmatrix} j$ in \mathcal{I} gibt es (ein Objekt $k \in \mathcal{I}$ und) einen Morphismus $\gamma: j \rightarrow k$ in \mathcal{I} mit $\gamma \circ \alpha = \gamma \circ \beta$.

Ein **filtrierendes Diagramm** ist ein Diagramm $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ mit filtrierender Indexkategorie \mathcal{I} . Ein Kolimes über ein filtrierendes Diagramme wird als **filtrierender Kolimes** bezeichnet.

Beispiel 1.2.53. Sei (I, \leq) eine partiell geordnete Menge. Falls $I \neq \emptyset$ gilt und es für alle $i, j \in I$ ein $k \in I$ mit $i \leq k$ und $j \leq k$ gibt, so ist die zu (I, \leq) assoziierte Kategorie (siehe [Sch20, Beispiel A.1.5.(f)]) filtrierend.

Satz 1.2.54 (Filtrierende Kolimiten von Mengen sind einfach zu berechnen). *Filtrierende Kolimiten in der Kategorie Set der Mengen können wie folgt beschrieben werden: Ist $D: \mathcal{I} \rightarrow \text{Set}$ ein filtrierendes Diagramm, so ist*

$$\text{colim } D = \underbrace{\bigsqcup_{i \in I} D_i}_{\sim}$$

²⁸ Mit anderen Worten bildet der Funktor $\mathcal{C}(-, S): \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ Limiten in \mathcal{C}^{op} alias Kolimiten in \mathcal{C} auf Limiten in Set ab. Etwas abstrakter und mit Aufgabe 1.2.68: Der Yoneda-Funktor $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{C}}$, $D \mapsto \mathcal{C}(D, -)$ erhält alle Limiten.

²⁹ Oft wird auch der Begriff *filtriert* verwendet; er gefällt mir aber nicht so gut, denn es klingt so, als ob die Kategorie eine Filtrierung trägt (was zu definieren wäre und wohl ein zusätzliches Datum beinhalten würde).

ein Kolimes von D , wobei die kanonischen Morphismen von den offensichtlichen Inklusionen in die disjunkte Vereinigung herkommen und \sim die folgende Äquivalenzrelation ist: Für Elemente $x_i \in D_i \subset \coprod_{l \in I} D_l$ und $x_j \in D_j \subset \coprod_{l \in I} D_l$ gilt genau dann $x_i \sim x_j$, wenn es Morphismen $\alpha: i \rightarrow k$ und $\beta: j \rightarrow k$ mit $D(\alpha)(x_i) = D(\beta)(x_j)$ gibt.

Dieselbe Aussage (mit derselben expliziten Beschreibung des filtrierenden Kolimes) gilt, wenn man die Kategorie Set durch eine der folgenden Kategorien ersetzt:

- Top ;
- Grp ;
- $\text{Mod}(R)$, wobei R ein Ring ist; insbesondere $\text{Ab} = \text{Mod}(\mathbb{Z})$;
- Ring ;
- $\text{Set}_{\{*\}}$;
- $\text{Top}_{\{*\}}$;

Slogan 1.2.55 (zu Satz 1.2.54). Filtrierende Kolimiten in Set , Top , Grp , $\text{Mod}(R)$, Ab , Ring , $\text{Set}_{\{*\}}$, $\text{Top}_{\{*\}}$, stimmen überein und können nach demselben einfachen Rezept berechnet werden.

Beweis. Für Set überzeugt man sich leicht, dass die in Satz 1.2.35 beschriebene Äquivalenzrelation unter der Annahme, dass \mathcal{I} filtrierend ist, die hier gegebene einfache Beschreibung hat.

Ist \mathcal{C} eine der anderen angegebenen Kategorien, so hat die Menge $\frac{\bigsqcup_{i \in I} D_i}{\sim}$ in naheliegender Weise die Struktur eines Objekts von \mathcal{C} :

- $\mathcal{C} = \text{Top}$: Versieh $\frac{\bigsqcup_{i \in I} D_i}{\sim}$ mit der Finaltopologie.
- $\mathcal{C} = \text{Grp}$: Definiere die Verknüpfung wie folgt: Seien x und y zwei Elemente von $\frac{\bigsqcup_{i \in I} D_i}{\sim}$. Repräsentiere x durch $x_i \in D_i$ und y durch $x_j \in D_j$. Weil \mathcal{I} filtrierend ist, gibt es Morphismen $\alpha: i \rightarrow k$ und $\beta: j \rightarrow k$. Die Äquivalenzklasse des Produkts $D(\alpha)(x_i) \cdot D(\beta)(x_j)$ in D_k hängt nicht von den Wahlen von $i, j, x_i, x_j, k, \alpha$ und β ab, weil \mathcal{I} filtrierend ist (dies verwendet natürlich auch, dass alle Morphismen $D(\alpha): D_i \rightarrow D_j$ Grp-morphismen sind). Wir definieren $x \cdot y$ als diese Klasse und sehen leicht, dass $\frac{\bigsqcup_{i \in I} D_i}{\sim}$ mit dieser Verknüpfung eine Gruppe ist.
- $\mathcal{C} \in \{\text{Mod}(R), \text{Ab}, \text{Ring}\}$: Ähnlich wie im Fall $\mathcal{C} = \text{Grp}$.
- $\mathcal{C} \in \text{Set}_{\{*\}}$: Da \mathcal{I} filtrierend ist, sind die ausgezeichneten Elemente aller D_i äquivalent. Da außerdem \mathcal{I} ein Element hat, definiert dies ein ausgezeichnetes Element von $\frac{\bigsqcup_{i \in I} D_i}{\sim}$.
- $\mathcal{C} \in \text{Top}_{\{*\}}$: Klar nach dem obigen.

Die Abbildungen $D_i \rightarrow \frac{\bigsqcup_{i \in I} D_i}{\sim}$ sind dann Morphismen in \mathcal{C} und definieren einen Kegel unter D . Leicht prüft man, dass er ein Kolimes ist. \square

1.2.56. Sei $D: \mathcal{I} \rightarrow \text{Set}$ ein filtrierendes Diagramm von Mengen. Dann hat der filtrierende Kolimes $\text{colim } D$ nach Satz 1.2.54 offensichtlich die folgenden nützlichen Eigenschaften.

- Jedes Element des Kolimes kommt von einem geeigneten D_i her.³⁰
In Formeln: Für jedes $x \in \text{colim } D$ existieren ein $i \in \mathcal{I}$ und ein $x_i \in D_i$ mit $\text{in}_i(x_i) = x$.
- Genauer gilt: Seien endlich viele Elemente $x(0), x(1), \dots, x(n) \in \text{colim } D$ gegeben. Dann existiert ein $i \in \mathcal{I}$ und Elemente $x_0, \dots, x_n \in D_i$ mit $\text{in}_i(x_s) = x(s)$ für alle $s = 0, \dots, n$.
- Zwei Elemente $x_i \in D_i$ und $x_j \in D_j$ werden genau dann im Kolimes gleich, wenn sie bereits in einem D_k gleich werden.
In Formeln gilt für alle $i, j \in \mathcal{I}$: Sind $x_i \in D_i$ und $x_j \in D_j$ beliebige Elemente, so gilt genau dann $\text{in}_i(x_i) = \text{in}_j(x_j)$, wenn es Morphismen $\alpha: i \rightarrow k$ und $\beta: j \rightarrow k$ mit $D(\alpha)(x_i) = D(\beta)(x_j)$ gibt.
Im Fall $i = j$ kann man dabei zusätzlich $\alpha = \beta$ annehmen.

Die drei genannten Aussagen gelten natürlich auch für alle anderen in Satz 1.2.54 genannten Kategorien.

³⁰Dies gilt auch ohne die Annahme, dass \mathcal{I} filtrierend ist.

1.2.57. Satz 1.2.54 zeigt: Sämtliche Kategorien im folgenden Diagramm besitzen filtrierende Kolimiten³¹ und alle Vergissfunktoren kommutieren mit diesen.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Mod}(R) & \longrightarrow & \text{Ab} & \longrightarrow & \text{Grp} & \longrightarrow & \text{Set}_{\{*\}/} & \longrightarrow & \text{Set} \\
 & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \text{Ring} & & & & \text{Top}_{\{*\}/} & \longrightarrow & \text{Top}
 \end{array}$$

32

1.2.58. Wir erklären nun, dass filtrierende Kolimiten Exaktheit erhalten (siehe Proposition 1.2.61).

1.2.59. Bekanntlich heißt eine Sequenz $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ in $\text{Mod}(R)$ exakt bei M , wenn $\text{im}(f) = \ker(g)$ gilt.

Diese Begriffsbildung kann man etwas verallgemeinern: Eine Sequenz $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ in der Kategorie $\text{Set}_{\{*\}/}$ der punktierten Mengen heißt **exakt bei M** , falls $f(L) = g^{-1}(*_N)$ gilt, wobei $*_N$ der Basispunkt von N ist. Längere Sequenzen punktierter Mengen heißen exakt, wenn sie an jeder Stelle exakt sind.

Eine Sequenz $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ von R -Moduln ist somit genau dann im alten Sinne exakt, wenn ihr Bild unter dem Vergissfunktor $\text{Mod}(R) \rightarrow \text{Set}_{\{*\}/}$ exakt ist.

Analog nennen wir eine Sequenz von Gruppen (oder Monoiden oder von Objekten einer beliebigen Kategorie mit einem offensichtliche Vergissfunktor nach $\text{Set}_{\{*\}/}$) exakt, wenn die unterliegende Sequenz punktierter Mengen exakt ist.

Definition 1.2.60. Sei \mathcal{I} eine Indexkategorie. Eine Sequenz $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ von \mathcal{I} -förmigen Diagrammen punktierter Mengen³³ (bzw. R -Moduln bzw. Gruppen bzw. Monoiden) heißt **exakt bei M** , falls für jedes $i \in \mathcal{I}$ die Sequenz $L_i \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} N_i$ exakt ist. Längere Sequenzen heißen exakt, wenn sie an jeder Stelle exakt sind.

Proposition 1.2.61 (Exaktheit filtrierender Kolimiten von punktierten Mengen bzw. von Gruppen bzw. von Moduln). *Sei \mathcal{I} eine filtrierende Kategorie. Dann erhält der Funktor „filtrierender Kolimes“*

$$\text{colim}: (\text{Set}_{\{*\}/})^{\mathcal{I}} \rightarrow \text{Set}_{\{*\}/}$$

Exaktheit: Ist $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ eine exakte Sequenz von \mathcal{I} -förmigen Diagrammen punktierter Mengen, so ist

$$\text{colim}_{\mathcal{I}} L \xrightarrow{\text{colim } f} \text{colim}_{\mathcal{I}} M \xrightarrow{\text{colim } g} \text{colim}_{\mathcal{I}} N$$

eine exakte Sequenz punktierter Mengen.

Diese Aussage bleibt korrekt, wenn man $\text{Set}_{\{\}/}$ durch Grp oder $\text{Mod}(R)$ (und insbesondere Ab) ersetzt.*

Beweis. Wir verwenden 1.2.56 mehrfach.

Sicherlich bildet $\text{colim } g$ das Bild von $\text{colim } f$ auf den Basispunkt $*_{\text{colim } N}$ von $\text{colim } N$ ab: Jedes Element $l \in \text{colim } L$ hat die Form $\text{in}_i(l_i)$ für geeignete $i \in \mathcal{I}$ und $x_i \in L_i$ und es gilt dann wegen der Exaktheitsannahme

$$(\text{colim } g)((\text{colim } f)(l)) = (\text{colim } g)((\text{colim } f)(\text{in}_i(l_i))) = \text{in}_i(g_i(f_i(l_i))) = \text{in}_i(*_{N_i}) = *_{\text{colim } N}.$$

Jedes Element $x \in \text{colim } M$ hat die Gestalt $x = \text{in}_i(m_i)$ für ein geeignetes Objekt $i \in \mathcal{I}$ und ein geeignetes Element $m_i \in M_i$. Wir nehmen nun an, dass x auf den Basispunkt $*_{\text{colim } N}$ abgebildet wird:

$$*_{\text{colim } N} = (\text{colim } g)(x) = (\text{colim } g)(\text{in}_i(m_i)) = \text{in}_i(g_i(m_i)).$$

Wir erinnern daran, dass $*_{\text{colim } N} = \text{in}_i(*_{N_i})$ gilt. Also muss es einen Morphismus $\alpha: i \rightarrow k$ mit

$$*_{N_k} = N(\alpha)(*_{N_i}) = N(\alpha)(g_i(m_i)) = g_k(M(\alpha)(m_i))$$

³¹In Wirklichkeiten besitzen sie alle Kolimiten, aber für Grp und Ring haben wir das nicht erklärt.

³²Siehe Aufgabe 1.2.76 für eine kategorielle Begründung, warum dies für Grp und $\text{Grp} \rightarrow \text{Set}$ zutrifft; dazu wird Aufgabe 1.2.75 verwendet. Die analoge Argumentation funktioniert auch für alle Kategorien im obigen Diagramm außer Top .

³³Also eine Sequenz in der Kategorie $(\text{Set}_{\{*\}/})^{\mathcal{I}}$, die man auch als $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ schreiben könnte.

geben. Weil $L_k \xrightarrow{f_k} M_k \xrightarrow{g_k} N_k$ exakt ist, gibt es ein $l_k \in L_k$ mit $f_k(l_k) = M(\alpha)(m_i)$. Es folgt

$$(\operatorname{colim} f)(\operatorname{in}_k(l_k)) = \operatorname{in}_k(f_k(l_k)) = \operatorname{in}_k(M(\alpha)(m_i)) = \operatorname{in}_i(m_i) = x.$$

Die entsprechende Aussage für Gruppen oder R -Moduln wird genauso bewiesen. \square

Beispiel 1.2.62. Sei \mathcal{I} die folgende, nicht filtrierende Kategorie.

$$\begin{array}{c} 2 \\ \uparrow \uparrow \\ \alpha \quad \beta \\ \uparrow \\ 1 \end{array}$$

Die Sequenz

$$\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \uparrow \\ 0 \quad 0 \\ \uparrow \\ 0 \end{array}} \xrightarrow{0} \boxed{\begin{array}{c} \mathbb{Z}^2 \\ \uparrow \uparrow \\ 0 \quad 0 \\ \uparrow \\ 0 \end{array}} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \operatorname{id} \oplus \operatorname{id} \\ 0 \end{pmatrix}} \boxed{\begin{array}{c} \mathbb{Z}^2 \\ \uparrow \uparrow \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad 0 \\ \uparrow \\ \mathbb{Z} \end{array}} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{id} \end{pmatrix}} \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \uparrow \\ 0 \quad 0 \\ \uparrow \\ \mathbb{Z} \end{array}} \xrightarrow{0} \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \uparrow \\ 0 \quad 0 \\ \uparrow \\ 0 \end{array}} \end{array}$$

\mathcal{I} -förmiger Diagramme abelscher Gruppen ist exakt (eine „kurze exakte Sequenz“). Ihr Kolimes (= nimm jeweils den Kokern der linken vertikalen Abbildung, da die rechte Vertikale stets Null ist) ist die nicht exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\langle \operatorname{id}, \operatorname{id} \rangle} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

die nicht exakt ist. Dies zeigt, dass nicht filtrierende Kolimiten im Allgemeinen nicht exakt sind.

Der Limes der obigen Sequenz (= nimm jeweils den Kern der linken vertikalen Abbildung) ist die nicht exakte Sequenz

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Dies zeigt, dass Limiten im Allgemeinen nicht exakt sind.^{34 35}

Ende der 4. Vorlesung am 22.04.2021.

Hausaufgaben:

- (1) Aufgabe 1.2.25: $A \times B = B \times A$ etc.
- (2) Aufgabe 1.2.67: Limiten und Kolimiten bei volltreuen Funktoren
- (3) Aufgabe 1.2.68: Limiten und Kolimiten in Funktorkategorien werden objektweise berechnet
- (4) Aufgabe 1.2.69: Limiten und Kolimiten von Komplexen

Definition 1.2.63. Sei \mathcal{I} eine filtrierende Kategorie. Eine volle Unterkategorie $\mathcal{K} \subset \mathcal{I}$ heißt **konfinal**³⁶, wenn jedes Objekt $i \in \mathcal{I}$ einen Morphismus $i \rightarrow k$ in ein Objekt $k \in \mathcal{K}$ hat.

1.2.64. Jede konfinale Unterkategorie ist automatisch filtrierend.

Beispiel 1.2.65. Falls eine filtrierende Kategorie \mathcal{I} ein terminales Objekt $*_{\mathcal{I}}$ hat, so ist die volle Unterkategorie, die genau aus diesem einen Objekt (und der Identität) besteht, konfinal.

Proposition 1.2.66. Seien \mathcal{I} eine filtrierende Kategorie, $\mathcal{K} \subset \mathcal{I}$ eine konfinale Unterkategorie und $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm. Dann existiert $\operatorname{colim}_{\mathcal{K}} D|_{\mathcal{K}}$ genau dann, wenn $\operatorname{colim}_{\mathcal{I}} D$ existiert, und in diesem Fall ist der in 1.2.45 definierte Morphismus ein Isomorphismus

$$\operatorname{colim}_{\mathcal{K}} D|_{\mathcal{K}} \xrightarrow{\sim} \operatorname{colim}_{\mathcal{I}} D.$$

³⁴Kofiltrierende Limiten (das duale zu filtrierenden Limiten) bespreche ich nicht separat.

³⁵Wer das Schlangenlemma oder allgemeiner die lange exakte Homologiesequenz (siehe [Sch21, Satz B.3.4]) kennt, versteht besser, inwiefern die beiden obigen nicht exakten Sequenzen Teil einer langen exakten Sequenz sind.

³⁶In der Literatur meist konfinal, aber ich folge hier Soergel, der die Verwendung der Vorsilbe *kon* kritisiert.

Beweis. (Wir haben versucht, das Argument formal hinzuschreiben, empfehlen dem Leser aber, selbst einen Beweis zu finden – zumindest im Beispiel 1.2.65.)

Sei $S \in \mathcal{C}$ ein Objekt. Wir behaupten, dass die Restriktionsabbildung

$$(1.2.15) \quad \lim_{i \in \mathcal{I}^{\text{op}}} \mathcal{C}(D_i, S) \rightarrow \lim_{k \in \mathcal{K}^{\text{op}}} \mathcal{C}(D_k, S),$$

$$s = (s_i)_{i \in \mathcal{I}} \mapsto s|_{\mathcal{K}} = (s_k)_{k \in \mathcal{K}}$$

bijektiv ist; man kann sie nach (1.2.14) als Abbildung zwischen Mengen von Kegeln unter D bzw. $D|_{\mathcal{K}}$ mit Spitze S interpretieren.

Injektivität: Dies folgt daraus, dass jedes Objekt $i \in \mathcal{I}$ einen Morphismus $\alpha: i \rightarrow k$ in ein Objekt $k \in \mathcal{K}$ hat und folglich

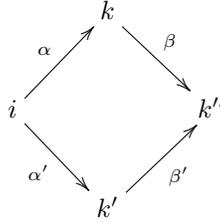
$$s_i = s_k \circ D(\alpha)$$

gilt.

Surjektivität: Sei $(t_k)_{k \in \mathcal{K}}$ ein Element der rechten Seite. Für jedes $i \in \mathcal{I}$ gibt es einen Morphismus $\alpha: i \rightarrow k$ in ein Objekt $k \in \mathcal{K}$. Definiere s_i als Verknüpfung

$$s_i := t_k \circ D(\alpha): D_i \xrightarrow{D(\alpha)} D_k \xrightarrow{t_k} S.$$

A priori hängt diese Verknüpfung von der Wahl von k und α ab, aber andere Wahlen führen zum selben Ergebnis: Sei $\alpha': i \rightarrow k'$ ein anderer Morphismus in ein Objekt $k' \in \mathcal{K}$. Da \mathcal{I} filtrierend und $\mathcal{K} \subset \mathcal{I}$ konfinal sind, gibt es ein kommutatives Diagramm



mit $k'' \in \mathcal{K}$, woraus wie gewünscht

$$t_k \circ D(\alpha) = t_{k''} \circ D(\beta) \circ D(\alpha) = t_{k''} \circ D(\beta') \circ D(\alpha') = t_{k'} \circ D(\alpha')$$

folgt.

Daraus folgt insbesondere $s_i = t_i$ im Fall $i \in \mathcal{K}$ (denn dann ist $\alpha = \text{id}_i$ eine mögliche Wahl).

Um zu zeigen, dass die Familie $(s_i)_{i \in \mathcal{I}}$ das gesuchte Urbild ist, müssen wir nur zeigen, dass die s_i kompatibel mit Morphismen in \mathcal{I} sind. Sei also $\gamma: i \rightarrow i'$ ein Morphismus in \mathcal{I} . Da $\mathcal{K} \subset \mathcal{I}$ konfinal sind, gibt es ein $\tilde{k} \in \mathcal{K}$ und einen Morphismus $\tilde{\alpha}: i' \rightarrow \tilde{k}$ in \mathcal{I} . Aus der oben beobachteten Unabhängigkeit von Wahlen folgt wie gewünscht

$$s_{i'} \circ D(\gamma) = t_{\tilde{k}} \circ D(\tilde{\alpha}) \circ D(\gamma) = t_{\tilde{k}} \circ D(\tilde{\alpha} \circ \gamma) = s_i.$$

Insgesamt zeigt dies die Bijektivität von (1.2.15).

Die restlichen Behauptungen folgen nun aus Proposition 1.2.48. Im Detail geht das etwa wie folgt.

Wir nehmen nun an, dass der Kolimes $\text{colim}_{\mathcal{I}} D = (\text{colim}_{\mathcal{I}} D, (\text{in}_i)_{i \in \mathcal{I}})$ existiert. Dann haben wir für jedes $S \in \mathcal{C}$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C}(\text{colim}_{\mathcal{I}} D, S) & \\ f \mapsto (f \circ \text{in}_i)_{i \in \mathcal{I}} \swarrow & & \searrow f \mapsto (f \circ \text{in}_k)_{k \in \mathcal{K}} \\ \lim_{i \in \mathcal{I}^{\text{op}}} \mathcal{C}(D_i, S) & \xrightarrow[\text{(1.2.15)}]{\sim} & \lim_{k \in \mathcal{K}^{\text{op}}} \mathcal{C}(D_k, S). \end{array}$$

Der Pfeil nach links unten ist nach Proposition 1.2.48 bijektiv. Somit ist auch der Pfeil nach rechts unten für alle $S \in \mathcal{C}$ bijektiv, was nach Proposition 1.2.48 bedeutet, dass $(\text{colim}_{\mathcal{I}} D, (\text{in}_k)_{k \in \mathcal{K}})$ ein Kolimes von $D|_{\mathcal{K}}$ ist.

Wir nehmen nun an, dass der Kolimes $\text{colim}_{\mathcal{K}} D|_{\mathcal{K}} = (\text{colim}_{\mathcal{K}} D|_{\mathcal{K}}, (\text{in}_k)_{k \in \mathcal{K}})$ existiert. Er ist ein Kegel unter $D|_{\mathcal{K}}$ und muss zunächst zu einem Kegel unter D erweitert werden. Die Bijektion (1.2.15) von Kegeln unter D bzw. $D|_{\mathcal{K}}$ mit fixierter Spitze S , angewendet auf $S = \text{colim}_{\mathcal{K}} D|_{\mathcal{K}}$, liefert eindeutige Morphismen

$\text{in}_i: D_i \rightarrow \text{colim}_{\mathcal{K}} D|_{\mathcal{K}}$ für alle $i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{K}$, so dass $(\text{colim}_{\mathcal{K}} D|_{\mathcal{K}}, (\text{in}_i)_{i \in \mathcal{I}})$ ein Kegel unter D ist. Dies gestattet es, das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C}(\text{colim}_{\mathcal{K}} D|_{\mathcal{K}}, S) & \\ f \mapsto (f \circ \text{in}_i)_{i \in \mathcal{I}} \swarrow & & \searrow f \mapsto (f \circ \text{in}_k)_{k \in \mathcal{K}} \\ \lim_{i \in \mathcal{I}^{\text{op}}} \mathcal{C}(D_i, S) & \xrightarrow[\text{(1.2.15)}]{\sim} & \lim_{k \in \mathcal{K}^{\text{op}}} \mathcal{C}(D_k, S). \end{array}$$

zu betrachten. Ähnlich wie oben zeigt Proposition 1.2.48, dass der Pfeil nach rechts unten bijektiv ist; dann ist auch der Pfeil nach links unten für alle $S \in \mathcal{S}$ bijektiv, was nach Proposition 1.2.48 bedeutet, dass $(\text{colim}_{\mathcal{K}} D|_{\mathcal{K}}, (\text{in}_i)_{i \in \mathcal{I}})$ der Kolimes von D ist.

Existiert also einer der Kolimiten, so auch der andere, und der angegebene Morphismus ist ein Isomorphismus.³⁷ \square

1.2.4. Diverse Aufgaben zu Limiten und Kolimiten.

Aufgabe 1.2.67 (Limiten und Kolimiten bei volltreuen Funktoren). Sei $V: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{C}$ ein volltreuer Funktor und sei $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{U}$ ein Diagramm. Existiert der Limes von $VD = V \circ D$ und liegt dieser im Wesentlichen Bild von V , so existiert auch der Limes von D und der kanonische Morphismus ist ein Isomorphismus $V(\lim D) \xrightarrow{\sim} \lim VD$. Analoges gilt für Kolimiten.

Bemerkung: Oft wird diese Aussage auf volle Unterkategorien $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$ angewendet.

Aufgabe 1.2.68 (Limiten und Kolimiten in Funktorkategorien werden objektweise berechnet). Seien \mathcal{C} und \mathcal{A} Kategorien. Wir betrachten die Kategorie $\mathcal{C}^{\mathcal{A}}$ der Funktoren und behaupten, dass mit \mathcal{C} auch $\mathcal{C}^{\mathcal{A}}$ alle Limiten (und Kolimiten) hat. Genauer:

Sei \mathcal{I} eine Indexkategorie. Wir nehmen an, dass \mathcal{C} alle \mathcal{I} -Limiten hat. Dann hat auch $\mathcal{C}^{\mathcal{A}}$ alle \mathcal{I} -Limiten und diese werden im folgenden Sinne objektweise³⁸ berechnet:

Ist $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{A}}$ ein Diagramm von Funktoren, so ist der wie folgt definierte Kegel $(L, (p_i)_{i \in \mathcal{I}})$ über D ein Limes von D :

- Das Objekt $L \in \mathcal{C}^{\mathcal{A}}$ ist wie folgt definiert:
 - $L(A) := \lim_{i \in \mathcal{I}} D_i(A)$ für Objekte $A \in \mathcal{A}$.
 - $L(\alpha) := \lim_{i \in \mathcal{I}} D_i(\alpha)$ für Morphismen $\alpha: A \rightarrow A'$ in \mathcal{A} .
- Sei $j \in \mathcal{I}$. Der Morphismus $p_j: L \rightarrow D_j$ ist die natürliche Transformation mit den Komponenten $(p_j)_A = \text{pr}_j: L(A) = \lim_{i \in \mathcal{I}} D_i(A) \rightarrow D_j(A)$ für $A \in \mathcal{A}$.

Salopp gilt also: Der Limes $\lim_{i \in \mathcal{I}} D_i$ existiert und erfüllt

$$\left(\lim_{i \in \mathcal{I}} D_i\right)(A) = \lim_{i \in \mathcal{I}} D_i(A)$$

für alle $A \in \mathcal{A}$.

Analog werden Kolimiten punktweise berechnet.

Bemerkung: Man kann diese Aussage auch als Kriterium interpretieren: Ein Kegel $(L, (p_i)_{i \in \mathcal{I}})$ über D ist genau dann ein Limes von D , wenn für alle $A \in \mathcal{A}$ der Kegel $(L(A), ((\text{pr}_i)_A)_{i \in \mathcal{I}})$ ein Limes des „bei A ausgewerteten Diagramms“ $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A}$, $i \mapsto D_i(A)$, ist.

Aufgabe 1.2.69 (Limiten und Kolimiten von Komplexen). Sei R ein Ring.

³⁷Ich hoffe, dass das klar ist. Das formale Totschlagargument geht wie folgt: Sei $g: \text{colim}_{\mathcal{K}} D|_{\mathcal{K}} \rightarrow \text{colim}_{\mathcal{I}} D$ der in 1.2.45 definierte Morphismus. Seine Definition zeigt, dass für alle $S \in \mathcal{S}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\text{colim}_{\mathcal{I}} D, S) & \xrightarrow{m \mapsto m \circ g} & \mathcal{C}(\text{colim}_{\mathcal{K}} D|_{\mathcal{K}}, S) \\ f \mapsto (f \circ \text{in}_i)_{i \in \mathcal{I}} \downarrow & & \downarrow f \mapsto (f \circ \text{in}_k)_{k \in \mathcal{K}} \\ \lim_{i \in \mathcal{I}^{\text{op}}} \mathcal{C}(D_i, S) & \xrightarrow[\text{(1.2.15)}]{\sim} & \lim_{k \in \mathcal{K}^{\text{op}}} \mathcal{C}(D_k, S) \end{array}$$

kommutativ ist. Die Vertikalen sind nach Proposition 1.2.48 bijektiv. Also ist die obere Horizontale bijektiv, was nach dem Yoneda-Lemma bedeutet, dass m ein Isomorphismus ist.

³⁸Ich hatte dies zunächst „punktweise“ genannt, was man aber eventuell bei (Prä-)Garben mit halmweise alias „auf den Halmen bei allen Punkten $x \in X$ “ verwechseln könnte. Genauer wäre „objekt- und morphismenweise“.

- (a) Dann existieren alle Limiten und Kolimiten in der Kategorie $C(R)$ der Komplexe von R -Moduln. (Analog für Kokomplexe.)

Hinweis: Sie werden gradweise ausgerechnet. Dies kann man direkt begründen oder abstrakt mit den Aufgaben 1.2.67 und 1.2.68 (die (volle!) Unterkategorie ist die der Komplexe, die große diejenige aller Diagramme $\dots \rightarrow X_0 \rightarrow X_{-1} \rightarrow \dots$ von R -Moduln „ohne die Bedingung $d^2 = 0$ “; letztere ist eine Funktorkategorie).

- (b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ kommutiert der Homologie-Funktor $H_n: C(R) \rightarrow \text{Mod}(R)$ mit filtrierenden Kolimiten.

Hinweis: Proposition 1.2.61

Wenn man die nötige Terminologie hat, folgt das sofort aus Aufgabe 3.3.2; für Modulkategorien ist diese Terminologie vermutlich eh vorhanden.

Bemerkung: Mit Beispiel 1.2.62 sieht man rasch, dass er nicht mit beliebigen Kolimiten kommutiert (fasse $\text{Mod}(R) \subset C(R)$ als volle Unterkategorie aller in Grad Null konzentrierter Komplexe auf).

- (c) (Leicht) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ kommutiert der Homologie-Funktor $H_n: C(R) \rightarrow \text{Mod}(R)$ mit beliebigen Produkten und mit beliebigen Koprodukten (letzteres ist eine Wiederholung, siehe [Sch21, Aufgabe B.1.24]).

1.2.5. Gruppenobjekte und warum gewisse Vergissfunktoren mit Limiten bzw. filtrierenden Kolimiten kommutieren.

Definition 1.2.70 (Kategorie der Gruppenobjekte). Sei \mathcal{C} eine Kategorie. Ein **Gruppenobjekt in \mathcal{C}** ist ein Quadrupel (G, μ, η, ι) , wobei

- G ein Objekt von \mathcal{C} ist,

so dass die Produkte $G \times G$ und $G \times G \times G$ existieren, und

- $\mu: G \times G \rightarrow G$ (**Verknüpfung/Multiplikation**),
- $\eta: * \rightarrow G$ (**neutrales Element**)³⁹ und
- $\iota: G \rightarrow G$ (**Inversion**) Morphismen in \mathcal{C} sind,

so dass die folgenden Diagramme kommutieren:

- Assoziativität:⁴⁰

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times G & \xrightarrow{\mu \times \text{id}} & G \times G \\ \text{id} \times \mu \downarrow & & \mu \downarrow \\ G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array}$$

- Neutrales Element (von links und von rechts); hier ist $* = *_\mathcal{C}$ das terminale Objekt von \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccccc} * \times G & \xleftarrow{\sim} & G & \xrightarrow{\sim} & G \times * \\ \eta \times \text{id} \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \text{id} \times \eta \downarrow \\ G \times G & \xrightarrow{\mu} & G & \xleftarrow{\mu} & G \times G \end{array}$$

- Inverse Elemente (von links und rechts); hier ist $\Delta = \Delta_G = \langle \text{id}_G, \text{id}_G \rangle: G \rightarrow G \times G$ die sogenannte **Diagonale**, also der eindeutige Morphismus, deren Verknüpfung mit den beiden Projektionen die Identität ist:

$$\begin{array}{ccccc} G \times G & \xleftarrow{\Delta} & G & \xrightarrow{\Delta} & G \times G \\ \downarrow \iota \times \text{id} & & \downarrow * & & \downarrow \text{id} \times \iota \\ G \times G & \xrightarrow{\mu} & G & \xleftarrow{\mu} & G \times G \end{array}$$

³⁹Hier ist $* = *_\mathcal{C}$ das terminale Objekt von \mathcal{C} . Existiert ein solches nicht, gibt es eben keine Gruppenobjekte

⁴⁰Implizit werden hier die Isomorphismen $(G \times G) \times G \cong G \times G \times G \cong (G \times G) \times G$ verwendet.

Ein **Morphismus** $(G, \mu_G, \eta_G, \iota_G) \rightarrow (H, \mu_H, \eta_H, \iota_H)$ **von Gruppenobjekten** ist ein Morphismus $f: G \rightarrow H$, so dass die folgenden drei Diagramm kommutieren (Verträglichkeit mit Multiplikation, neutralem Element, Inversion).

$$\begin{array}{ccc}
 G \times G & \xrightarrow{\mu_G} & G \\
 f \times f \downarrow & & \downarrow f \\
 H \times H & \xrightarrow{\mu_H} & H
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 * & \xrightarrow{\eta_G} & G \\
 \text{id} \downarrow & & \downarrow f \\
 * & \xrightarrow{\eta_H} & H
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\iota_G} & G \\
 f \downarrow & & \downarrow f \\
 H & \xrightarrow{\iota_H} & H
 \end{array}$$

Mit offensichtlichen Verknüpfungen erhalten wir so die Kategorie $\text{Grp}(\mathcal{C})$ der Gruppenobjekte in \mathcal{C} .⁴¹

Ein Gruppenobjekt $(G, \mu_G, \eta_G, \iota_G)$ heißt **abelsch**, falls das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 G \times G & \xrightarrow{\text{swap} := \langle \text{pr}_2, \text{pr}_1 \rangle} & G \times G \\
 \mu_G \searrow & & \swarrow \mu_G \\
 & G &
 \end{array}$$

kommutiert. Abelsche Gruppenobjekte werden oft als $(A, +, 0, -)$ notiert.

Die volle Unterkategorie von $\text{Grp}(\mathcal{C})$ der abelschen Gruppenobjekte wird als $\text{Ab}(\mathcal{C})$ notiert.

Beispiele 1.2.71. (a) Ein Gruppenobjekt in Set „ist“ eine Gruppe: Damit meinen wir, dass die offensichtliche Abbildung zwischen der Menge aller klassisch definierten Gruppen und der Menge aller Gruppenobjekte in Set eine Bijektion

$$\text{Obj}(\text{Grp}) \xrightarrow{\sim} \{\text{Gruppenobjekte in Set}\}$$

ist. Genauer ist der offensichtliche Funktor

$$\text{Grp} \xrightarrow{\sim} \text{Grp}(\text{Set})$$

ein Isomorphismus von Kategorien. Der Vergissfunktor $\text{Grp} \rightarrow \text{Set}$ entspricht dabei dem offensichtlichen Vergissfunktor $\text{Grp}(\text{Set}) \rightarrow \text{Set}$.

(b) Analog ist

$$(1.2.16) \quad \text{Ab} \xrightarrow{\sim} \text{Ab}(\text{Set})$$

ein Isomorphismus von Kategorien.

(c) Ein Gruppenobjekt in Top ist eine topologische Gruppe.

(d) Ein Gruppenobjekt in der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten ist eine Lie-Gruppe.

1.2.72. Jeder Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, der endliche Produkte erhält, induziert einen Funktor $\text{Grp}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Grp}(\mathcal{D})$.

1.2.73. Bemerkung: Wenn man die Inversion in der Definition eines Gruppenobjekts weglässt, erhält man die Definition eines Monoidobjekts. Der Leser mag sich weitere Definitionen selbst überlegen, so dass für $\mathcal{C} = \text{Set}$ die vertrauten Definitionen herauskommen:

- Was ist ein Ringobjekt und wann ist ein solches kommutativ?
- Sei ein Gruppenobjekt G fixiert. Was ist ein G -Rechtsobjekt alias Objekt mit einer Rechtsoperation von G ?
- Was ist ein Modulobjekt über einem fixierten Ringobjekt R ?
- Wie definiert man die entsprechenden Kategorien?

1.2.74. Sei \mathcal{C} eine Kategorie mit allen Limiten. Wir erklären, warum die in 1.2.70 definierte Kategorie $\text{Grp}(\mathcal{C})$ der Gruppenobjekte in \mathcal{C} alle Limiten hat und der offensichtliche Vergissfunktor $V: \text{Grp}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ mit allen Limiten kommutiert.

Anwendung: Im Spezialfall $\mathcal{C} = \text{Set}$ liefert dies eine abstrakte Erklärung für die in Satz 1.2.10 (vgl. auch 1.2.19 und Beispiel 1.2.24) enthaltene Aussage, dass Limiten in $\text{Grp} = \text{Grp}(\text{Set})$ und Set übereinstimmen.

⁴¹Eine äquivalente Definition wird in 2.5.4 erklärt: Ein Gruppenobjekt ist ein Objekt $G \in \mathcal{C}$, so dass die Menge $\mathcal{C}(S, G)$ für jedes $S \in \mathcal{C}$ eine Gruppenstruktur trägt und jeder Morphismus $S \rightarrow S'$ einen Gruppenmorphismus induziert.

Nun zum Beweis: Sei $G: \mathcal{I} \rightarrow \text{Grp}(\mathcal{C})$ ein Diagramm von Gruppenobjekten. Setze $L := \lim_{i \in \mathcal{I}} V(G_i) \in \mathcal{C}$. Definiere $\mu: L \times L \rightarrow L$ als Verknüpfung

$$\mu: L \times L = \lim_{i \in \mathcal{I}} V(G_i) \times \lim_{i \in \mathcal{I}} V(G_i) \stackrel{(1.2.13)}{\cong} \lim_{i \in \mathcal{I}} (V(G_i) \times V(G_i)) \xrightarrow{\lim \mu_{G_i}} \lim_{i \in \mathcal{I}} V(G_i) = L$$

wobei hier die Bijektion (1.2.13) aus Aufgabe 1.2.26 wie folgt angewendet wird: \mathcal{J} ist eine diskrete Kategorie mit genau zwei Objekten, und F ist die Verknüpfung

$$F: \mathcal{I} \times \mathcal{J} \xrightarrow{\text{pr}_{\mathcal{I}}} \mathcal{I} \xrightarrow{G} \text{Grp}(\mathcal{C}) \xrightarrow{V} \mathcal{C}.$$

Definiere $\iota := \lim_{G_i} \iota_{G_i}: L \rightarrow L$ und $\eta := \langle \eta_{G_i} \rangle: * \rightarrow L$.

Nun sieht man relativ rasch, dass (L, μ, η, ι) ein Gruppenobjekt in \mathcal{C} und ein Limes unseres Diagrammes G ist (Details dem Leser überlassen; um beispielsweise Assoziativität von (L, μ) zu zeigen, nimmt man den Limes der kommutativen Diagramme, die die Assoziativität der G_i zeigen, und verwendet geeignete Instanzen der Isomorphismen (1.2.13)).

Bemerkung: Dieses Argument gilt sinngemäß auch für Ringobjekte oder Modulobjekte über einem festen Ringobjekt (und andere ähnliche Begriffe, in deren Definition nur Limiten vorkommen; in den zitierten Beispielen kommen sogar nur endliche Produkte vor).

Aufgabe 1.2.75. Sei $D: \mathcal{I} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm.

(a) Dann gibt es einen kanonischen Morphismus

$$(1.2.17) \quad \text{colim}_{i \in \mathcal{I}} \lim_{j \in \mathcal{J}} D_{i,j} \rightarrow \lim_{j \in \mathcal{J}} \text{colim}_{i \in \mathcal{I}} D_{i,j}.$$

(b) Der Morphismus (1.2.17) ist im Allgemeinen kein Isomorphismus.

(c) Unter den folgenden Annahmen ist der Morphismus (1.2.17) ein Isomorphismus:

- $\mathcal{C} = \text{Set}$;
- \mathcal{I} ist filtrierend;
- \mathcal{J} ist endlich.

In Worten: In der Kategorie der Mengen vertauschen filtrierende Kolimiten mit endlichen Limiten.

Hinweis: Verwende das folgende Diagramm und 1.2.56 um zu zeigen, dass der gepunktete Pfeil bijektiv ist (beschreibe Elemente der Limiten als „kompatible Tupel“ (siehe Satz 1.2.10) und Elemente der Kolimiten als Äquivalenzklassen (siehe Satz 1.2.54)).

$$\begin{array}{ccccc} D_{s,g} & & D_{t,g} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \text{colim}_i D_{i,g} \\ & & & & \uparrow \\ D_{s,f} & & D_{t,f} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \text{colim}_i D_{i,f} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \lim_e D_{s,e} & & \lim_e D_{t,e} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \text{colim}_i \lim_e D_{i,e} \xrightarrow{\cdots} \lim_e \text{colim}_i D_{i,e} \end{array}$$

Bemerkung: Die Bedingung, dass \mathcal{J} endlich ist, ist notwendig, siehe [Sta18, Text nach 002W].

Aufgabe 1.2.76. Zeige mit einer Modifikation des Arguments aus 1.2.74, wobei Aufgabe 1.2.75 anzuwenden ist:

Die Kategorie Grp der Gruppen hat filtrierende Kolimiten und der Vergissfunktors $V: \text{Grp} \rightarrow \text{Set}$ kommutiert mit filtrierenden Kolimiten.

1.3. Erste Čech-Kohomologie und n -blättrige Überlagerungen.

Definition 1.3.1. Sei X ein topologischer Raum. Eine offene Überdeckung \mathcal{U} von X heißt **gesättigt** (oder **überdeckendes Sieb**), wenn sie unter dem Bilden offener Teilmengen abgeschlossen ist: Für alle $U \in \mathcal{U}$ und $V \subseteq U$ gilt $V \in \mathcal{U}$.

Beispiel 1.3.2. Ist \mathcal{U} eine beliebige offene Überdeckung eines topologischen Raums X , so ist die Menge

$$\mathcal{U}^{\text{sat}} := \{V \text{ offen in } X \mid \text{es gibt ein } U \in \mathcal{U} \text{ mit } V \subset U\}$$

aller offenen Teilmengen von Elementen von \mathcal{U} die kleinste offene gesättigte offene Überdeckung von X , die alle Elemente von \mathcal{U} enthält. Man mag sie als **Sättigung von \mathcal{U}** bezeichnen.

Konkret mag der Leser etwa an die offene Überdeckung der Sphäre \mathbb{S}^n durch die beiden ε -verdickten offenen Hemisphären denken und deren Sättigung betrachten.

1.3.3. Sei X ein topologischer Raum. Die Menge aller gesättigten offenen Überdeckungen von X ist durch Inklusion partiell geordnet. Wir fassen sie wie in [Sch20, Beispiel A.1.5.(f)] erklärt als Kategorie \mathcal{I} auf. Wir zeigen, dass \mathcal{I}^{op} filtrierend ist, indem wir die drei Forderungen in Definition 1.2.52 abarbeiten (eigentlich wiederholt dies nur Beispiel 1.2.53):

- Die Kategorie \mathcal{I}^{op} ist nicht leer, denn die Menge aller offenen Teilmengen von X ist ein Objekt von \mathcal{I}^{op} .⁴²
- Sind \mathcal{U} und \mathcal{V} gesättigte offene Überdeckungen von X , so ist $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ eine gesättigte offene Überdeckung von X (warum?) und es gelten $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ und $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \subset \mathcal{V}$. Diese Inklusionen liefern (eindeutige) Morphismen $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ und $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ in \mathcal{I} , also Morphismen $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ und $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ in \mathcal{I}^{op} .
- Dies ist trivial, denn in \mathcal{I}^{op} gibt es höchstens einen Morphismus zwischen zwei Objekten.

Sei nun zusätzlich eine topologische Gruppe G gegeben. Sind $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ gesättigte offene Überdeckungen von X , so liefert das Einschränken von Čech-1-Kozykeln einen Morphismus

$$\check{H}^1(\mathcal{V}; \mathcal{C}_G) \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)$$

gepunkteter Mengen. Genauer erhalten wir den Funktor

$$\check{H}^1(-; \mathcal{C}_G): \mathcal{I}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}_{\{*\}}/.$$

Definition 1.3.4. Seien X ein topologischer Raum und G eine topologische Gruppe. Wie in 1.3.3 sei \mathcal{I} die Kategorie der gesättigten offenen Überdeckungen von X ; ihre opponierte Kategorie \mathcal{I}^{op} ist filtrierend. Der filtrierende Kolimes⁴³

$$\check{H}^1(X; \mathcal{C}_G) := \text{colim}_{\mathcal{U} \in \mathcal{I}^{\text{op}}} \check{H}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)$$

heißt **erste Čech-Kohomologie von X mit Koeffizienten in G** . Trägt G die diskrete Topologie, so schreiben wir oft abkürzend

$$\check{H}^1(X; G) := \check{H}^1(X; \mathcal{C}_G).$$

Satz 1.3.5 (Klassifikation von n -blättrigen Überlagerungen durch S_n -wertige erste Čech-Kohomologie). Seien X ein topologischer Raum und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die offensichtliche Abbildung eine Bijektion

$$\frac{\{n\text{-blättrige Überlagerungen von } X\}}{\text{Isomorphie}} \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(X; S_n)$$

punktierter Mengen.

Explizit kommt sie von der wie folgt beschriebenen Zuordnung: Ist $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine n -blättrige Überlagerung, so gibt es eine offene Überdeckung \mathcal{U} von X , über der p trivialisierbar ist. Ohne Einschränkung kann \mathcal{U} als gesättigt angenommen werden, indem man \mathcal{U} durch seine „Sättigung“ ersetzt, also die Menge aller offenen Teilmengen von Elementen von \mathcal{U} . Man wählt dann eine Trivialisierung von p über \mathcal{U} und bildet die zugehörigen Übergangsfunktionen, welche einen S_n -wertigen Čech-1-Kozykel bezüglich \mathcal{U} bilden. Nun betrachte man das Bild dieses 1-Kozykels unter der Verknüpfung $\check{Z}^1(\mathcal{U}; S_n) \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{U}; S_n) \xrightarrow{\text{inu}} \check{H}^1(X; S_n)$. Dieses Bild hängt nur von p ab, aber nicht von der Wahl von \mathcal{U} und der Wahl der Trivialisierung.

⁴²Genauer ist es das finale Objekt von \mathcal{I} und somit das initiale Objekt von \mathcal{I}^{op} .

⁴³Hierbei ist es egal, ob wir den filtrierenden Kolimes in $\text{Set}_{\{*\}}/$ oder in Set bilden, siehe Slogan 1.2.55.

Beweis. Offensichtlich ist

$$F: \mathcal{I}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}_{\{\ast\}},$$

$$\mathcal{U} \mapsto \frac{\left\{ \begin{array}{l} n\text{-blättrige Überlagerungen von } X, \\ \text{die über } \mathcal{U} \text{ trivialisierbar sind} \end{array} \right\}}{\text{Isomorphie}},$$

ein Funktor. Die Familie der Isomorphismen (1.1.3) aus Proposition 1.1.24, für $\mathcal{U} \in \mathcal{I}^{\text{op}}$, bildet eine Isotransformation $F \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(-; S_n)$, also einen Isomorphismus in $(\text{Set}_{\{\ast\}})^{\mathcal{I}^{\text{op}}}$. Ihr Bild unter dem in 1.2.44 erklärten Funktor colim ist der Isomorphismus

$$\text{colim}_{\mathcal{U} \in \mathcal{I}^{\text{op}}} \frac{\left\{ \begin{array}{l} n\text{-blättrige Überlagerungen von } X, \\ \text{die über } \mathcal{U} \text{ trivialisierbar sind} \end{array} \right\}}{\text{Isomorphie}} \xrightarrow{\sim} \text{colim}_{\mathcal{U} \in \mathcal{I}^{\text{op}}} \check{H}^1(\mathcal{U}; S_n) = \check{H}^1(X; S_n).$$

Formal haben wir hier den Kolimes in der Kategorie punktierter Mengen genommen, wir hätten aber genausogut den in Set nehmen können (siehe Slogan 1.2.55). Die offensichtlichen Inklusionen liefern nach der universellen Eigenschaft des Kolimes eine Abbildung der linken Seite nach

$$\frac{\left\{ n\text{-blättrige Überlagerungen von } X \right\}}{\text{Isomorphie}}.$$

Diese ist offensichtlich surjektiv (jede Überlagerung ist über einer geeigneten gesättigten offenen Überdeckung \mathcal{U} trivialisierbar), aber auch injektiv nach der Beschreibung des filtrierenden Kolimes von Mengen in 1.2.56 (denn für zwei beliebige Elemente x, y des Kolimes gibt es eine gesättigte offene Überdeckung \mathcal{U} , so dass beide von Isomorphieklassen von Überlagerungen herkommen, die über \mathcal{U} trivialisierbar sind; werden unsere beiden Elemente x, y auf dasselbe Element abgebildet, so sind unsere beiden Überlagerungen isomorph und es gilt $x = y$). \square

1.4. Erste Čech-Kohomologie und Vektorbündel.

Definition 1.4.1. Sei \mathbb{K} der Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen oder der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen oder der Schiefkörper \mathbb{H} der Quaternionen. Sei X ein topologischer Raum.

- (a) Ein **Möchtegern- \mathbb{K} -Vektorraumbündel über X** ist das Datum einer stetigen Abbildung $p: E \rightarrow X$ und einer \mathbb{K} -Vektorraumstruktur auf jeder Faser $E(x) := p^{-1}(x)$, für alle $x \in X$. Man nennt E den **Totalraum von p** und p die **Projektion**. Oft spricht man einfach von E statt von $p: E \rightarrow X$.
- (b) Seien E und F Möchtegern- \mathbb{K} -Vektorraumbündel über X . Ein **Morphismus von Möchtegern- \mathbb{K} -Vektorraumbündel über X** ist ein Morphismus $h: E \rightarrow F$ in $\text{Top}/_X$, so dass für alle $x \in X$ die induzierte Abbildung $h(x): E(x) \rightarrow F(x)$ auf den Fasern \mathbb{K} -linear ist.
- (c) Damit ist klar, was die Kategorie von Möchtegern- \mathbb{K} -Vektorraumbündel über X ist.

Sei $n \in \mathbb{N}$.

- (d) Der topologische Raum $X \times \mathbb{K}^n$ mit seiner offensichtlichen Struktur als Möchtegern- \mathbb{K} -Vektorraumbündel über X heißt das **konstante** oder **triviale \mathbb{K} -Vektorraumbündel vom Rang n über X** .
- (e) Ein **(topologisches) \mathbb{K} -Vektorraumbündel vom Rang n über X** ist ein Möchtegern- \mathbb{K} -Vektorraumbündel $p: E \rightarrow X$, so dass X eine offene Überdeckung $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ hat, so dass für jedes $U \in \mathcal{U}$ ein Isomorphismus

$$t_U: p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{K}^n$$

von Möchtegern- \mathbb{K} -Vektorraumbündeln über U existiert.

- (f) Die Kategorie der \mathbb{K} -Vektorraumbündel vom Rang n über X ist die volle Unterkategorie der oben definierten Kategorie der Möchtegern- \mathbb{K} -Vektorraumbündel über X , deren Objekte die \mathbb{K} -Vektorraumbündel vom Rang n über X sind. Wir notieren sie als $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^n(X)$.

1.4.2. Ist $\tau: X \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = \mathbb{K}^{n \times n}$ eine stetige Abbildung, so ist

$$\tilde{\tau}: X \times \mathbb{K}^n \rightarrow X \times \mathbb{K}^n,$$

$$(x, v) \mapsto (x, \tau(x)v),$$

ein Endomorphismus des trivialen \mathbb{K} -Vektorraumbündels $X \times \mathbb{K}^n$. Genauer liefert diese Zuordnung eine Bijektion

$$(1.4.1) \quad \text{Top}(X, \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n)) \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\text{Vect}_{\mathbb{K}}^n(X)}(X \times \mathbb{K}^n),$$

wie sich der Leser leicht überlegt. Diese Bijektion ist mit der Monoidstruktur \circ auf beiden Seiten verträglich (sie ist auf der linken Seite punktweise definiert, vgl. 1.1.14) und restringiert somit zu einer Bijektion

$$(1.4.2) \quad \text{Top}(X, \text{GL}_n(\mathbb{K})) \xrightarrow{\sim} \text{Aut}_{\text{Vect}_{\mathbb{K}}^n(X)}(X \times \mathbb{K}^n)$$

auf den Einheitengruppen (= Gruppen der invertierbaren Elemente).

Mit diesen Erkenntnissen können wir alle Überlegungen, die zum Klassifikationssatz 1.3.5 geführt haben, auf Vektorbündel übertragen, wobei die Schlüsselrolle, die zuvor von dem Isomorphismus (1.1.1) gespielt wurde, nun (1.4.2) zufällt: Analog zu 1.1.8 ordnen wir jeder Trivialisierung über \mathcal{U} eines \mathbb{K} -Vektorraumbündels vom Rang n über X stetige Verklebungsfunktionen $\tau_{UV}: U \cap V \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{K})$ zu. Verschiedene Wahlen von Trivialisierungen liefern wie in 1.1.21 stetige Übergangsfunktionen $\alpha: U \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{K})$.

Satz 1.4.3 (Klassifikation von \mathbb{K} -Vektorraumbündeln vom Rang n durch $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ -wertige erste Čech-Kohomologie). *Seien X ein topologischer Raum, $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. Dann ist die offensichtliche Abbildung eine Bijektion*

$$\frac{\{ \mathbb{K}\text{-Vektorraumbündel vom Rang } n \text{ über } X \}}{\text{Isomorphie}} \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(X; \mathcal{C}_{\text{GL}_n(\mathbb{K})})$$

punktierter Mengen.

Beweis. Dies ist klar nach 1.4.2. □

1.4.4. Ersetzt man in Definition 1.4.1 den Begriff „topologischer Raum“ durch „differenzierbare Mannigfaltigkeit“ und den Begriff „stetig“ durch „glatt“, so erhält man die Kategorie der differenzierbaren \mathbb{K} -Vektorraumbündel vom Rang n über einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X . Wenn man in dieser Kategorie arbeitet, muss man in 1.4.2 $\text{Top}(X, \text{GL}_n(\mathbb{K}))$ durch die Gruppe aller glatten Abbildungen $X \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{K})$ ersetzen (beachte, dass die Lie-Gruppe $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ insbesondere eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist), die Verklebungs- und Übergangsfunktionen sind dann also glatte Abbildungen. Man erhält so die Klassifikation

$$\frac{\left\{ \begin{array}{c} \text{differenzierbare } \mathbb{K}\text{-Vektorraumbündel} \\ \text{vom Rang } n \text{ über } X \end{array} \right\}}{\text{Isomorphie}} \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(X; \mathcal{C}_{\text{GL}_n(\mathbb{K})}^{\infty}),$$

wobei die Notation \mathcal{C}^{∞} für glatte Funktionen steht und später mehr Sinn ergeben wird.

Analog kann man „analytische“ Bündel definieren und klassifizieren.

1.5. Erste Čech-Kohomologie und Torsoren.

1.5.1. Wir erinnern zunächst an einige möglicherweise wohlbekanntere Begriffe.

1.5.2. Sei G eine (abstrakte) Gruppe. Die Kategorie $\text{Set-}G$ der G -**Rechtsmengen** hat als Objekte Mengen mit einer Rechtsoperation $X \times G \rightarrow X$, $(x, g) \mapsto x.g$, von G ; sind X und Y G -Rechtsmengen, so ist ein **Morphismus** $f: X \rightarrow Y$ von G -**Rechtsmengen** eine G -**äquivariante** Abbildung $f: X \rightarrow Y$ von Mengen: Für alle $x \in X$ und $g \in G$ gilt $f(x.g) = f(x).g$.

Ist X eine G -Rechtsmenge, so heißt für jedes $x \in X$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \beta_x: G &\rightarrow X, \\ g &\mapsto x.g, \end{aligned}$$

Bahnabbildung bei x . Sie ist ein Morphismus in $\text{Set-}G$, falls wir G per Rechtsmultiplikation $h.g := hg$ als G -Rechtsmenge auffassen. Ihr Bild $x.G := \{x.g \mid g \in G\}$ heißt G -**Bahn von x** oder G -**Orbit von x** . Als Menge ist X die disjunkte Vereinigung seiner G -Bahnen.⁴⁴

Eine G -Rechtsmenge X heißt

- **trivial** oder man sagt, dass G **trivial** auf X operiert, falls $x.g = x$ für alle $g \in G$ und $x \in X$ gilt; äquivalent: alle G -Bahnen sind einelementig;

⁴⁴Genauer ist X das Koprodukt in $\text{Set-}G$ seiner G -Bahnen.

- **frei**, falls für alle $x \in X$ und alle $g \in G$ aus $x.g = x$ bereits $g = e$ folgt; äquivalent: für alle $x \in X$ ist die **Bahnabbildung** $\beta_x: G \rightarrow X$ injektiv;
- **transitiv**, falls es ein $x \in X$ mit $x.G = X$ gibt; äquivalent: $X \neq \emptyset$ und für alle $x, y \in X$ existiert ein $g \in G$ mit $x.g = y$; äquivalent: X besteht aus genau einer G -Bahn.

Eine Teilmenge $U \subset X$ einer G -Rechtsmenge heißt **G -stabil**, wenn $u.g \in U$ für alle $u \in U$ und $g \in G$ gilt. Eine solche Teilmenge ist selbst in offensichtlicher Weise eine G -Menge und die Inklusion $U \hookrightarrow X$ ist G -äquivariant.

1.5.3. Eine G -Rechtsmenge X ist genau dann frei und transitiv, wenn $X \neq \emptyset$ gilt und für ein/jedes $x \in X$ die Bahnabbildung β_x eine Bijektion

$$\beta_x: G \xrightarrow{\sim} X$$

ist (sie ist dann automatisch ein Isomorphismus von G -Rechtsmengen).

Slogan 1.5.4. Eine freie transitive G -Menge ist „ G als Rechtsmenge, wobei das ausgezeichnete neutrale Element $e \in G$ vergessen wurde“.

Beispiel 1.5.5. Jede Menge X kann als triviale G -Rechtsmenge aufgefasst werden.

1.5.6. Analog definiert man die Kategorie G -Set der **G -Linksmengen**. Ist X eine G -Linksmenge, so kann man X per $x.g := g^{-1}.x$ als G -Rechtsmenge auffassen. Dies liefert einen Isomorphismus

$$G\text{-Set} \xrightarrow{\sim} \text{Set-}G$$

von Kategorien (auf Morphismenmengen ist er die Identität).

Beispiel 1.5.7. Ist G eine Gruppe, so ist G selbst eine G -Linksmenge per $g.h := gh$ (Operation per Linksmultiplikation; sie ist frei und transitiv), eine G -Rechtsmenge per $h.g := hg$ (Operation per Rechtsmultiplikation; ebenfalls frei und transitiv), und eine G -Linksmenge per $g.h := ghg^{-1}$ (Operation durch Konjugation; im Allgemeinen weder frei noch transitiv; sie ist genau dann trivial, wenn G abelsch ist).

1.5.8. So wie wir in Definition 1.4.1 den Begriff des Vektorraums zu dem des Vektorraumbündels verallgemeinert haben, verallgemeinern wir nun den Begriff der freien transitiven G -Rechtsmenge zu dem des „Bündels freier transitiver G -Rechtsmengen“ - anstelle dieses Begriffs spricht man jedoch meist von einem G -Torsor.

Definition 1.5.9. Seien G eine (abstrakte) Gruppe und X ein topologischer Raum.

- Ein **Möchtegern- G -Torsor über X** ist das Datum einer stetigen Abbildung $p: E \rightarrow X$ und der Struktur einer freien transitiven G -Rechtsmenge auf jeder Faser $E(x) := p^{-1}(x)$, für alle $x \in X$. Man nennt E den **Totalraum von p** und p die **Projektion**. Oft spricht man einfach von E statt von $p: E \rightarrow X$.
- Seien E und F Möchtegern- G -Torsoren über X . Ein **Morphismus von Möchtegern- G -Torsoren über X** ist ein Morphismus $h: E \rightarrow F$ in $\text{Top}/_X$, so dass für alle $x \in X$ die induzierte Abbildung $h(x): E(x) \rightarrow F(x)$ auf den Fasern G -äquivariant ist.
- Damit ist klar, was die Kategorie von Möchtegern- G -Torsoren über X ist.

Nun sei G eine topologische Gruppe.

- Der topologische Raum $X \times G$ mit seiner offensichtlichen Struktur als Möchtegern- G -Torsor über X (auf jeder Faser $\{x\} \times G$ operiert G per Rechtsmultiplikation auf dem rechten Faktor) heißt der **triviale G -Torsor über X** .
- Ein **G -Torsor über X** ist ein Möchtegern- G -Torsor $p: E \rightarrow X$ über X , so dass X eine offene Überdeckung $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ hat, so dass für jedes $U \in \mathcal{U}$ ein Isomorphismus

$$(1.5.1) \quad t_U: p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times G$$

von Möchtegern- G -Torsoren über U existiert.

- Die Kategorie der G -Torsoren über X ist die volle Unterkategorie der oben definierten Kategorie der Möchtegern- G -Torsoren über X , deren Objekte die G -Torsoren über X sind. Wir notieren sie als $\text{Tors-}G/_X$

Ende der 5. Vorlesung am 27.04.2021.

1.5.10. Statt G -Torsor wird auch der Begriff G -**Hauptfaserbündel** verwendet. Im Englischen sagt man neben G -torsor auch *principal G -bundle*, im Französischen neben G -torseur auch *G -fibré principal*.

1.5.11. Ist $p: E \rightarrow X$ ein G -Torsor, so ist die stetige Abbildung p offen und surjektiv (denn lokal ist p durch $\text{pr}_U: U \times G \rightarrow U$ gegeben). Insbesondere trägt X die Quotiententopologie bezüglich p (klar oder [Sch20, Lemma 2.8.66]).

1.5.12. Ist $p: E \rightarrow X$ ein Möchtegern- G -Torsor, so ist E sicherlich eine G -Rechtsmenge (fasse die Operationen von G auf allen Fasern zusammen). Handelt es sich sogar um einen G -Torsor, so ist die Operation $E \times G \rightarrow E$ stetig (denn lokal ist $(U \times G) \times G \rightarrow U \times G$ stetig) und E ist ein G -Rechtsraum im Sinne von Definition 1.5.18.

1.5.13 (Für diejenigen, die Überlagerungstheorie kennen). Sei G eine abstrakte Gruppe, die wir auch als diskrete Gruppe auffassen (vgl. Beispiel 1.1.12). Wir erklären, dass ein G -Torsor über einem topologischen Raum X dasselbe ist wie eine Überlagerung von X mit einer Rechtsoperation von G durch Deckbewegungen (siehe [Sch20, Definition 4.3.7]), so dass die Operation auf jeder Faser frei und transitiv ist. (Morphismen von G -Torsoren sind dasselbe wie G -äquivalente Morphismen von Überlagerungen.)

Sei $E \rightarrow X$ ein G -Torsor. Aus der Definition eines G -Torsors folgt unmittelbar: Die Abbildung $E \rightarrow X$ ist eine Überlagerung, auf der G von rechts durch Deckbewegungen operiert; die induzierte Operation auf jeder Faser ist frei und transitiv.

Sei umgekehrt $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, auf der die (abstrakte) Gruppe G von rechts durch Deckbewegungen operiert, so dass die induzierte Operation auf jeder Faser frei und transitiv ist. Dann ist $\tilde{X} \rightarrow X$ ein G -Torsor: Offensichtlich handelt es sich um einen Möchtegern- G -Torsor. Da \tilde{X} eine Überlagerung ist, hat jeder Punkt von X eine offene Umgebung U , so dass $p^{-1}(U) \rightarrow U$ eine triviale Überlagerung ist; diese Abbildung ist surjektiv, da G transitiv auf jeder Faser operiert und somit die Fasern nicht leer sind. Sei $W \subset p^{-1}(U)$ ein „Blatt“, entspreche also der Teilmenge $U \times \{f\}$ unter einem beliebigen Homöomorphismus $p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F$ über U , für ein $f \in F$. Insbesondere ist $W \rightarrow U$ ein Homöomorphismus. Dann ist die Abbildung $W \times G \rightarrow p^{-1}(U)$, $(w, g) \mapsto w.g$, stetig, offen als Morphismus von Überlagerungen (nach [Sch20, 4.3.11]; hier wird natürlich verwendet, dass G die diskrete Topologie trägt) und bijektiv, da G auf jeder Faser frei und transitiv operiert, also ein Homöomorphismus. Mit der üblichen Rechtsoperation von G auf $W \times G$ ist sie G -äquvariant, also ein Isomorphismus von Möchtegern- G -Torsoren. Somit ist $p: \tilde{X} \rightarrow X$ ein G -Torsor.

1.5.14. Seien G eine topologische Gruppe und X ein topologischer Raum. Ist $\tau: X \rightarrow G$ eine stetige Abbildung, so ist

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}: X \times G &\rightarrow X \times G, \\ (x, g) &\mapsto (x, \tau(x)g), \end{aligned}$$

ein Endomorphismen des trivialen G -Torsors $X \times G$. Genauer liefert diese Zuordnung eine Bijektion

$$(1.5.2) \quad \text{Top}(X, G) \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\text{Tors-}G/X}(X \times G),$$

wie sich der Leser leicht überlegt. Diese Bijektion ist mit der Monoidstruktur \circ auf beiden Seiten verträglich (sie ist auf der linken Seite punktweise definiert, vgl. 1.1.14); da links alle Elemente invertierbar sind, erhalten wir

$$(1.5.3) \quad \text{Aut}_{\text{Tors-}G/X}(X \times G) = \text{End}_{\text{Tors-}G/X}(X \times G).$$

Mit anderen Worten ist jeder Endomorphismus des trivialen G -Torsors automatisch ein Isomorphismus (dies gilt für beliebige G -Torsoren, siehe Aufgabe 1.5.16).

Mit diesen Erkenntnissen können wir alle Überlagerungen, die zum Klassifikationssatz 1.3.5 geführt haben, auf G -Torsoren übertragen (die Rolle von (1.1.1) wird nun von (1.5.2) und (1.5.3) übernommen): Analog zu 1.1.8 ordnen wir jeder Trivialisierung über U eines G -Torsors über X stetige Verklebungsfunktionen $\tau_{UV}: U \cap V \rightarrow G$ zu. Verschiedene Wahlen von Trivialisierungen liefern wie in 1.1.21 stetige Übergangsfunktionen $\alpha: U \rightarrow G$.

Satz 1.5.15 (Klassifikation von G -Torsoren durch G -wertige erste Čech-Kohomologie). *Seien X ein topologischer Raum und G eine topologische Gruppe. Dann ist die offensichtliche Abbildung eine Bijektion*

$$\frac{\{G\text{-Torsoren über } X\}}{\text{Isomorphie}} \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(X; \mathcal{C}_G).$$

Beweis. Dies ist klar nach 1.5.14. □

Aufgabe 1.5.16. Seien G eine topologische Gruppe und X ein topologischer Raum.

- (a) Zeige: Jeder Morphismus $f: E \rightarrow F$ von G -Torsoren ist ein Isomorphismus.

Bemerkung: In kategorieller Sprache bedeutet dies, dass die Kategorie $\text{Tors-}G/X$ ein Gruppoid ist (siehe [Sch20, Definition A.1.6]).

- (b) Folgere: Ein G -Torsor $p: E \rightarrow X$ ist genau dann zum trivialen G -Torsor $\text{pr}_X: X \times G \rightarrow X$ isomorph, wenn p einen stetigen Schnitt hat: Es gibt eine stetige Abbildung $s: X \rightarrow E$ mit $p \circ s = \text{id}_X$.

1.5.17. Wir möchten noch eine Alternativdefinition eines G -Torsors geben (siehe Aufgabe 1.5.24) und benötigen dazu die Kategorie $G\text{-Top}$ der G -Rechtsräume. Wer mag, kann das Folgende bis einschließlich der zitierten Aufgabe überspringen.

Definition 1.5.18. Sei G eine topologische Gruppe. Ein G -**Rechtsraum** (alias G -Rechts-topologischer-Raum) ist ein topologischer Raum X zusammen mit einer Rechtsoperation der Gruppe G auf X , so dass die Abbildung $X \times G \rightarrow X$, $(x, g) \mapsto x.g$, stetig ist. Ein Morphismus $f: X \rightarrow Y$ zwischen G -Rechtsräumen ist eine G -äquivariante stetige Abbildung. Die Kategorie alle G -Rechtsräume wird als $\text{Top-}G$ notiert.

1.5.19. Analog definiert man die Kategorie $G\text{-Top}$ der G -Linksräume; si ist zur Kategorie $\text{Top-}G$ isomorph (vgl. 1.5.6).

1.5.20. Sei G eine topologische Gruppe. Dann gibt es einen offensichtlichen Vergissfunktork

$$\text{Top-}G \rightarrow \text{Set-}G.$$

Rechts wird G nur als abstrakte Gruppe betrachtet, die Topologie von G spielt keine Rolle. Wir sagen, dass ein G -Rechtsraum trivial/frei/transitiv ist, wenn er als G -Menge diese Eigenschaft hat. Offensichtlich sind G -stabile Teilmengen von G -Rechtsräumen selbst G -Rechtsräume.

1.5.21. Sei G eine topologische Gruppe. Ist X ein G -Rechtsraum, so versehen wir die Menge X/G der G -Bahnen von X mit der Quotiententopologie (= Finaltopologie) bezüglich der kanonischen Abbildung $\pi: X \rightarrow X/G$, $x \mapsto xG$. Die Abbildung π ist offensichtlich surjektiv und stetig, aber auch offen, denn für beliebiges offenes $V \subseteq X$ ist $\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{g \in G} Vg$ als Vereinigung der offenen Mengen $Vg = \{v.g \mid v \in V\}$ offen (denn $.g: V \xrightarrow{\sim} Vg$ ist ein Homöomorphismus). Das letzte Argument zeigt auch, dass die offenen bzw. abgeschlossenen Teilmengen von X/G genau die Bilder der offenen bzw. abgeschlossenen G -stabilen Teilmengen von X sind (jeweils induziert $T \mapsto \pi(T)$ eine Bijektion mit Inversem $S \mapsto \pi^{-1}(S)$).

Versehen wir X/G mit der trivialen G -Operation, so ist π ein Morphismus von G -Räumen. Sei K ein trivialer G -Rechtsraum und $\kappa: X \rightarrow K$ ein Morphismus von G -Räumen, d. h. κ ist konstant auf jeder G -Bahn. Dann gibt es (wegen der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie) genau eine stetige Abbildung f , die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \pi \downarrow & \searrow \kappa & \\ X/G & \xrightarrow{\exists! f} & K \end{array}$$

kommutativ macht.

Die Abbildung f ist genau dann ein Isomorphismus, wenn κ offen und surjektiv ist und als Fasern genau die G -Bahnen von X hat (letzteres bedeutet unter der Surjektivitätsannahme $\kappa^{-1}(\kappa(x)) = xG$ für alle $x \in X$).

Definition 1.5.22. Sei G eine topologische Gruppe. Ein G -Rechtsraum X heißt **topologisch frei**, falls es für jeden Punkt $x \in X$ eine G -stabile offene Umgebung U und einen Isomorphismus

$$U \xrightarrow{\sim} W \times G$$

von G -Rechtsmengen gibt, wobei W ein geeigneter (von x abhängiger) topologischer Raum ist und G auf $W \times G$ trivial auf dem ersten Faktor und per Rechtsmultiplikation auf dem zweiten operiert, in Formeln $(w, h).g = (w, hg)$. (Aus dem letzten Satz von 1.5.21 folgt, dass die Verknüpfung $U \xrightarrow{\sim} W \times G \xrightarrow{\text{Pr}_W} W$ einen Homöomorphismus $U/G \xrightarrow{\sim} W$ induziert.)

45

1.5.23. Jeder topologisch freie G -Rechtsraum ist frei, aber die Umkehrung ist falsch. Beispielsweise operiert $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +)$ mit der diskreten Topologie per Rechtsaddition auf $X = \mathbb{R}$ mit der normalen Topologie (beachte, dass X wirklich ein Rechtsraum für \mathbb{R} als diskrete Gruppe ist), und diese Operation ist frei und transitiv. Sie ist aber nicht topologisch frei.

Aufgabe 1.5.24 (Alternative Definition eines G -Torsors). Seien G eine topologische Gruppe und X ein topologischer Raum. Ein G -Torsor' über X ist ein Paar (E, p) bestehend aus einem topologisch freien G -Rechtsraum E und einer stetigen Abbildung $p: E \rightarrow X$, die konstant auf den G -Bahnen ist, so dass die induzierte Abbildung ein Homöomorphismus $E/G \xrightarrow{\sim} X$ ist.

Zeige, dass ein G -Torsor „dasselbe“ wie ein G -Torsor' ist.

Hinweis: Verwende 1.5.21, um zu zeigen, dass ein G -Torsor ein G -Torsor' ist.

Bonus: Ein **Morphismus** $(E, p) \rightarrow (F, q)$ von G -Torsoren' über X ist eine G -äquivalente stetige Abbildung $f: E \rightarrow F$ über X (also gleichzeitig ein Morphismus in Top_X und in Top_G). Sei $\text{Tors}'\text{-}G/X$ die Kategorie der G -Torsoren' über X . Zeige, dass die Kategorien $\text{Tors}'\text{-}G/X$ und $\text{Tors}\text{-}G/X$ isomorph sind.

1.5.25. Für jeden topologisch freien G -Rechtsraum X ist die kanonische Abbildung $X \rightarrow X/G$ ein G -Torsor (über X/G) (nach Aufgabe 1.5.24).

1.5.26. Sei X ein topologischer Raum. Die beiden Bijektionen aus den Sätzen 1.5.15 (für $G = S_n$ mit der diskreten Topologie) und 1.3.5 liefern eine Bijektion

$$(1.5.4) \quad \frac{\{S_n\text{-Torsoren über } X\}}{\text{Isomorphie}} \xrightarrow{\sim} \frac{\{n\text{-blättrige Überlagerungen von } X\}}{\text{Isomorphie}}.$$

Analog liefern die beiden Bijektionen aus den Sätzen 1.5.15 (für $G = \text{GL}_n(\mathbb{K})$) und 1.4.3 eine Bijektion

$$(1.5.5) \quad \frac{\{\text{GL}_n(\mathbb{K})\text{-Torsoren über } X\}}{\text{Isomorphie}} \xrightarrow{\sim} \frac{\{\mathbb{K}\text{-Vektorraumbündel vom Rang } n \text{ über } X\}}{\text{Isomorphie}}.$$

Diese Bijektionen kann man auch direkt hinschreiben, wie wir in 1.5.27 nach etwas Vorbereitung erklären.

1.5.27. Sei G eine topologische Gruppe. Sei $p: E \rightarrow X$ ein G -Torsor und F ein G -Linksraum. Wir machen $E \times F$ durch $(e, f).g := (e.g, g^{-1}.f)$ zu einem G -Rechtsraum und notieren den Quotientenraum als

$$E \times_{/G} F := (E \times F)/G.$$

Er heißt G -balanciertes Produkt von E und F ⁴⁶. Die Verknüpfung $E \times F \xrightarrow{\text{Pr}_E} E \xrightarrow{p} X$ ist konstant auf G -Bahnen und induziert deswegen eine stetige Abbildung

$$\tilde{p}: E \times_{/G} F \rightarrow X.$$

Da $p: E \rightarrow X$ lokal in X wie $U \times G \xrightarrow{\text{Pr}_U} U$ aussieht, sieht \tilde{p} lokal in X wie $U \times F \xrightarrow{\text{Pr}_U} U$ aus; insbesondere ist jede Faser von \tilde{p} zu F isomorph. Dies hat die folgenden Konsequenzen:

- Im Fall $G = S_n$ und $F = \{1, \dots, n\}$ ist \tilde{p} eine n -blättrige Überlagerung von X . Die Bijektion (1.5.4) ist von der Abbildung $E \mapsto E \times_{/S_n} \{1, \dots, n\}$ induziert (wie der Leser prüfe).
- Im Fall $G = \text{GL}_n(\mathbb{K})$ und $F = \mathbb{K}^n$ ist \tilde{p} ein \mathbb{K} -Vektorraumbündel vom Rang n über X (der Leser muss sich hier noch selbst überlegen, wie die Vektorraumstruktur auf jeder Faser von \tilde{p} definiert ist). Die Bijektion (1.5.5) ist von der Abbildung $E \mapsto E \times_{/\text{GL}_n(\mathbb{K})} \mathbb{K}^n$ induziert (wie der Leser prüfe).

⁴⁵Ist G eine diskrete topologische Gruppe, so ist die aktuelle Definition äquivalent zu (dem Analogon für Rechtsoperationen von) [Sch20, Definition 4.2.10]; dort wurden nur abstrakte Gruppen betrachtet.

⁴⁶Die Terminologie ist wohl in Analogie zu [Sch21, Definition 6.2.1] gebildet: Die Abbildung $E \times F \rightarrow E \times_{/G} F$ ist in dem Sinne G -balanciert, dass sie $(e.g, f)$ und $(e, g.f)$ auf dasselbe Element abbildet

Aufgabe 1.5.28. Seien X ein topologischer Raum und G und H topologische Gruppen. Sind E ein G -Torsor und F ein H -Torsor über X , so ist das Faserprodukt $E \times_X F$ in naheliegender Weise ein $(G \times H)$ -Torsor.

Aufgabe 1.5.29. Seien X ein topologischer Raum und A eine abelsche topologische Gruppe, die wir additiv schreiben. Dann ist $\check{H}^1(X; \mathcal{C}_A)$ eine abelsche Gruppe (siehe 1.1.23). Wir können ihre Addition mit der Bijektion aus Satz 1.5.15 auf die punktierte Menge

$$\frac{\{A\text{-Torsoren über } X\}}{\text{Isomorphie}}$$

übertragen und somit Isomorphieklassen von A -Torsoren addieren.

Seien E und F A -Torsoren über X . Definiere einen A -Torsor (möglichst auf rein topologische Weise und ohne Verwendung von Čech-1-Kozykeln), dessen Isomorphieklasse die Summe der Isomorphieklassen von E und F ist.

1.5.30 (Zusammenhang zwischen erster Čech-Kohomologie und erster singulärer Kohomologie; für diejenigen, die singuläre Kohomologie und Überlagerungstheorie kennen). Sei X ein zusammenhängender, lokal zusammenziehbarer topologischer Raum. Sei A eine abelsche Gruppe, die wir als diskrete topologische Gruppe auffassen. Sei $x \in X$. Dann haben wir Bijektionen

$$\begin{aligned} \check{H}^1(X; A) &\xleftarrow[\sim]{\text{Satz 1.5.15}} \frac{\{A\text{-Torsoren über } X\}}{\text{Isomorphie}} \\ &\xrightarrow[\sim]{\text{1.5.13 und [Sch20, Satz 5.3.22]}} \frac{\{F \in \pi_1(X, x)\text{-Set-}A \mid A \text{ operiert frei und transitiv von rechts}\}}{\text{Isomorphie}} \\ &\xrightarrow[\sim]{\text{Aufgabe 1.5.31 und } A \text{ abelsch}} \text{Grp}(\pi_1(X, x), A) \\ &\xleftarrow{\simeq} \text{Ab}(\pi_1(X, x)^{\text{ab}}, A) \\ &\xleftarrow{\simeq} \text{Ab}(H_1(X), A), \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Bijektion aus der universellen Eigenschaft der Abelisierung folgt ([Sch20, Aufgabe 3.10.25]) und die letzte aus [Sch21, Satz von Hurewicz 3.4.2], wobei man beachte, dass X wegzusammenhängend ist (als lokal zusammenziehbarer Raum ist X lokal wegzusammenhängend und somit als zusammenhängender Raum nach [Sch20, Lemma 2.6.17] wegzusammenhängend).

Leider haben wir in [Sch20] aus Zeitgründen singuläre Kohomologie nicht besprochen. Das universelle Koeffiziententheorem der singulären Kohomologie (beachte, dass $H_0(X)$ frei ist) liefert den Isomorphismus

$$H^1(X; A) \xrightarrow{\simeq} \text{Ab}(H_1(X), A).$$

Zusammen mit den obigen Bijektionen erhalten wir also eine Bijektion

$$\check{H}^1(X; \mathcal{C}_A) \cong H^1(X; A).$$

Dies zeigt, dass die erste singuläre Kohomologie mit der ersten Čech-Kohomologie übereinstimmt. Später werden wir hoffentlich viel stärkere Resultate zeigen. Nicht geprüft, aber es würde mich sehr wundern, wenn es nicht so wäre: Diese Bijektion von Mengen hängt nicht von der Wahl des Punktes $x \in X$ ab. Weiter sollte sie ein Isomorphismus abelscher Gruppen sein (dadurch ist Aufgabe 1.5.29 motiviert). Weiter ist sie natürlich in X und A .

Aufgabe 1.5.31. Seien G und H Gruppen und $G\text{-Set-}H$ die Kategorie der G - H -Bimengen, also der Mengen X mit einer G -Linksoperation und einer G -Rechtsoperation, die miteinander kommutieren: Es gilt $(g.x).h = g.(x.h)$ für alle $g \in G$ und $x \in X$ und $h \in H$ gilt. Morphismen sind Abbildungen von Mengen, die sowohl G -äquivariant als auch H -äquivariant sind.

Dann gibt es eine Bijektion

$$\frac{\{X \in G\text{-Set-}H \mid \text{die Rechtsoperation von } H \text{ ist frei und transitiv}\}}{\text{Isomorphie}} \xrightarrow{\simeq} \frac{\text{Grp}(G, H)}{H\text{-Konjugation}},$$

wobei zwei Gruppenmorphismen $\psi, \varphi: G \rightarrow H$ per Definition genau dann „ H -konjugiert“ sind, wenn es ein $h \in H$ mit $\psi(g) = h\varphi(g)h^{-1}$ für alle $g \in G$ gib, wenn also ψ und φ bis auf Postkomposition mit

einem geeigneten Gruppenisomorphismus „Konjugation mit einem Element von H “ übereinstimmen. Dies ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation auf $\text{Grp}(G, H)$.

Hinweis: Sei $X \in G\text{-Set-}H$ mit freier transitiver H -Rechtsoperation. Wähle $x \in X$. Dann gibt es für jedes $g \in G$ genau ein $\psi_x(g) \in H$ mit $g.x = x.\psi_x(g)$.

Ende der 6. Vorlesung am 29.04.2021.

Hausaufgaben:

- (1) Weil die in der Übung erklärte Lösung von Aufgabe 1.1.9 sich nicht ganz Eins-zu-eins überträgt: Zeige die beiden folgenden wesentlichen Zutaten zum Beweis der Bijektionen (1.4.1) und (1.5.2):
 - Gegeben τ ist $\tilde{\tau}$ stetig.
 - Gegeben ein Endomorphismus f ist der offensichtliche Kandidat τ mit $\tilde{\tau} = f$ stetig.
- (2) Aufgabe 1.5.16: Kategorie der Torsoren ist Gruppoid; Torsor trivial \Leftrightarrow hat stetigen Schnitt
- (3) Aufgabe 1.5.24: Alternative kurze Definition eines G -Torsors
- (4) Aufgabe 1.1.40: Linksadjungierter volltreu \Leftrightarrow Eins Isotransformation

1.6. Prägarben.

Definition 1.6.1. Sei X ein topologischer Raum. Dann bildet die Menge der offenen Teilmengen von X eine durch Inklusion partiell geordnete Menge. Wir fassen diese wie in [Sch20, Beispiel A.1.5.(f)] beschrieben als Kategorie auf, notieren sie als $\text{Open}(X)$ und nennen sie die **Kategorie der offenen Mengen von X** . Explizit sind ihre Objekte die offenen Mengen von X und ihre Morphismenmengen sind wie folgt gegeben:

$$\text{Open}_X(U, V) := (\text{Open}(X))(U, V) = \begin{cases} \{*\}_{UV} & \text{falls } U \subset V, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

⁴⁷ Die Verknüpfung ist die einzig mögliche.⁴⁸

Definition 1.6.2. Seien X ein topologischer Raum und \mathcal{W} eine Kategorie.

Der Leser möge vor allem an die Fälle $\mathcal{W} = \text{Set}$ und $\mathcal{W} = \text{Ab}$ denken (und ein bisschen an die Fälle $\mathcal{W} = \text{Mod}(R)$ und $\mathcal{W} = \text{Grp}$), insbesondere beim ersten Lesen. Ich vermute, dass nichts anderes in dieser Vorlesung relevant sein wird.

Die **Kategorie der Prägarben** (englisch *presheaf*, französisch *prefaisceau*) **auf X mit Werten in \mathcal{W}** ist per Definition die Kategorie

$$\text{PSh}(X; \mathcal{W}) := \mathcal{W}^{\text{Open}(X)^{\text{op}}} = \mathcal{W}^{(\text{Open}(X)^{\text{op}})}$$

der Funktoren von $\text{Open}(X)^{\text{op}}$ nach \mathcal{W} . Explizit bedeutet dies, dass eine **Prägarbe auf X mit Werten in \mathcal{W}** oder **\mathcal{W} -wertige Prägarbe auf X** ein Funktor

$$\mathcal{F}: \text{Open}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{W}$$

ist und dass ein Morphismus zwischen solchen Prägarben \mathcal{F}, \mathcal{G} eine natürliche Transformation $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ist⁴⁹. Die Menge aller Morphismen $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ wird als $\text{PSh}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ oder $\text{PSh}_{X, \text{Set}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ notiert (anstelle des schwer lesbaren $\text{PSh}(X, \text{Set})(\mathcal{F}, \mathcal{G})$).

Eine Prägarbe mit Werten in Set bzw. Ab bzw. Grp bzw. $\text{Mod}(R)$, wobei R ein Ring ist, wird meist als

- **Prägarbe von Mengen** bzw.
- **abelsche Prägarbe** oder **Prägarbe von abelschen Gruppen** bzw.
- **Prägarbe von Gruppen** bzw.
- **Prägarbe von R -Moduln** oder, falls R sogar ein Körper ist, **Prägarbe von R -Vektorräumen**

bezeichnet.

⁴⁷Hier ist nur entscheidend, dass im Fall $U \subset V$ die Menge $\text{Open}_X(U, V)$ einelementig ist – wie das eindeutige Element notiert wird und ob man dies genau spezifiziert, ist Geschmackssache.

⁴⁸Wer mag, kann $\text{Open}(X)$ als volle Unterkategorie von $\text{Top}/_X$ auffassen (und auch als im Allgemeinen nicht volle Unterkategorie von Top).

⁴⁹Wir verwenden hier die übliche Einfachpfeilnotation und nicht die bisher oft verwendete Doppelpfeilnotation $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ für solche Transformationen

1.6.3. Eine Prägarbe $\mathcal{F} \in \text{PSh}(X; \mathcal{W})$ ist also ein Paar

$$\mathcal{F} = \left((\mathcal{F}(U))_{U \in \text{Open}(X)}, (\rho_{VU}^{\mathcal{F}})_{V, U \in \text{Open}(X) \text{ mit } V \subset U} \right)$$

von Familien, wobei

- $\mathcal{F}(U)$ ein Objekt von \mathcal{W} ist, und
- $\rho_{VU}^{\mathcal{F}} = \rho_{VU}^{\mathcal{F}}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ ein Morphismus in \mathcal{W} ist, welchen man **Restriktion** oder **Einschränkung** nennt,

so dass

- $\rho_{UU} = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$ für alle $U \in X$ und
- $\rho_{WV} \circ \rho_{VU} = \rho_{WU}$ für alle Inklusionen $W \subset V \subset U$ offener Teilmengen von X gelten.

Ein Morphismus $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ in $\text{PSh}(X; \mathcal{W})$ ist eine Familie $f = (f_U)_{U \in \text{Open}(X)}$ von Morphismen $f_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ in \mathcal{W} , für $U \in X$, so dass für alle Inklusionen $V \subset U$ offener Teilmengen von X das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_{VU}^{\mathcal{F}} \downarrow & & \downarrow \rho_{VU}^{\mathcal{G}} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{f_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

kommutiert. Manchmal schreibe ich auch $f(U)$ statt f_U .

Ist \mathcal{W} eine Kategorie wie Set , Ab , Grp , $\text{Mod}(R)$, deren Objekte Mengen sind, so nennen wir ein Element $s \in \mathcal{F}(U)$ einen **Schnitt von \mathcal{F} über U** . Statt $\rho_{VU}(s)$ schreiben wir $s|_V$. Das obige kommutative Diagramm bedeutet dann $f(s)|_V = f(s|_V)$ oder genauer $(f_U(s))|_V = f_V(s|_V)$ für alle Schnitte s über U .

In der Literatur trifft man auch oft die Notation

$$\Gamma(U; \mathcal{F}) := \mathcal{F}(U)$$

an und bezeichnet insbesondere die Elemente von

$$\Gamma(\mathcal{F}) := \Gamma(X; \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$$

als **globale Schnitte von \mathcal{F}** .

1.6.4. Sei R ein Ring. Jede Prägarbe von R -Moduln ist auch eine Prägarbe abelscher Gruppen; jede solche ist auch eine Prägarbe von Gruppen; jede solche ist auch eine Prägarbe von Mengen. Abstrakt ausgedrückt liefern die offensichtlichen Vergissfunktoren $\text{Mod}(R) \rightarrow \text{Mod}(\mathbb{Z}) = \text{Ab} \rightarrow \text{Grp} \rightarrow \text{Set}$ Vergissfunktoren

$$\text{PSh}(X; \text{Mod}(R)) \rightarrow \text{PSh}(X; \text{Mod}(\mathbb{Z})) = \text{PSh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{PSh}(X; \text{Grp}) \rightarrow \text{PSh}(X; \text{Set}).$$

Beispiel 1.6.5 (Prägarben auf der leeren Menge). Eine Prägarbe von Mengen auf der leeren Menge \emptyset ist „dasselbe“ wie eine Menge: Genauer ist $\text{PSh}(\emptyset; \text{Set}) \rightarrow \text{Set}$, $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(\emptyset)$, ein Isomorphismus von Kategorien.

Beispiel 1.6.6 (Prägarben auf einpunktigen Räumen). Es bezeichne $I = (0 \rightarrow 1)$ die sogenannte **Intervallkategorie**⁵⁰: Sie hat genau zwei Objekte $0, 1$ und genau drei Morphismen id_0, id_1 und $\alpha: 0 \rightarrow 1$. Ist $X = \{*\}$ ein einpunktiger topologischer Raum, so ist der offensichtliche Funktor ein Isomorphismus $\text{PSh}(\{*\}; \text{Set}) \rightarrow \text{Set}^{[0,1]}$ von Kategorien (denn $\text{Open}(\{*\}) \cong I$).⁵¹

Beispiel 1.6.7. Sei X ein topologischer Raum. Sei T ein beliebiger topologischer Raum. Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}_T = \mathcal{C}_{T, X}$ die Prägarbe von Mengen, die einer offenen Teilmenge $U \in X$ die Menge

$$\mathcal{C}_T(U) := \text{Top}(U, T) = \{s: U \rightarrow T \text{ stetig}\}$$

zuordnet und einer Inklusion $V \subset U$ offener Teilmengen von X die Einschränkungabbildung $\mathcal{C}_T(U) \rightarrow \mathcal{C}_T(V)$, $s \mapsto s|_V$.⁵² (Daher kommt der Name *Restriktion* oder *Einschränkung* für die Morphismen $\rho_{VU}^{\mathcal{F}}$ einer beliebigen \mathcal{W} -wertigen Prägarbe \mathcal{F} und auch die Notation $s|_V$ für „mengenwertige“ Prägarben.) Wir nennen $\mathcal{C}_T = \mathcal{C}_{T, X}$ die **Prägarbe der stetigen T -wertigen Funktionen auf X** .

⁵⁰Sie ist ein kombinatorisches Modell für ein gerichtetes Intervall.

⁵¹Dieselbe Aussage gilt für jede mit der Klumpentopologie versehene Menge X , denn auch dann gilt $\text{Open}(X) \cong I$.

⁵²Äquivalent mag man \mathcal{C}_T als Verknüpfung $\text{Open}(X)^{\text{op}} \rightarrow \text{Top}^{\text{op}} \xrightarrow{\text{Top}(-, T)} \text{Set}$ definieren.

Ist $f: S \rightarrow T$ eine stetige Abbildung topologischer Räume, so erhalten wir in offensichtlicher Weise einen Morphismus $\mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{C}_T$ von Prägarben von Mengen auf X .

Wichtige Spezialfälle sind:

- (a) Für $T = \mathbb{C}$ (mit der üblichen Topologie) erhalten wir die **Prägarbe** $\mathcal{C}_{\mathbb{C}} = \mathcal{C}_{\mathbb{C},X}$ **der stetigen komplexwertigen Funktionen auf X** . Diese Prägarbe von Mengen ist in offensichtlicher Weise eine Prägarbe komplexer Vektorräume.

Ähnlich erhält man die **Prägarbe** $\mathcal{C}_{\mathbb{R}} = \mathcal{C}_{\mathbb{R},X}$ **der stetigen reellwertigen Funktionen auf X** , eine Prägarbe reeller Vektorräume.

- (b) Ist T ein diskreter topologischer Raum, so wird $\mathcal{C}_T = \mathcal{C}_{T,X}$ meist als T_X notiert und als **Prägarbe der lokal konstanten T -wertigen Funktionen auf X** bezeichnet, denn eine Abbildung $s: U \rightarrow T$ ist genau dann stetig, wenn f **lokal konstant** ist: Jeder Punkt $u \in U$ hat eine offene Umgebung, auf der s konstant ist.

- (c) Sei G eine topologische Gruppe. Dann ist die Prägarbe $\mathcal{C}_G = \mathcal{C}_{G,X}$ der stetigen G -wertigen Funktionen auf X in offensichtlicher Weise eine Prägarbe von Gruppen; sie ist eine abelsche Prägarbe, falls G abelsch ist.

Ist $G \rightarrow H$ ein Morphismus topologischer Gruppen, so ist der Morphismus $\mathcal{C}_G \rightarrow \mathcal{C}_H$ von Prägarben von Mengen automatisch ein Morphismus von Prägarben von Gruppen.

- (d) Ist G eine diskrete (abelsche) Gruppe (vgl. Beispiel 1.1.12), so ist die in (b) definierte Prägarbe G_X der lokal konstanten G -wertigen Funktionen eine Prägarbe (abelscher) Gruppen.

Ein konkretes Beispiel ist die Prägarbe \mathbb{Z}_X .

- (e) Achtung: Für jede topologische Gruppe G haben wir einen Morphismus $G^{\text{disc}} \rightarrow G$ topologischer Gruppen (Beispiel 1.1.13) und somit einen Morphismus

$$(G^{\text{disc}})_X = \mathcal{C}_{G^{\text{disc}},X} \rightarrow \mathcal{C}_{G,X} = \mathcal{C}_G$$

von Prägarben von Gruppen, den wir fast immer als

$$G_X \rightarrow \mathcal{C}_G$$

schreiben, denn die Notation G_X setzt implizit voraus, dass G als diskrete Gruppe aufgefasst wird.

Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist $G_X(U) \rightarrow \mathcal{C}_G(U)$ injektiv.

- (f) Die Inklusionen $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ liefern die Zeilen des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}_X & \longrightarrow & \mathbb{R}_X & \longrightarrow & \mathbb{C}_X \\ \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}_{\mathbb{Z},X} & \longrightarrow & \mathcal{C}_{\mathbb{R},X} & \longrightarrow & \mathcal{C}_{\mathbb{C},X} \end{array}$$

abelscher Prägarben. Die linke Vertikale ist wie angedeutet eine Gleichheit, was für die beiden anderen Vertikalen vollkommen falsch ist. Das rechte Quadrat kann man auch als kommutatives Diagramm von Prägarben reeller Vektorräume auffassen. Das gesamte Diagramm kann man auch als kommutatives Diagramm von Prägarben von Mengen auffassen.

Beispiel 1.6.8. Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit. Ist T eine weitere glatte Mannigfaltigkeit, so kann man ähnlich wie in Beispiel 1.6.7 die **Prägarbe** $\mathcal{C}_T^\infty = \mathcal{C}_{T,X}^\infty$ **der glatten T -wertigen Funktionen auf X** durch

$$\mathcal{C}_T^\infty(U) := \{s: U \rightarrow T \text{ glatt}\}$$

definieren.

Beispielsweise ist $\mathcal{C}_{\mathbb{C},X}^\infty$ die **Prägarbe der glatten komplexwertigen Funktionen auf X** ; dies ist eine Prägarbe von komplexen Vektorräumen.

Ist G eine Lie-Gruppe, so ist \mathcal{C}_G^∞ ein Prägarbe von Gruppen, die sogenannte **Prägarbe der glatten G -wertigen Funktionen auf X** .

Wir haben Morphismen $G_X \rightarrow \mathcal{C}_G^\infty \rightarrow \mathcal{C}_G$ von Prägarben von Gruppen.

Analog definiert man Prägarben n -fach (stetig) differenzierbarer Funktionen oder (komplex/reell) analytischer Funktionen oder holomorpher Funktionen, die für uns aber wohl eher unwichtig sind.

Beispiel 1.6.9. Sei $p: E \rightarrow X$ eine stetige Abbildung alias ein topologischer Raum E über einem topologischen Raum X . Die **Prägarbe** $\mathcal{S}_E = \mathcal{S}E = \mathcal{S}(E) = \mathcal{S}_{E \rightarrow X} = \mathcal{S}_p: E \rightarrow X = \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{E/X}$ **der (lokalen) stetigen Schnitte von E (oder genauer p)** ordnet einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$ die Menge

$$\mathcal{S}_E(U) := \text{Top}/_X(U, E) = \{s: U \rightarrow E \mid s \text{ stetig und } p \circ s = \text{id}_U\}$$

der **stetigen Schnitte von p über U** zu, wobei hier U per Inklusion $U \hookrightarrow X$ als topologischer Raum über X aufgefasst wird; die Restriktionen sind die offensichtlichen.^{53 54}

Spezialfall: Ist $p: E \rightarrow X$ ein \mathbb{K} -Vektorbündel über X (von beliebigem Rang), so ist \mathcal{S}_E in natürlicher Weise eine Prägarbe von \mathbb{K} -Vektorräumen.

Beispiel 1.6.10. Seien X und T topologische Räume. Dann sind die Prägarbe der stetigen T -wertigen Funktionen auf X und die Prägarbe der stetigen Schnitte von $X \times T \xrightarrow{\text{pr}} X$ im Wesentlichen dasselbe: Der offensichtliche Morphismus ist ein Isomorphismus

$$\mathcal{C}_T \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_{X \times T \rightarrow X}$$

von Prägarben. Dies zeigt, dass Beispiel 1.6.7 durch Beispiel 1.6.9 verallgemeinert wird.

Beispiel 1.6.11. Sei X ein topologischer Raum. Seien E eine Menge und $x \in X$ ein Punkt. Der **Wolkenkratzer bei x mit Faser E** ist die Prägarbe $E_{(x)}$ von Mengen mit

$$E_{(x)}(U) = \begin{cases} E & \text{falls } x \in U, \\ \{*\} & \text{sonst,} \end{cases}$$

und offensichtlichen Restriktionen.

Ist E eine (abelsche) Gruppe, so ist $E_{(x)}$ in offensichtlicher Weise eine Prägarbe von (abelschen) Gruppen; die einelementige Menge $\{*\}$ schreibt man im Fall einer abelschen additiv geschriebenen Gruppe meist als $\{0\}$, im Fall einer multiplikativ geschriebenen Gruppe meist als $\{1\}$ oder $\{e\}$.

1.6.12 (Limiten und Kolimiten von Prägarben). Die Kategorie $\text{PSh}(X; \text{Set})$ hat alle Limiten und Kolimiten und Aufgabe 1.2.68 erklärt, wie man sie berechnen bzw. erkennen kann (wir verwenden natürlich die Sätze 1.2.10 und 1.2.35). Analoges gilt für $\text{PSh}(X; \text{Ab})$ und $\text{PSh}(X; \text{Mod}(R))$ (mit Satz 1.2.39) bzw. allgemeiner für $\text{PSh}(X; \mathcal{W})$, falls \mathcal{W} alle Limiten und Kolimiten hat.

1.7. Höhere Čech-Kohomologie.

Definition 1.7.1. Sei \mathcal{F} eine Prägarbe abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X . Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System offener Teilmengen von X (fast immer wird es eine offene Überdeckung sein). Für $q \in \mathbb{N}$ nennen wir Elemente von

$$\check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) := \prod_{(U_0, \dots, U_q) \in \mathcal{U}^{q+1}} \mathcal{F}(U_0 \cap \dots \cap U_q)$$

Čech- q -Koketten für \mathcal{U} mit Koeffizienten in \mathcal{F} . Elemente von $\check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ sind Familien und werden meist als

$$\psi = (\psi(U_0, \dots, U_q))_{(U_0, \dots, U_q) \in \mathcal{U}^{q+1}} \quad \text{oder} \quad \psi = (\psi_{U_0, \dots, U_q})_{(U_0, \dots, U_q) \in \mathcal{U}^{q+1}}$$

geschrieben. Für $q < 0$ setze $\check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) := \{0\}$. Wir definieren Morphismen

$$d = d_q: \check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^{q+1}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$$

abelscher Gruppen wie folgt. Für $q > 0$ und beliebiges $\psi \in \check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ definiere $d\psi = d_q(\psi)$ durch

$$(1.7.1) \quad (d\psi)(U_0, \dots, U_{q+1}) := \sum_{0 \leq i \leq q+1} (-1)^i \psi(U_0, \dots, U_{i-1}, \widehat{U}_i, U_{i+1}, \dots, U_{q+1})|_{U_0 \cap \dots \cap U_{q+1}}.$$

Für $q \leq 0$ setze notgedrungen $d = d_q := 0$.

⁵³ Allgemeiner kann man die Menge $\mathcal{S}_E(T) := \text{Top}/_X(T, E)$ der stetigen Schnitte von E über T für jeder Teilmenge $T \subset X$ (und noch allgemeiner für jedes Objekt $(T \xrightarrow{\mathcal{A}} X) \in \text{Top}/_X$) definieren.

⁵⁴Es kann sein, dass ich später im Skript manchmal etwas ungenau von *Schnitten* rede und eigentlich *stetige Schnitte* meine.

Erkläre (Ko)-Komplex (ich sage aber in der Regel Komplex), Kohomologie, kohomolog, Koränder, Kozykel, Kategorie der Kokomplexe von R -Moduln wird als $C(R)$ notiert - in der Notation also kein Unterschied zwischen Komplexen und Kokomplexen.

Gib $\check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ und $\check{C}^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ und $\check{C}^2(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ samt Differentialen explizit an.

Proposition 1.7.2. Sei \mathcal{F} eine Prägarbe abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X und $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System offener Teilmengen. Dann gilt $d^2 = d \circ d = 0$, d. h.

$$\check{C}(\mathcal{U}; \mathcal{F}) = (\check{C}(\mathcal{U}; \mathcal{F}), d) := \left(\dots \rightarrow \check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{d=d_q} \check{C}^{q+1}(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow \dots \right)$$

ist ein Komplex abelscher Gruppen, der sogenannte **Komplex der Čech-Koketten für \mathcal{U} mit Koeffizienten in \mathcal{F}** . Wir nennen Elemente von $\check{Z}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) := Z^q(\check{C}(\mathcal{U}; \mathcal{F}))$ bzw. $\check{B}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) := B^q(\check{C}(\mathcal{U}; \mathcal{F}))$ **Čech-Kozykel** bzw. **Čech-Koränder**.

Beweis. Dies ist eine einfache Rechnung, die wir dem Leser überlassen. □

1.7.3. Der Komplex $\check{C}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ verschwindet in negativen Graden. Im Allgemeinen ist er in allen Graden ≥ 0 von Null verschieden.

Definition 1.7.4. Sei \mathcal{F} eine Prägarbe abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X .

- Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System offener Teilmengen. Die totale bzw. q -te Kohomologie des Komplexes der entsprechenden Čech-Koketten wird als

$$\check{H}(\mathcal{U}; \mathcal{F}) := H(\check{C}(\mathcal{U}; \mathcal{F})) \quad \text{bzw.} \quad \check{H}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) := H^q(\check{C}(\mathcal{U}; \mathcal{F}))$$

notiert. Ist \mathcal{U} eine Überdeckung von X , so wird sie **Čech-Kohomologie von X bezüglich \mathcal{U} mit Koeffizienten in \mathcal{F}** genannt.

- Sind $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{P}(X)$ mit $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, so induzieren die Abbildungen „vergiss gewisse Komponenten“

$$\check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^q(\mathcal{V}; \mathcal{F}),$$

$$\psi = (\psi(U_0, \dots, U_q))_{(U_0, \dots, U_q) \in \mathcal{U}^{q+1}} \mapsto \psi|_{\mathcal{V}^{q+1}} = (\psi(V_0, \dots, V_q))_{(V_0, \dots, V_q) \in \mathcal{V}^{q+1}}$$

abelscher Gruppen offensichtlich einen Morphismus

$$(1.7.2) \quad \check{C}(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}(\mathcal{V}; \mathcal{F})$$

von Komplexen und somit auf der q -ten Kohomologie einen Morphismus

$$(1.7.3) \quad \check{H}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{V}; \mathcal{F})$$

abelscher Gruppen. Notieren wir die Kategorie aller gesättigten offenen Überdeckungen von X wie in **1.3.3** als \mathcal{I} , wo wir auch gezeigt haben, dass \mathcal{I}^{op} filtrierend ist, so erhalten wir genauer den Funktor alias das filtrierende Diagramm

$$\check{H}^q(-; \mathcal{F}): \mathcal{I}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$$

abelscher Gruppen. Die q -te **Čech-Kohomologie von X mit Koeffizienten in \mathcal{F}** ist der filtrierende Kolimes⁵⁵

$$\check{H}^q(X; \mathcal{F}) := \text{colim } \check{H}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}).$$

1.7.5 (Negative Čech-Kohomologie verschwindet). Da $\check{C}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ nur in nichtnegativen Graden lebt, verschwindet $\check{H}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ für alle $q < 0$. Insbesondere folgt $\check{H}^q(X; \mathcal{F}) = 0$ für alle $q < 0$.

Ausblick 1.7.6. Der Leser mag sich fragen, ob bzw. wie man $\check{H}^q(X; \mathcal{F})$ effizient berechnen kann. Ist \mathcal{U} eine gesättigte offene Überdeckung eines topologischen Raums X , so gibt es für jede abelsche Garbe \mathcal{F} (in Definition **2.2.1** wird erklärt, wann eine Prägarbe eine Garbe ist) ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) & & \\ \text{in}_{\mathcal{U}} \downarrow & \searrow & \\ \check{H}^q(X; \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^q(X; \mathcal{F}) \end{array}$$

⁵⁵Dieser wird in Ab gebildet. Nach Slogan **1.2.55** kommt dasselbe heraus, wenn wir ihn in $\text{Set}_{\{*\}}/$ oder Set bilden.

wobei $H^q(X; \mathcal{F})$ die q -te Garbenkohomologie ist. Unter geeigneten Voraussetzungen sind alle Abbildungen in diesem Diagramm bijektiv. Genauer gilt:

- Ist \mathcal{F} azyklisch für die offene Überdeckung \mathcal{U} , so ist der schräge Pfeil ein Isomorphismus $\check{H}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^q(X; \mathcal{F})$, siehe [Soe21, Satz 4.7.5 (Kohomologie durch azyklische Überdeckungen)] (dort muss \mathcal{U} nicht einmal gesättigt sein).
- Ist X parakompakt, so ist die untere Horizontale $\check{H}^q(X; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^q(X; \mathcal{F})$ ein Isomorphismus, siehe [Soe21, Satz 5.6.1].

ergänze Referenzen, soweit ich das in der Vorlesung schaffe: Garbenkohomologie, azyklisch für eine Überdeckung, beide zitierten Sätze.

Unter diesen Voraussetzungen ist also insbesondere die linke Vertikale ein Isomorphismus und es genügt, $\check{H}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ auszurechnen. Auch dies ist a priori nicht so einfach (vgl. 1.7.3). Wir erklären in 1.9.11 ein oft nützliches Verfahren.

1.7.7 (Čech-Kohomologie als Kohomologie eines Komplexes). Der Leser mag sich fragen, ob man die q -te Čech-Kohomologie von X mit Koeffizienten in \mathcal{F} auch direkt als Kohomologie eines Komplexes definieren kann (und nicht als Kolimes von Kohomologien von Komplexen). Dies ist so, wie wir nun erklären. Nach der Diskussion in Definition 1.7.4 ist klar, dass

$$\check{C}(-; \mathcal{F}): \mathcal{I}^{\text{op}} \rightarrow C(\mathbb{Z})$$

ein filtrierendes Diagramm von Komplexen abelscher Gruppen ist. Sei

$$\check{C}(X; \mathcal{F}) := \text{colim } \check{C}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$$

sein filtrierender Kolimes – er existiert nach Aufgabe 1.2.69. Nach dieser Aufgabe kommutiert (Ko-)Homologie mit filtrierenden Kolimiten. Dies bedeutet, dass die q -te Kohomologie dieses Komplexes als abelsche Gruppe kanonisch zu $\check{H}^q(X; \mathcal{F})$ isomorph ist, in Formeln

$$H^q(\check{C}(X; \mathcal{F})) \xrightarrow{\sim} \check{H}^q(X; \mathcal{F}).$$

Proposition 1.7.8 (Čech-Kohomologie von Wolkenkratzern). *Seien X ein topologischer Raum, $x \in X$ ein Punkt und A eine abelsche Gruppe. Dann lebt die Čech-Kohomologie von X mit Koeffizienten im Wolkenkratzer $A_{(x)}$ nur im Grad Null und ist dort kanonisch isomorph zu A , in Formeln*

$$\check{H}^q(X; A_{(x)}) = \begin{cases} A & \text{falls } q = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X . Setze $I := \{U \in \mathcal{U} \mid x \in U\}$. Dann hat $\check{C}(\mathcal{U}; A_{(x)})$ die Gestalt

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \prod_{i_0 \in I} A \rightarrow \prod_{(i_0, i_1) \in I^2} A \rightarrow \prod_{(i_0, i_1, i_2) \in I^3} A \rightarrow \dots \rightarrow \prod_{(i_0, i_1, \dots, i_q) \in I^{q+1}} A \xrightarrow{d=d_q} \prod_{(i_0, i_1, \dots, i_{q+1}) \in I^{q+2}} A \rightarrow \dots$$

mit

$$(d\psi)(i_0, \dots, i_{q+1}) := \sum_{l=0}^{q+1} (-1)^l \psi(i_0, \dots, i_{l-1}, \widehat{i_l}, i_{l+1}, \dots, i_{q+1})$$

(Dass die Kohomologie dieses Komplexes in allen Graden außer Null verschwindet, folgt aus Teilaussage (c) des späteren allgemeinen Lemmas 1.9.6, angewendet auf den konstanten Funktor M mit Wert A . Die Kohomologie im Grad Null ist einfach zu bestimmen. Der nun trotzdem angegebene Beweis ist im Wesentlichen ein Spezialfall des dortigen Beweises.)

Sicherlich gilt $I \neq \emptyset$. Sei $j \in I$ beliebig. Definiere $\delta = \delta_{q+1}: \check{C}^{q+1}(\mathcal{U}; A_{(x)}) \rightarrow \check{C}^q(\mathcal{U}; A_{(x)})$ durch

$$\delta(\psi)(i_0, \dots, i_q) := \psi(j, i_0, \dots, i_q).$$

für $q \geq 0$ und durch $\delta_{q+1} := 0$ für $q < 0$.

Eine kurze Rechnung (Hausaufgabe?) zeigt $d\delta + \delta d = \text{id}$ als Endomorphismus von $\check{C}^q(\mathcal{U}; A_{(x)})$ für alle $q > 0$. Also ist für jedes $q > 0$ jeder q -Kozykel ein Korand. Schließlich ist ein Element $\psi = (\psi_{i_0})_{i_0 \in I} \in \prod_{i_0 \in I} A$ genau dann ein 0-Kozykel, wenn alle seine Komponenten $\psi_{i_0} \in A$ übereinstimmen. Dies zeigt, dass $\check{H}^q(\mathcal{U}; A_{(x)})$ nur im Grad Null lebt und dort kanonisch zu A isomorph ist. Insbesondere gilt dies für alle gesättigten \mathcal{U} . Durch Übergang zum Kolimes folgt die Behauptung. \square

Ende der 7. Vorlesung am 04.05.2021.

1.8. Nullte und erste Čech-Kohomologie.

1.8.1 (Nullte Čech-Kohomologie). Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System offener Teilmengen von X . Für jede Prägarbe \mathcal{F} abelscher Gruppen auf X gilt dann

$$(1.8.1) \quad \check{H}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}) = \left\{ s = (s_U)_{U \in \mathcal{U}} \in \prod_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{F}(U) \mid s_U|_{U \cap V} = s_V|_{U \cap V} \text{ für alle } U, V \in \mathcal{U} \right\}.$$

Die Abbildung $s \mapsto (s|_U)_{U \in \mathcal{U}}$ definiert einen Morphismus

$$\mathcal{F}(X) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}).$$

Selbst wenn \mathcal{U} eine offene Überdeckung ist, ist dieser Morphismus im Allgemeinen weder injektiv noch surjektiv (vgl. die spätere Definition 2.2.1 einer Garbe).

Wir haben auch eine kanonische Abbildung

$$\mathcal{F}(X) \rightarrow \check{H}^0(X; \mathcal{F}) = \operatorname{colim} \check{H}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}),$$

die im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv ist. Sie ist definiert als Verknüpfung $\mathcal{F}(X) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{\operatorname{in}_{\mathcal{U}}} \check{H}^0(X; \mathcal{F})$, wobei \mathcal{U} eine beliebige gesättigte offene Überdeckung von X ist und man beachte, dass diese Verknüpfung nicht von der Wahl von \mathcal{U} abhängt (denn $\mathcal{F}(X)$ ist die Spitze eines Kegels über dem Diagramm $\check{H}^0(-; \mathcal{F})$).

1.8.2 (Verallgemeinerung: Nullte-Čech-Kohomologie für Prägarben von Mengen bzw. Gruppen). Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System offener Teilmengen von X . Da die rechte Seite von (1.8.1) auch für Prägarben \mathcal{F} von Mengen bzw. Gruppen sinnvoll ist, definieren wir für solche Prägarben

$$\check{H}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}) = \left\{ s = (s_U)_{U \in \mathcal{U}} \in \prod_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{F}(U) \mid s_U|_{U \cap V} = s_V|_{U \cap V} \text{ für alle } U, V \in \mathcal{U} \right\}$$

und nennen diese Menge bzw. Gruppe **nullte Čech-Kohomologie von X bezüglich \mathcal{U} mit Koeffizienten in \mathcal{F}** , falls \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X ist. Wir definieren

$$\check{H}^0(X; \mathcal{F}) := \operatorname{colim} \check{H}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}),$$

wobei \mathcal{U} alle gesättigten offenen Überdeckungen von X durchläuft und nennen diese Mengen bzw. Gruppe **nullte Čech-Kohomologie von X mit Koeffizienten in \mathcal{F}** .⁵⁶ Wie im Fall abelscher Prägarben gibt es kanonische Abbildungen $\mathcal{F}(X) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ und $\mathcal{F}(X) \rightarrow \check{H}^0(X; \mathcal{F})$.

1.8.3 (Nullte Čech-Kohomologie vs. nullte singuläre Homologie). Seien X ein topologischer Raum und G eine topologische Gruppe. Dann ist $\operatorname{Top}(X, G) = \mathcal{C}_G(X) \xrightarrow{\sim} \check{H}^0(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)$ für jede offene Überdeckung ein Isomorphismus und dann auch

$$\operatorname{Top}(X, G) \xrightarrow{\sim} \check{H}^0(X; \mathcal{C}_G).$$

Sei nun G eine diskrete Gruppe. Sei $\operatorname{ConnComp}(X)$ die Menge der Zusammenhangskomponenten (*connected component*) von X . Dann haben wir stets eine injektive Abbildung $\operatorname{Top}(X, G) \hookrightarrow \operatorname{Set}(\operatorname{ConnComp}(X), G)$. Sie ist genau dann bijektiv, falls alle (stets abgeschlossenen) Zusammenhangskomponenten von X offen sind (was beispielsweise der Fall ist, wenn es nur endlich viele Zusammenhangskomponenten gibt, siehe [Sch20, Satz 2.6.15]), so dass wir in diesem Fall eine Bijektion

$$\operatorname{Set}(\operatorname{ConnComp}(X), G) \xrightarrow{\sim} \check{H}^0(X; G)$$

erhalten.

Sei X wieder ein allgemeiner topologischer Raum, G aber sei eine abelsche Gruppe (die man als diskrete abelsche Gruppe auffassen mag). Leider haben wir in [Sch20] aus Zeitgründen singuläre Kohomologie nicht besprochen; der Leser möge nun aber einfach glauben, dass nullte singuläre Kohomologie mit Koeffizienten in G dual zur entsprechenden nullten singulären Homologie ist (dies ist ziemlich klar nach Definition oder

⁵⁶Da jede Prägarbe \mathcal{F} von Gruppen auch als Prägarbe von Mengen aufgefasst werden kann, hat man a priori zwei Definitionen von $\check{H}^0(X; \mathcal{F})$ (einmal als Kolimes in Grp, einmal als Kolimes in Set), jedoch stimmen diese beiden nach Slogan 1.2.55 überein. Analoges gilt, falls \mathcal{F} sogar eine Prägarbe abelscher Gruppen ist.

folgt per Overkill aus dem universellen Koeffiziententheorem der Kohomologie); in Formeln ist dies die erste der folgenden Bijektionen

$$H^0(X; G) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}(H_0(X), G) \xrightarrow[\sim]{[\text{Sch21}, (3.1.7)]} \text{Ab}(\mathbb{Z}\pi_0(X), G) \xrightarrow{\sim} \text{Set}(\pi_0(X), G).$$

Da wir stets eine Surjektion $\pi_0(X) \rightarrow \text{ConnComp}(X)$ haben, erhalten wir aus den obigen Ausführungen Injektionen und Bijektionen

$$\check{H}^0(X; G) \xleftarrow{\sim} \text{Top}(X, G) \hookrightarrow \text{Set}(\text{ConnComp}(X), G) \hookrightarrow \text{Set}(\pi_0(X), G) \xleftarrow{\sim} H^0(X; G),$$

also eine kanonische Injektion

$$\check{H}^0(X; G) \hookrightarrow H^0(X; G).$$

- Ist X die Sinuskurve des Topologen (mit einer (offenen) Zusammenhangskomponenten, aber zwei Wegzusammenhangskomponenten), so ist dies eine echte Inklusion, falls G nicht die triviale Gruppe $\{0\}$ ist. Diese Inklusion kann in offensichtlicher Weise mit der diagonalen Inklusion $G \rightarrow G \times G$ identifiziert werden.
- Hat jeder Punkt von X eine wegzusammenhängende Umgebung (etwa weil X lokal wegzusammenhängend ist), so ist diese Injektion ein Isomorphismus $\check{H}^0(X; \mathcal{C}_G) \xrightarrow{\sim} H^0(X; G)$, denn es gilt $\pi_0(X) \xrightarrow{\sim} \text{ConnComp}(X)$ und alle (Weg)Zusammenhangskomponenten sind offen [Sch20, Lemma 2.6.17].

1.8.4 (Erste Čech-Kohomologie). Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System offener Teilmengen von X . Für jede Prägarbe \mathcal{F} abelscher Gruppen auf X gilt (1.8.2)

$$\check{Z}^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}) = \left\{ s = (s_{UV})_{(U,V) \in \mathcal{U}^2} \in \prod_{(U,V) \in \mathcal{U}^2} \mathcal{F}(U \cap V) \mid s_{VW} - s_{UW} + s_{UV} = 0 \text{ für alle } U, V, W \in \mathcal{U} \right\}$$

(genauer ist die Bedingung das unleserliche $s_{VW}|_{U \cap V \cap W} - s_{UW}|_{U \cap V \cap W} + s_{UV}|_{U \cap V \cap W} = 0$). Zwei 1-Kozykel $s, t \in \check{Z}^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ sind genau dann kohomolog (d. h. ihre Differenz ist ein 1-Korand), wenn es ein Element $a = (a_U)_{U \in \mathcal{U}} \in \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ mit

$$(1.8.3) \quad t_{UV} - s_{UV} = a_V - a_U$$

für alle $U, V \in \mathcal{U}$ gibt (genauer $t_{UV} - s_{UV} = a_V|_{U \cap V} - a_U|_{U \cap V}$).

1.8.5 (Verallgemeinerung: Erste-Čech-Kohomologie für Prägarben von Gruppen). Die Zykel-Bedingung $s_{VW} - s_{UW} + s_{UV} = 0$ in (1.8.2) kann man äquivalent als $s_{UV} + s_{VW} = s_{UW}$ schreiben bzw. als $s_{UV} * s_{VW} = s_{UW}$ in multiplikativer Notation. Die Bedingung (1.8.3) für Kohomolog-Sein kann man als $s_{UV} + a_V = a_U + t_{UV}$ schreiben bzw. in multiplikativer Schreibweise als $s_{UV} * a_V = a_U * t_{UV}$. Diese Bedingungen sind auch für Prägarben von (nicht notwendig abelschen) Gruppen sinnvoll:

Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System offener Teilmengen von X . Für jede Prägarbe \mathcal{F} von Gruppen auf X definieren wir die Menge der **Čech-1-Kozykel von X bezüglich \mathcal{U} mit Koeffizienten in \mathcal{F}** als

$$\check{Z}^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}) = \left\{ s = (s_{UV})_{(U,V) \in \mathcal{U}^2} \in \prod_{(U,V) \in \mathcal{U}^2} \mathcal{F}(U \cap V) \mid s_{UV} * s_{VW} = s_{UW} \text{ für alle } U, V, W \in \mathcal{U} \right\}$$

Zwei 1-Kozykel $s, t \in \check{Z}^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ nennen wir genau dann **kohomolog**, wenn es ein Element $a = (a_U)_{U \in \mathcal{U}} \in \prod_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{F}(U)$ mit $s_{UV} * a_V = a_U * t_{UV}$ für alle $U, V \in \mathcal{U}$ gibt, was eine Äquivalenzrelation auf $\check{Z}^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ definiert. Wir notieren die Menge der Äquivalenzklassen als $\check{H}^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ und nennen diese punktierte Menge **erste Čech-Kohomologie von X bezüglich \mathcal{U} mit Koeffizienten in \mathcal{F}** . Wir können auch hier zum filtrierenden Kolimes

$$\check{H}^1(X; \mathcal{F}) := \text{colim } \check{H}^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$$

übergehen, wobei \mathcal{U} alle gesättigten offenen Überdeckungen von X durchläuft, und nennen diese punktierte Menge die **erste Čech-Kohomologie von X mit Koeffizienten in \mathcal{F}** . Ist hier \mathcal{F} sogar eine Prägarbe abelscher Gruppen, so stimmt die vorige Definition von $\check{H}^0(X; \mathcal{F})$ als filtrierender Kolimes in $\text{Ab} = \text{Mod}(\mathbb{Z})$ nach Slogan 1.2.55 mit der jetzigen Definition als Kolimes in Grp überein.

Im Fall $\mathcal{F} = \mathcal{C}_G$ für eine topologische Gruppe G spezialisieren diese Definitionen zu unseren vorigen Definitionen 1.1.15, 1.1.22 und 1.3.4 und erklären das dort verwendete Symbol \mathcal{C}_G und die Bezeichnung *Kohomologie*.

1.9. Berechnung der Čech-Kohomologie bezüglich einer fixierten offenen Überdeckung.

1.9.1. Ein Ziel dieses Abschnitts ist, die Berechnung von $\check{H}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ zu vereinfachen bzw. diese überhaupt sinnvoll zu ermöglichen, siehe 1.9.10 (für endliches \mathcal{U}) und 1.9.11 (für gewisse gesättigte offene Überdeckungen). Warum dies für die Berechnung von $\check{H}^q(X; \mathcal{F})$ nützlich ist, haben wir bereits im Ausblick 1.7.6 angedeutet.

Proposition 1.9.2. *Sei \mathcal{F} eine abelsche Prägarbe auf einem topologischen Raum X . Seien $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ offene Überdeckungen von X . Gibt es für jedes $U \in \mathcal{U}$ ein $V \in \mathcal{V}$ mit $U \subset V$, so ist*

$$\check{C}(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{(1.7.2)} \check{C}(\mathcal{V}; \mathcal{F})$$

ein Quasi-Isomorphismus und wird genauer sogar ein Isomorphismus in der Homotopiekategorie $\text{Hot}(\mathbb{Z})$ abelscher Gruppen. Insbesondere ist

$$\check{H}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow[\sim]{(1.7.3)} \check{H}^q(\mathcal{V}; \mathcal{F})$$

für alle $q \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus abelscher Gruppen.

1.9.3. Proposition 1.9.2 kann stets angewendet werden, wenn \mathcal{U} aus \mathcal{V} durch Hinzunahme gewisser offener Teilmengen von Elementen von \mathcal{V} entsteht. Beispielsweise könnte $\mathcal{U} = \mathcal{V}^{\text{sat}}$ die Sättigung von \mathcal{V} sein.

Beispiel 1.9.4. Im Fall $X = \mathbb{S}^n$ könnte etwa \mathcal{V} aus den beiden ε -verdickten offenen Hemisphären bestehen und \mathcal{U} die Sättigung von \mathcal{V} sein.

Beweis. Sei $\tau: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ eine Abbildung mit $U \subset \tau(U)$ für alle $U \in \mathcal{U}$. Wir geben der Abbildung (1.7.2) den Namen R und definieren im Folgenden eine Abbildung in die andere Richtung. Definiere

$$\begin{aligned} I_q: \check{C}^q(\mathcal{V}; \mathcal{F}) &\rightarrow \check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}), \\ \varphi &\mapsto I_q(\varphi), \end{aligned}$$

durch

$$(I_q(\varphi))(U_0, \dots, U_q) := \varphi(\tau(U_0), \dots, \tau(U_q))|_{U_0 \cap \dots \cap U_q}.$$

Der Leser prüft rasch (**Übungsaufgabe?**), dass

$$I := (I_q)_{q \in \mathbb{Z}}: \check{C}(\mathcal{V}; \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$$

ein Morphismus von Komplexen ist.

Wir behaupten, dass R und I in der Homotopiekategorie abelscher Gruppen invers zueinander sind, dass also $R \circ I$ und $I \circ R$ zur jeweiligen Identität homotop sind.

Für $\psi \in \check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ gilt

$$I(R(\psi))(U_0, \dots, U_q) = (R(\psi))(\tau(U_0), \dots, \tau(U_q))|_{U_0 \cap \dots \cap U_q} = \psi(\tau(U_0), \dots, \tau(U_q))|_{U_0 \cap \dots \cap U_q}.$$

Wir behaupten, dass die Abbildungen

$$h_q: \check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^{q-1}(\mathcal{U}; \mathcal{F}),$$

$$\psi \mapsto h_q(\psi) \quad \text{mit} \quad h_q(\psi)(U_1, \dots, U_q) := \sum_{j=1}^q (-1)^j \psi(U_1, \dots, U_j, \tau(U_j), \dots, \tau(U_q))|_{U_1 \cap \dots \cap U_q}$$

⁵⁷ eine Homotopie $h = (h_q)_{q \in \mathbb{Z}}$ zwischen $I \circ R$ und id definieren (für $q \leq 0$ gilt $h_q = 0$). .

⁵⁷Wir betonen, dass der erste Summand (mit Laufindex $j = 1$) ein Minuszeichen bekommt!

Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned}
d(h(\psi))(U_0, \dots, U_q) &\stackrel{(4.6.2)}{=} \sum_{i=0}^q (-1)^i h(\psi)(U_0, \dots, U_{i-1}, \widehat{U}_i, U_{i+1}, \dots, U_q)|_{U_0 \cap \dots \cap U_q} \\
&= \sum_{i=0}^q (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} \psi(U_0, \dots, U_j, \tau(U_j), \dots, \tau(U_{i-1}), \widehat{U}_i, \tau(U_{i+1}), \dots, \tau(U_q))|_{U_0 \cap \dots \cap U_q} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=i+1}^q (-1)^j \psi(U_0, \dots, U_{i-1}, \widehat{U}_i, U_{i+1}, \dots, U_j, \tau(U_j), \dots, \tau(U_q))|_{U_0 \cap \dots \cap U_q} \right) \\
&= \sum_{\substack{i, j \in \{0, \dots, q\} \\ j < i}} (-1)^{i+j+1} \psi(U_0, \dots, U_j, \tau(U_j), \dots, \tau(U_{i-1}), \widehat{U}_i, \tau(U_{i+1}), \dots, \tau(U_q))|_{U_0 \cap \dots \cap U_q} \\
&\quad + \sum_{\substack{i, j \in \{0, \dots, q\} \\ j > i}} (-1)^{i+j} \psi(U_0, \dots, U_{i-1}, \widehat{U}_i, U_{i+1}, \dots, U_j, \tau(U_j), \dots, \tau(U_q))|_{U_0 \cap \dots \cap U_q}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
h(d(\psi))(U_0, \dots, U_q) &= \sum_{j=0}^q (-1)^{j+1} (d(\psi))(U_0, \dots, U_j, \tau(U_j), \dots, \tau(U_q))|_{U_0 \cap \dots \cap U_q} \\
&\stackrel{(4.6.2)}{=} \sum_{j=0}^q (-1)^{j+1} \left(\sum_{i=0}^j (-1)^i \psi(U_0, \dots, \widehat{U}_i, \dots, U_j, \tau(U_j), \dots, \tau(U_q))|_{U_0 \cap \dots \cap U_q} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=j}^q (-1)^{i+1} \psi(U_0, \dots, U_j, \tau(U_j), \dots, \widehat{\tau(U_i)}, \dots, \tau(U_q))|_{U_0 \cap \dots \cap U_q} \right) \\
&= \sum_{\substack{i, j \in \{0, \dots, q\} \\ i \leq j}} (-1)^{i+j+1} \psi(U_0, \dots, \widehat{U}_i, \dots, U_j, \tau(U_j), \dots, \tau(U_q))|_{U_0 \cap \dots \cap U_q} \\
&\quad + \sum_{\substack{i, j \in \{0, \dots, q\} \\ i \geq j}} (-1)^{i+j} \psi(U_0, \dots, U_j, \tau(U_j), \dots, \widehat{\tau(U_i)}, \dots, \tau(U_q))|_{U_0 \cap \dots \cap U_q}
\end{aligned}$$

Es folgt („blau plus blau“, „rot plus rot“)

$$\begin{aligned}
d(h(\psi))(U_0, \dots, U_q) + h(d(\psi))(U_0, \dots, U_q) &= \sum_{i=0}^q \psi(U_0, \dots, U_{i-1}, U_i, \widehat{\tau(U_i)}, \tau(U_{i+1}), \dots, \tau(U_q))|_{U_0 \cap \dots \cap U_q} \\
&\quad - \sum_{i=0}^q \psi(U_0, \dots, U_{i-1}, \widehat{U}_i, \tau(U_i), \tau(U_{i+1}), \dots, \tau(U_q))|_{U_0 \cap \dots \cap U_q} \\
&= \psi(U_0, \dots, U_q)|_{U_0 \cap \dots \cap U_q} - \psi(\tau(U_0), \dots, \tau(U_q))|_{U_0 \cap \dots \cap U_q} \\
&= (\text{id} - I \circ R)(\psi)(U_0, \dots, U_q).
\end{aligned}$$

Dies zeigt $\text{id} - IR = dh + hd$ wie gewünscht.

Für $\varphi \in \check{C}^q(\mathcal{V}; \mathcal{F})$ gilt

$$R(I(\varphi))(V_0, \dots, V_q) = I(\varphi)(V_0, \dots, V_q) = \varphi(\tau(V_0), \dots, \tau(V_q))|_{V_0 \cap \dots \cap V_q}.$$

Wenn man oben zusätzlich ohne Einschränkung verlangt, dass $\tau(V) = V$ für alle $V \in \mathcal{V}$ gilt, so gilt direkt $R \circ I = \text{id}$ und wir sind fertig. Ohne diese Zusatzannahme kann man auch einfach die obige Rechnung anpassen, indem man \mathcal{U} durch \mathcal{V} und alle U_i durch V_i ersetzt. \square

1.9.5. Sei E eine Menge und $\mathcal{P}_{\text{fin}}(E)$ die Menge ihrer endlichen Teilmengen, die wir per Inklusion \subset als partiell geordnete Menge und dann als Kategorie auffassen. Sei $M: \mathcal{P}_{\text{fin}}(E) \rightarrow \text{Ab}$ ein Funktor. Wir werden diesem Datum mehrere Komplexe zuordnen, geben aber zunächst das motivierende Beispiel an, das wir im Hinterkopf haben.

- Sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung eines topologischen Raums X . Setze $E := \mathcal{U}$. Ist \mathcal{F} eine Prägarbe auf X , so liefert sie einen Funktor

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{fin}}(E) &= \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathcal{U}) \rightarrow \text{Ab}, \\ T = \{U_1, \dots, U_n\} &\mapsto \mathcal{F}\left(\bigcap_{U \in T} U\right) = \mathcal{F}(U_1 \cap \dots \cap U_n), \end{aligned}$$

der eine Inklusion $S \subset T$ alias einen Morphismus $S \rightarrow T$ auf die Restriktion $\mathcal{F}(\bigcap_{U \in S}) \rightarrow \mathcal{F}(\bigcap_{U \in T})$ abbildet.

Motiviert durch dieses Beispiel verwenden wir im allgemeinen Setting die folgende Notation: Ist $S \subset T$ eine Inklusion, so ordnet M dieser einen Morphismus $M(S) \rightarrow M(T)$ zu, den wir als $s \mapsto s|_T$ notieren.

- (I) Für $q \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$C^q M := \prod_{(e_0, \dots, e_q) \in E^{q+1}} M(\{e_0, \dots, e_q\}),$$

wobei die rechte Seite im Fall $q \leq -2$ als triviale Gruppe 0 aufgefasst werde und im Fall $q = -1$ als $M(\emptyset)$ (denn $E^0 = \text{Set}(\emptyset, E) = \{\emptyset\} = \{()\}$ enthält nur das leere Tupel). Ist $s = (s(e_0, \dots, e_q)) \in C^q M$ ein Element, so definieren wir $ds = d_q(s) \in C^{q+1} M$ durch

$$(1.9.1) \quad (ds)(e_0, \dots, e_{q+1}) := \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i s(e_0, \dots, e_{i-1}, \widehat{e}_i, e_{i+1}, \dots, e_{q+1})|_{(e_0, \dots, e_{q+1})},$$

Leicht prüft der Leser, dass $d^2 = 0$ gilt und somit $CM := (C^q M, d_q)$ ein Komplex abelscher Gruppen ist. Beachte, dass CM in allen Graden $q \leq -2$ verschwindet, aber $C^{-1} M = M(\emptyset)$ gilt.

(Im motivierenden Beispiel stimmt dieser Komplex in allen Graden ≥ 0 mit dem Čech-Komplex $\check{C}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ überein.)

- (II) Definiere

$$C_{\text{alt}}^q M := \left\{ s = (s(e_0, \dots, e_q)) \in C^q M \mid \begin{array}{l} \text{für alle Tupel } (e_0, \dots, e_q) \in E^{q+1} \text{ und} \\ \text{alle } i \in \{0, \dots, q\} \text{ gelten:} \\ s(\dots, e_i, e_{i+1}, \dots) = -s(\dots, e_{i+1}, e_i, \dots) \text{ und} \\ s(\dots, e_i, e_{i+1}, \dots) = 0 \text{ falls } e_i = e_{i+1} \end{array} \right\},$$

wobei der Index alt für *alternierend* steht. Leicht prüft man, dass die $C_{\text{alt}}^q M$ einen Unterkomplex $C_{\text{alt}} M \subset CM$ bilden. Es gelten $C_{\text{alt}}^{-1} M = C^{-1} M$ und $C_{\text{alt}}^0 M = C^0 M$.

- (III) Sei $<$ eine (totale) Ordnung auf E . Für $q \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$C_{<}^q M := \prod_{\substack{(e_0, \dots, e_q) \in E^{q+1} \\ e_0 < \dots < e_q}} M(\{e_0, \dots, e_q\}),$$

wobei die rechte Seite im Fall $q \leq -2$ als triviale Gruppe 0 aufgefasst werde und $C_{<}^{-1} M = M(\emptyset)$ gilt. Wir definieren Differentiale $d_q: C_{<}^q M \rightarrow C_{<}^{q+1} M$ durch (1.9.1) und erhalten so einen Komplex $C_{<} M := (C_{<}^q M, d_q)$. Die Projektionen $C^q M \rightarrow C_{<}^q M$ auf einen Teil der Faktoren definieren einen Morphismus $CM \rightarrow C_{<} M$ von Komplexen, der in den Graden -1 und 0 bijektiv ist.

Lemma 1.9.6. *Für die in 1.9.5 unter den dortigen Voraussetzungen definierten Komplexe gelten (die Ordnung auf E spielt nur eine Rolle in den $C_{<} M$ betreffenden Behauptungen):*

- Die Komposition $C_{\text{alt}} M \hookrightarrow CM \rightarrow C_{<} M$ ist ein Isomorphismus von Komplexen.
- Die beiden Abbildungen $C_{\text{alt}} M \hookrightarrow CM$ und $CM \rightarrow C_{<} M$ sind Quasi-Isomorphismen.
- Gibt es ein $e \in E$, so dass für jedes $A \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(E)$ die Inklusion $A \subset A \cup \{e\}$ von M auf einen Isomorphismus $M(A) \xrightarrow{\sim} M(A \cup \{e\})$ abgebildet wird, so ist jeder der drei Komplexe $C_{\text{alt}} M$, CM , $C_{<} M$ nullhomotop und somit azyklisch.

Beweis. (a) Offensichtlich.

- (c) Fixiere $e \in E$ mit der angegebenen Eigenschaft.

CM ist nullhomotop: Für $A \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(E)$ notieren wir den Isomorphismus $M(A) \xrightarrow{\sim} M(A \cup \{e\})$ als φ_A . Definiere

$$h = h_q: C^q M \rightarrow C^{q-1} M,$$

$$s \mapsto hs \text{ durch } (hs)(e_0, \dots, e_{q-1}) := \varphi_{\{e_0, \dots, e_{q-1}\}}^{-1}(s(e, e_0, \dots, e_{q-1})).$$

Für jedes $s \in C^q M$ berechnen wir

$$\begin{aligned} ((dh + hd)(s))(e_0, \dots, e_q) &= \sum_{i=0}^q (-1)^i (hs)(e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_q)|_{(e_0, \dots, e_q)} + \varphi_{\{e_0, \dots, e_q\}}^{-1}((ds)(e, e_0, \dots, e_q)) \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \left(\varphi_{\{e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_q\}}^{-1}(s(e, e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_q)) \right)|_{(e_0, \dots, e_q)} \\ &\quad + \varphi_{\{e_0, \dots, e_q\}}^{-1} \left(s(e_0, \dots, e_q)|_{(e, e_0, \dots, e_q)} - \sum_{i=0}^q (-1)^i s(e, e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_q)|_{(e, e_0, \dots, e_q)} \right) \\ &= s(e_0, \dots, e_q), \end{aligned}$$

wobei sich bei der letzten Gleichheit der rote und der blaue Term aufheben, denn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M(\{e, e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_q\}) & \longrightarrow & M(\{e, e_0, \dots, e_i, \dots, e_q\}) \\ \varphi_{\{e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_q\}} \uparrow \sim & & \varphi_{\{e_0, \dots, e_q\}} \uparrow \sim \\ M(\{e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_q\}) & \longrightarrow & M(\{e_0, \dots, e_i, \dots, e_q\}) \end{array}$$

ist für jedes $i = 0, \dots, q$ kommutativ. Es gilt also $dh + hd = \text{id} = \text{id} - 0$; mit anderen Worten ist CM nullhomotop.

$C_{<}M$ ist nullhomotop, falls E eine Ordnung trägt und e das kleinste Element von E ist: Wir modifizieren das obige Argument leicht. Definiere

$$h = h_q: C_{<}^q M \rightarrow C_{<}^{q-1} M,$$

$$s \mapsto hs \text{ durch } (hs)(e_0, \dots, e_{q-1}) := \begin{cases} \varphi_{\{e_0, \dots, e_{q-1}\}}^{-1}(s(e, e_0, \dots, e_{q-1})) & \text{falls } e < e_0; \\ 0 & \text{falls } e = e_0. \end{cases}$$

Für jedes $s \in C_{>}^q M$ berechnen wir $((dh + hd)(s))(e_0, \dots, e_q)$ im Fall $e < e_0$ wie oben zu $s(e_0, \dots, e_q)$; im Fall $e = e_0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} ((dh + hd)(s))(e_0, \dots, e_q) &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \underbrace{(hs)(e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_q)|_{(e_0, \dots, e_q)}}_{=0 \text{ falls } i > 0} + \underbrace{h((ds))(e_0, \dots, e_q)}_{=0} \\ &= (hs)(e_1, \dots, e_q)|_{(e_0, \dots, e_q)} \\ &= \left(\varphi_{\{e_1, \dots, e_q\}}^{-1}(s(\underbrace{e}_{=e_0}, e_1, \dots, e_q)) \right)|_{(e_0, \dots, e_q)} \\ &= s(e_0, \dots, e_q), \end{aligned}$$

insgesamt also $dh + hd = \text{id}$ wie gewünscht.

$C_{\text{alt}}M$ ist nullhomotop: Sicherlich gibt es auf E eine Ordnung, für die e das kleinste Element ist. Dann ist nach dem vorigen Punkt $C_{<}M$ nullhomotop, was sich nach (a) auf das isomorphe $C_{\text{alt}}M$ überträgt.

$C_{<}M$ ist nullhomotop, falls E eine beliebige Ordnung: Nach dem vorigen Punkt ist $C_{\text{alt}}M$ nullhomotop, was sich nach (a) auf das isomorphe $C_{<}M$ überträgt.

Ende der 8. Vorlesung am 06.05.2021.

Hausaufgaben:

- (1) Proposition 1.7.2 beweisen.
- (2) Proposition 1.7.8, behauptete Gleichheit beweisen.
- (3) Aufgabe 1.9.9: brutales Abschneiden

(4) Aufgabe 1.1.41: Äquivalenzen (oder kennen das alle?)

(b) Nach (a) genügt es zu zeigen, dass $CM \rightarrow C_{<}M$ ein Quasi-Isomorphismus ist. Wir zeigen dies schrittweise.

(i) Seien $F \subset E$ eine Teilmenge, G eine abelsche Gruppe und $M = \underline{G}_F: \mathcal{P}_{\text{fin}}(E) \rightarrow \text{Ab}$ der „auf F konstante Funktor G “, d. h. er ist auf Objekten $A \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(E)$ durch

$$M(A) = \underline{G}_F(A) = \begin{cases} G & \text{falls } A \subset F, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

gegeben und auf Morphismen alias Inklusionen $A \subset B$ durch id_G bzw. 0 falls $B \subset F$ bzw. $B \not\subset F$. Dann ist $CM \rightarrow C_{<}M$ ein Quasi-Isomorphismus:

Dies ist klar im Fall $F \neq \emptyset$, denn dann sind sowohl CM als auch $C_{<}M$ azyklisch nach (c). Im Fall $F = \emptyset$ sind CM und $C_{<}M$ in Grad -1 konzentriert und $CM \rightarrow C_{<}M$ ist sogar ein Isomorphismus.

(ii) Ist $(M_i: \mathcal{P}_{\text{fin}}(E) \rightarrow \text{Ab})_{i \in I}$ eine Familie von Funktoren, so dass jeder Morphismus $CM_i \rightarrow C_{<}M_i$ ein Quasi-Isomorphismus ist, so ist auch $C(\prod M_i) \rightarrow C_{<}(\prod M_i)$ ein Quasi-Isomorphismus.⁵⁸

Das ist relativ offensichtlich, wir geben aber trotzdem Details. Die kanonischen Isomorphismen

$$C^q\left(\prod_{i \in I} M_i\right) = \prod_{(e_0, \dots, e_q) \in E^{q+1}} \prod_{i \in I} M_i(\{e_0, \dots, e_q\}) \xrightarrow[\sim]{\text{kanonisch}} \prod_{i \in I} \prod_{(e_0, \dots, e_q) \in E^{q+1}} M_i(\{e_0, \dots, e_q\}) = \prod_{i \in I} C^q M_i$$

sind mit den Differentialen verträglich und definieren den linken Isomorphismus im folgenden kommutativen Diagramm; der rechte vertikale Isomorphismus ist analog definiert.

$$\begin{array}{ccc} C\left(\prod_{i \in I} M_i\right) & \longrightarrow & C_{<}\left(\prod_{i \in I} M_i\right) \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \prod_{i \in I} CM_i & \longrightarrow & \prod_{i \in I} C_{<}M_i. \end{array}$$

Sind nun alle $CM_i \rightarrow C_{<}M_i$ Quasi-Isomorphismen, so ist nach Aufgabe 1.2.69.(c) (die analog für Kokomplexe und Kohomologie gilt) auch die untere Horizontale ein Quasi-Isomorphismus. Also ist die obere Horizontale ein Quasi-Isomorphismus.

(iii) Wir notieren den Kern der Surjektion $CM \rightarrow C_{<}M$ als K_M . Nach der langen exakten Homologiesequenz [Sch21, Satz B.3.4] ist $CM \rightarrow C_{<}M$ genau dann ein Quasi-Isomorphismus, wenn K_M azyklisch ist.

(iv) Für beliebiges $M: \mathcal{P}_{\text{fin}}(E) \rightarrow \text{Ab}$ ist nach (iii) zu zeigen, dass K_M azyklisch ist. Wir zeigen per Induktion über q , dass alle $H^q(K_M)$ verschwinden, wobei M beliebig ist. Dies ist klar für alle $q \leq 0$, denn K_M ist in Graden ≥ 1 konzentriert.

Sei nun $M: \mathcal{P}_{\text{fin}}(E) \rightarrow \text{Ab}$ beliebig. Betrachte den naheliegenden Morphismus (mit den in (i) erklärten Funktoren rechts)

$$M \hookrightarrow I := \prod_{A \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(E)} \underline{M(A)}_A$$

von Funktoren. Der \hookrightarrow -Pfeil deutet an, dass die Auswertung auf jedem $B \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(E)$ injektiv ist (denn bei B ausgewertet ist der Morphismus in die B -Komponente die Identität). Sei Q der (objektweise) Kokern dieses Morphismus, so dass wir eine (objektweise) kurze exakte Sequenz

$$M \hookrightarrow I \twoheadrightarrow Q$$

⁵⁸Hier ist $\prod M_i: \mathcal{P}_{\text{fin}}(E) \rightarrow \text{Ab}$ durch per $(\prod M_i)(A) := \prod M_i(A)$ definiert, vgl. Aufgabe 1.2.68.

erhalten. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
C_{<}M & \hookrightarrow & C_{<}I & \twoheadrightarrow & C_{<}Q \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
CM & \hookrightarrow & CI & \twoheadrightarrow & CQ \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
K_M & \hookrightarrow & K_I & \twoheadrightarrow & K_Q
\end{array}$$

von Komplexen abelscher Gruppen mit offensichtlichen Morphismen, wobei die untere Zeile aus den in (iii) definierten Kernen besteht und die gestrichelten Morphismen eindeutig existieren, so dass die unteren Quadrate kommutieren. Die Spalten sind per Definition von K_M , K_I und K_Q kurze exakte Sequenzen. Die oberen beiden Zeilen sind ebenfalls kurze exakte Sequenzen (teste dies gradweise und verwende, dass $M \hookrightarrow I \twoheadrightarrow Q$ objektweise kurz exakt ist und dass Produkte kurzer exakter Sequenzen abelscher Gruppen kurz exakt sind). Nach dem Neunerlemma [Sch21, B.4.5] für Komplexe ist auch die untere Zeile eine kurze exakte Sequenz.

Wegen der speziellen Gestalt von I und (i), (ii) und (iii) ist K_I azyklisch. Die lange exakte Homologiesequenz zur kurzen exakten Sequenz $K_M \hookrightarrow K_I \twoheadrightarrow K_Q$ in der unteren Zeile unseres Diagramms liefert deswegen Isomorphismen $H^p(K_Q) \xrightarrow{\sim} H^{p+1}(K_M)$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. Wissen wir also per Induktion bereits, dass $H^q(K_Q)$ verschwindet, so verschwindet auch $H^{q+1}(K_M)$. \square

Definition 1.9.7 (Variante zu Definition 1.7.1). Sei \mathcal{F} eine Prägarbe abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X . Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System offener Teilmengen von X und sei $<$ eine Ordnung auf \mathcal{U} . Für $q \in \mathbb{N}$ nennen wir Elemente von

$$\check{C}_{<}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) := \prod_{\substack{(U_0, \dots, U_q) \in \mathcal{U}^{q+1} \\ U_0 < \dots < U_{q+1}}} \mathcal{F}(U_0 \cap \dots \cap U_q)$$

angeordnete Čech-Koketten für \mathcal{U} mit Koeffizienten in \mathcal{F} und setzen $\check{C}_{<}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) := 0$ für $q < 0$. Wir definieren Differentiale $d: \check{C}_{<}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}_{<}^{q+1}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ durch die Formel (4.6.2) und erhalten so den Komplex⁵⁹ $\check{C}_{<}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ der **angeordneten Čech-Koketten**.

Korollar 1.9.8. Sei \mathcal{F} eine Prägarbe abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X und sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System offener Teilmengen von X (meist eine offene Überdeckung). Dann ist für jede Ordnung $<$ auf \mathcal{U} die offensichtliche Abbildung ein Quasi-Isomorphismus

$$\check{C}(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}_{<}(\mathcal{U}; \mathcal{F}).$$

Insbesondere erhalten wir Isomorphismen

$$\check{H}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^q(\check{C}_{<}(\mathcal{U}; \mathcal{F}))$$

für alle $q \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Dies folgt mit Aufgabe 1.9.9 aus Lemma 1.9.6.(b), denn wir befinden uns genau in der Situation des motivierenden Beispiels in 1.9.5. \square

Aufgabe 1.9.9 (Brutales Abschneiden). Sei A ein Kokomplex von R -Moduln. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\sigma_{\leq n}A$ derjenige Komplex, der in allen Graden $p \leq n$ mit A übereinstimmt und in allen anderen Graden Null ist. Definiere $\sigma_{\geq n}A$ analog.

- (a) Die Zuordnungen $A \mapsto \sigma_{\leq n}A$ und $A \mapsto \sigma_{\geq n}A$ erweitern in offensichtlicher Weise zu Endofunktoren der Kategorie der Kokomplexe.

Oft schreibt man abkürzend $\sigma_{<n} := \sigma_{\leq n-1}$ und $\sigma_{>n} := \sigma_{\geq n+1}$.

⁵⁹Dieselbe Rechnung wie im Beweis von Proposition 1.7.2 zeigt, dass es sich um einen Komplex handelt.

(b) Für jeden Kokomplex A definieren die offensichtlichen Abbildungen eine kurze exakte Sequenz

$$\sigma_{>n}A \hookrightarrow A \twoheadrightarrow \sigma_{\leq n}A$$

von Kokomplexen.

(c) Ist $f: A \rightarrow B$ ein Morphismus von Kokomplexen, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \sigma_{>n}A & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & \sigma_{\leq n}A \\ \sigma_{>n}f \downarrow & & f \downarrow & & \sigma_{\leq n}f \downarrow \\ \sigma_{>n}B & \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & \sigma_{\leq n}B \end{array}$$

kommutativ oder mit anderen Worten ein Morphismus kurzer exakter Sequenzen.

(d) Insbesondere gilt in der Situation des vorigen Punkts die folgende 2-von-3-Eigenschaft: Sind zwei der drei Morphismen $\sigma_{>n}f$, f , $\sigma_{\leq n}f$ Quasi-Isomorphismen, so auch der dritte.

Hinweis: Lange exakte Kohomologie-Sequenz und Fünferlemma.

(e) Freiwillig, da in der Vorlesung noch nicht dran (wird wohl in Vorlesung erklärt): Erkläre, wie man den vorigen Punkt zum Beweis von Korollar 1.9.8 verwendet.

1.9.10 (Berechnung von $\check{H}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ für endliche Überdeckungen). Im Gegensatz zum Komplex $\check{C}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ (vgl. 1.7.3) ist der Komplex $\check{C}_{<}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ oft beschränkt: Dies ist sicherlich der Fall, wenn \mathcal{U} endlich ist. Dies hat dann den Vorteil, dass man seine Kohomologie explizit ausrechnen kann. Nach Korollar 1.9.8 liefert dies alle Čech-Kohomologien $\check{H}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$.

1.9.11 (Berechnung von $\check{H}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ für gewisse gesättigte Überdeckungen). Sei $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_n\}$ eine endliche offene Überdeckung eines topologischen Raums X . Sei $\mathcal{U} = \mathcal{V}^{\text{sat}}$ ihre Sättigung. Nimm ohne Einschränkung an, dass die V_i paarweise verschieden sind und betrachte die offensichtliche Ordnung auf \mathcal{U} . Dann berechnet der beschränkte Komplex $\check{C}_{<}(\mathcal{V}; \mathcal{F})$ alle Čech-Kohomologien $\check{H}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ nach Proposition 1.9.2 und Korollar 1.9.8:

$$\check{H}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \cong \check{H}^q(\mathcal{V}; \mathcal{F}) \cong H^q(\check{C}_{<}(\mathcal{V}; \mathcal{F}))$$

Beispiel 1.9.12 (zu 1.9.11). Betrachte die Prägarbe $\mathbb{Z}_{\mathbb{S}^1}$ der lokal konstanten \mathbb{Z} -wertigen Funktionen auf der Kreislinie \mathbb{S}^1 . Sei $\mathcal{V} = \{V_1, V_2\}$ die Überdeckung durch die beiden offenen ε -verdickten Hemisphären (hier jeweils homöomorph zu offenen nichtleeren Intervallen). Dann ist der Komplex $\check{C}_{<}(\mathcal{V}; \mathbb{Z}_{\mathbb{S}^1})$ in den Graden Null und Eins konzentriert und hat die Gestalt

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{(a,b) \mapsto (b-a, b-a)} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Wir erhalten

$$\check{H}^q(\mathcal{V}^{\text{sat}}; \mathbb{Z}_{\mathbb{S}^1}) \cong \check{H}^q(\mathcal{V}; \mathcal{F}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = 0; \\ \mathbb{Z} & \text{falls } q = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ausblick: Genauso sehen die Čech-Kohomologie $\check{H}^q(X; \mathbb{Z}_{\mathbb{S}^1})$ und die Garbenkohomologie $H^q(X; \mathbb{Z}_{\mathbb{S}^1})$ aus (denn die im Ausblick 1.7.6 genannten Voraussetzungen sind erfüllt), auch die singuläre Kohomologie $H^q(X) = H_{\text{sing}}^q(X; \mathbb{Z})$ sieht so aus. Ende Ausblick.

Ersetzt man hier die Kreislinie \mathbb{S}^1 durch eine n -Sphäre \mathbb{S}^n für $n \geq 2$, so ist der Komplex $\check{C}_{<}(\mathcal{V}; \mathbb{Z}_{\mathbb{S}^n})$ ebenfalls in den Graden Null und Eins konzentriert und hat die Gestalt

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{(a,b) \mapsto b-a} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

und es folgt

$$\check{H}^q(\mathcal{V}^{\text{sat}}; \mathbb{Z}_{\mathbb{S}^1}) \cong \check{H}^q(\mathcal{V}; \mathcal{F}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = 0; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ausblick: Hier ist die Überdeckung nicht „fein genug“ ($\mathbb{Z}_{\mathbb{S}^n}$ ist nicht azyklisch für die offene Überdeckung \mathcal{V}): Čech-, Garben- und singuläre Kohomologie, die alle übereinstimmen, haben zusätzlich \mathbb{Z} in Grad n .

Aufgabe 1.9.13. Sei \mathcal{U} die offene Überdeckung eines hohlen Tetraeders X durch die vier offen- ε -verdickten Seitenflächen. Berechne $\check{H}(\mathcal{U}; \mathbb{Z}_X)$.

Bonus (aber vermutlich etwas langwierig): Dasselbe für den Würfel mit seinen sechs Seitenflächen.

2. GARBEN

2.1. Halme von Prägarben.

Definition 2.1.1. Sei \mathcal{F} eine Prägarbe von Mengen (oder abelschen Gruppen oder Gruppen oder R -Moduln) auf einem topologischen Raum X und sei $x \in X$. Der **Halm von \mathcal{F} an der Stelle x** ist der filtrierende Kolimes⁶⁰

$$\mathcal{F}_x := \operatorname{colim}_{\substack{U \subseteq X \\ x \in U}} \mathcal{F}(U),$$

wobei U alle offenen Umgebungen von x durchläuft. Ist $s \in \mathcal{F}(U)$ ein Schnitt von \mathcal{F} auf einer offenen Umgebung $U \subseteq X$ von x , so wird sein Bild in \mathcal{F}_x als s_x notiert und als **Keim von s bei x bezeichnet** (englisch *germ*).⁶¹

2.1.2. Explizit gilt nach Satz 1.2.54

$$\mathcal{F}_x = \frac{\bigsqcup_{U \subseteq X} \mathcal{F}(U)}{\sim}$$

mit der dort beschriebenen Äquivalenzrelation⁶². Jedes Element von \mathcal{F}_x hat die Form s_x für einen geeigneten Schnitt $s \in \mathcal{F}(U)$ auf einer offenen Umgebung $U \subseteq X$ von x . Sind $s \in \mathcal{F}(U)$ und $t \in \mathcal{F}(V)$ Schnitte auf offenen Umgebungen U und V von x , so gilt genau dann $s_x = t_x$, wenn es eine offene Umgebung $W \subset U \cap V$ von x mit $s|_W = t|_W$ gibt.

Äquivalent ist die folgende Beschreibung, die man oft in der Literatur findet: Es gilt

$$\mathcal{F}_x = \frac{\{(U, s) \mid x \in U \subseteq X, s \in \mathcal{F}(U)\}}{\sim},$$

wobei \sim diejenige Äquivalenzrelation ist, für die genau dann $(U, s) \sim (V, t)$ gilt, wenn es eine offene Umgebung $W \subset U \cap V$ von x mit $s|_W = t|_W$ gibt. Mit der etwas vage definierten Menge auf dem Bruchstrich ist $\bigsqcup_{U \subseteq X} \{U\} \times \mathcal{F}(U)$ gemeint, was nur eine Alternativschreibweise für $\bigsqcup_{U \subseteq X} \mathcal{F}(U)$ ist.

2.1.3. Ist $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $x \in X$ ein Punkt, so ist möglicherweise aus der Analysis der Begriff des *Funktionskeims von f an der Stelle x* bekannt. Dieser ist genau der Keim $f_x \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}, x} := (\mathcal{C}_{\mathbb{R}})_x$ im Sinne der obigen Definition 2.1.1 und erklärt die allgemeine Terminologie *Keim* für beliebige Schnitte von Prägarben.

Beispiel 2.1.4 (Halm einer Prägarbe lokal konstanter Funktionen). Seien T ein diskreter und X ein beliebiger topologischer Raum. Dann gilt

$$(T_X)_x \xrightarrow{\sim} T$$

für alle $x \in X$, wobei die Bijektion von den Auswertungsabbildungen $T_X(U) \rightarrow T$, $s \mapsto s(x)$, induziert ist.

Beispiel 2.1.5 (Halm einer Wolkenkratzergarbe). Sei X ein topologischer Raum. Seien E eine Menge und $x \in X$ ein Punkt. Dann gilt

$$(E_{(x)})_y \xrightarrow{\sim} \begin{cases} E & \text{falls } y \in \overline{\{x\}}, \\ \{*\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

⁶⁰ Ich hoffe, dass dem Leser klar ist, was mit diesem Kolimes gemeint ist, sonst lese er weiter: Sei $\operatorname{Open}(X, x)$ die volle Unterkategorie von $\operatorname{Open}(X)$, deren Objekte die offenen Umgebungen von x sind. Dann ist $\operatorname{Open}(X, x)^{\operatorname{op}}$ offensichtlich filtrierend. Der Funktor $\mathcal{F}: \operatorname{Open}(X)^{\operatorname{op}} \rightarrow \operatorname{Set}$ restringiert zu $\mathcal{F}: \operatorname{Open}(X, x)^{\operatorname{op}} \rightarrow \operatorname{Set}$ und wir nehmen den Kolimes dieses filtrierenden Diagramms.

⁶¹ Falls \mathcal{W} die entsprechenden Kolimiten hat, kann man analog Halme \mathcal{W} -wertiger Prägarben definieren.

⁶² und der dort im Beweis beschriebenen Verknüpfung etc., falls \mathcal{F} nicht nur eine Garbe von Mengen ist, sondern etwa eine Garbe abelscher Gruppen.

2.1.6. Ist $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben von Mengen auf X und $x \in X$, so liefert die Funktorialität des Kolimes 1.2.44 einen Morphismus $\varphi_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$. (Achtung: Hier ist φ_x neue Notation, die leider zu Verwechslungen mit dem in Definition 2.1.1 definierten Keim s_x einlädt.) Er ist eindeutig durch die Gleichung $\varphi_x(s_x) = \varphi(s)_x$ alle $s \in \mathcal{F}(U)$ bestimmt. Somit wird Halm-Nehmen zu einem Funktor

$$\begin{aligned} \text{PSh}(X; \text{Set}) &\rightarrow \text{Set}, \\ \mathcal{F} &\mapsto \mathcal{F}_x, \\ (\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}) &\mapsto (\mathcal{F}_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{G}_x). \end{aligned}$$

2.1.7 (Auswerten von Keimen von Prägarben von Schnitten/Funktionen). Sei \mathcal{S}_E die in Beispiel 1.6.9 erklärte Prägarbe von Schnitten einer stetigen Abbildung $q: E \rightarrow X$. Sei $x \in X$. Dann sind die Evaluationsabbildungen $\text{ev}_x: \mathcal{S}_E(U) \rightarrow q^{-1}(x)$, $s \mapsto s(x)$ für variierende offene Umgebungen $U \ni x$ von x kompatibel und induzieren somit eine ebenfalls Evaluationsabbildung genannte Abbildung

$$(2.1.1) \quad \begin{aligned} \text{ev}_x: (\mathcal{S}_E)_x &\rightarrow q^{-1}(x), \\ e = s_x &\mapsto e(x) = s(x), \end{aligned}$$

die man wie angedeutet auch als Auswertung schreibt. In Worten hat also jeder Keim bei x einer Prägarbe von Schnitten einen Wert bei x . Im Allgemeinen ist diese Abbildung weder surjektiv noch injektiv (warum?).

Insbesondere kann man dies auf Prägarben von Funktionen anwenden (vgl. Beispiel 1.6.10). Beispielsweise weist die (surjektive, nicht injektive) Abbildung $\text{ev}_x: (\mathcal{C}_{\mathbb{R}})_x \rightarrow \mathbb{R}$ einem Funktionskeim seinen Wert bei x zu.

Beispiel 2.1.8 (Halm der Orientierungs(prä)garbe – für diejenigen, die relative singuläre Homologie kennen). Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n \in \mathbb{N}$ und sei $\text{or}' = \text{or}'_M$ die durch die Zuordnung $U \mapsto H_n(M, M \setminus U)$ (und offensichtliche Restriktionen) definierte Prägarbe abelscher Gruppen auf M . (Ihre später definierte Garbifizierung wird die sogenannte *Orientierungsgarbe* or_M sein.) Dann gilt

$$\text{or}'_x \xrightarrow{\sim} H_n(M, M \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$$

für alle $x \in M$, wobei der linke Isomorphismus die von den Abbildungen $H_n(M, M \setminus U) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\})$ auf dem Kolimes induzierte Abbildung ist.

Um dies zu sehen, ziehe man sich zunächst in naheliegender Weise mit Ausschneidung [Sch21, Satz 4.7.1] auf den Fall $M = \mathbb{R}^n$ und $x = 0$ zurück – der zweite behauptete Isomorphismus folgt dann aus [Sch21, Korollar 4.7.10]. Sei $\text{Open}(X, x)^{\text{op}}$ die in der Fußnote 60 erklärte Kategorie. Ihre volle Unterkategorie, deren Objekte alle offenen Bälle $B_\varepsilon(0)$, für $\varepsilon > 0$, sind, ist konfinal, so dass wir sie nach Proposition 1.2.66 zum Berechnen des Halms or'_x verwenden können. Da für alle $\varepsilon' > \varepsilon$ alle Morphismen im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_{\varepsilon'}) & \xrightarrow{\sim} & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon) \\ & \searrow \sim & \swarrow \sim \\ & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & \end{array}$$

Isomorphismen sind (die kleineren Mengen der drei Raumpaare sind homotopieäquivalent, verwende [Sch21, Korollar 4.2.3]) – das durch die Bälle indizierte Diagramm ist also im Wesentlichen konstant –, folgt die Behauptung.

Ende der 9. Vorlesung am 11.05.2021.

Aufgabe 2.1.9. Sei \mathcal{C} eine Kategorie und $\mathcal{F} \in \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ ein Funktor. Sei $\mathcal{C} \downarrow \mathcal{F}$ die Kategorie (*slice category*, Spezialfall einer *comma category*), deren Objekte Paare (C, s) sind, wobei $C \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $s: \mathcal{C}(-, C) \rightarrow \mathcal{F}$ ein Morphismus ist (den man nach Yoneda auch als Element von $\mathcal{F}(C)$ auffassen kann), und deren Morphismen ... (ergänze) ... sind. Dann gilt

$$\text{colim}_{(C,s) \in \mathcal{C} \downarrow \mathcal{F}} \mathcal{C}(-, C) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}.$$

Bemerkung: Im Fall $\mathcal{C} = \text{Open}(X)$ zeigt dies, dass jede Prägarbe \mathcal{F} von Mengen auf X kanonisch der Kolimes von repräsentierten Prägarben (welche sogar Garben sind) ist, in der Notation von Beispiel 2.2.12

also

$$(2.1.2) \quad \operatorname{colim}_{(U,s) \in \operatorname{Open}(X) \downarrow \mathcal{F}} h_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$$

gilt. **Zusatzbemerkung** (die Späteres verwendet): Die analoge Aussage zu (2.1.2) für Prägarben von abelschen Gruppen – mit h_U ersetzt durch die Freie-abelsche-Gruppenprägarbe $F^{\text{PSh}}h_U$ (siehe 2.15.8) – gilt nicht, wie man bereits für $X = \emptyset$ und $\mathcal{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sieht. Auch das Analogon für Garben abelscher Gruppen gilt nicht – nun ist h_U durch die Freie-abelsche-Gruppenprägarbe $F^{\text{Sh}}h_U$ zu ersetzen. Man sieht dies für $X = \{*\}$.

Hausaufgaben:

- (1) Aufgabe 1.9.13: Čech-Kohomologie des Hohltetraeders.
- (2) Je nach Vorwissen oder Lust eine der beiden folgenden Aufgaben:
 - Aufgabe 1.1.42: Jede Adjunktion induziert Äquivalenz
 - Aufgabe 2.1.9: „Prägarben von Mengen auf einer Kategorie als Kolimes darstellbarer Prägarben“
- (3) (in Übungsgruppe erklären, falls nicht bekannt: Aufgabe 1.1.39: alle Rechtsadjungierten eines Funktors sind isomorph)

2.2. Definition und erste Beispiele von Garben.

Definition 2.2.1. Eine Prägarbe \mathcal{F} von Mengen auf einem topologischen Raum X heißt **Garbe** (englisch *sheaf*, französisch *faisceau*), falls die folgende **Verklebebedingung**, auch **Garbenaxiom** genannt, gilt: Für alle offenen Teilmengen $W \subseteq X$ und alle offenen Überdeckungen $W = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ von W gilt: Sind Schnitte $s_U \in \mathcal{F}(U)$ für alle $U \in \mathcal{U}$ mit

$$s_U|_{U \cap V} = s_V|_{U \cap V} \text{ für alle } U, V \in \mathcal{U}$$

gegeben, so gibt es genau einen Schnitt $s \in \mathcal{F}(W)$ mit

$$s|_U = s_U \text{ für alle } U \in \mathcal{U}.$$

Die Kategorie $\text{Sh}(X; \text{Set})$ der Garben von Mengen auf X ist per Definition die volle Unterkategorie der Kategorie $\text{PSh}(X; \text{Set})$ der Prägarben, deren Objekte Garben sind. Morphismenmengen in dieser Kategorie werden je nach Kontext als $\text{Sh}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ oder $\text{Sh}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ oder $\text{Sh}_{\text{Set}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ oder $\text{Sh}_{X, \text{Set}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ geschrieben.

Ersetzt man *Menge* durch *Gruppe* bzw. *abelsche Gruppe* bzw. *R-Modul* und *Set* durch *Grp* bzw. *Ab* = $\text{Mod}(\mathbb{Z})$ bzw. $\text{Mod}(R)$, so erhält man die Definition einer **Garbe von Gruppen** etc.

2.2.2. Eine Prägarbe \mathcal{F} von Gruppen bzw. abelschen Gruppe bzw. *R-Moduln* ist genau dann eine Garbe, wenn \mathcal{F} , aufgefasst als Prägarbe von Mengen, eine Garbe von Mengen ist. Insbesondere induzieren die Vergissfunktoren aus 1.6.4 Vergissfunktoren

$$\text{Sh}(X; \text{Mod}(R)) \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Grp}) \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Set}).$$

2.2.3. Die Verklebebedingung an \mathcal{F} kann äquivalent wie folgt formuliert werden (wenn man lieber mit Familien $(U_i)_{i \in I}$ offener Teilmengen statt mit Systemen $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ solcher Teilmengen arbeitet): Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie offener Teilmengen von X , so gilt: Gegeben beliebige Schnitte $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ für alle $i, j \in I$ gibt es genau einen Schnitt $s \in \mathcal{F}(\bigcup_{i \in I} U_i)$ mit $s|_{U_i} = s_i$.

2.2.4. Die Verklebebedingung an \mathcal{F} kann äquivalent wie folgt formuliert werden: Für alle Systeme $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ offener Teilmengen von X ist

$$(2.2.1) \quad \mathcal{F}\left(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U\right) \rightarrow \prod_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{F}(U) \xrightarrow[r_1]{r_2} \prod_{U, V \in \mathcal{U}} \mathcal{F}(U \cap V)$$

ein Egalisatordiagramm⁶³ (siehe Beispiel 1.2.8.(e))⁶⁴, wobei die linke Abbildung durch $s \mapsto (s|_U)_{U \in \mathcal{U}}$ gegeben ist und die beiden rechten durch

$$\begin{aligned} s &= (s_U)_{U \in \mathcal{U}} \mapsto r_1(s) := (s_U|_{U \cap V})_{U, V \in \mathcal{U}}, \\ s &= (s_U)_{U \in \mathcal{U}} \mapsto r_2(s) := (s_V|_{U \cap V})_{U, V \in \mathcal{U}}. \end{aligned}$$

⁶³in Set bzw. Grp bzw. $\text{Ab} = \text{Mod}(\mathbb{Z})$ bzw. $\text{Mod}(R)$ (in all diesen Kategorien werden Limiten, insbesondere Produkte und Egalisatoren, auf „dieselbe“ Weise berechnet).

⁶⁴Explizit kann man das auch so formulieren: Der kanonische Morphismus von $\mathcal{F}(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U)$ in den Egalisator von r_1 und r_2 ist injektiv und surjektiv.

Wer will, kann auch hier mit Familien $(U_i)_{i \in I}$ statt mit Systemen $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ offener Teilmengen arbeiten und fordern, dass $\mathcal{F}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \xrightarrow[r_1]{r_2} \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow[r_1]{r_2} \prod_{i,j \in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ ein Egalisatordiagramm ist.

2.2.5 (Schnitte einer Garbe über der leeren Menge). Sei \mathcal{F} eine Garbe von Mengen. Dann besteht $\mathcal{F}(\emptyset)$ aus genau einem Element: Wende die Verklebebedingung auf die offene Überdeckung $\mathcal{U} = \emptyset$ von \emptyset an.

Insbesondere ist die Kategorie $\text{Sh}(\emptyset; \text{Set})$ sehr langweilig: Sie hat genau ein Objekt und genau einen Morphismus (vgl. Beispiel 1.6.5).

Analoges gilt für Garben von abelschen Gruppen.

Beispiel 2.2.6 (Garben auf einelementigen Räumen). Der Funktor

$$(2.2.2) \quad \begin{aligned} \text{Sh}(\{*\}; \text{Set}) &\xrightarrow{\cong} \text{Set}, \\ \mathcal{F} &\mapsto \mathcal{F}(\{*\}), \end{aligned}$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien (nach 2.2.5, vgl. Beispiel 1.6.6).⁶⁵ Analog ist $\text{Sh}(\{*\}; \text{Ab}) \xrightarrow{\cong} \text{Ab}$, $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(\{*\})$, eine Äquivalenz von Kategorien.

Aufgabe 2.2.7. Der Leser versehe die zweielementige Menge $X = \{a, b\}$ mit allen möglichen Topologien und überlege sich jeweils, wie (die Kategorien von) Prägarben bzw. Garben von Mengen bzw. von abelschen Gruppen aussehen.

2.2.8. (nicht so wichtig:) Sei \mathcal{W} eine Kategorie, die alle Produkte hat. Eine \mathcal{W} -wertige Prägarbe \mathcal{F} heißt **Garbe**, falls für alle Systeme $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ offener Teilmengen von X das Diagramm (2.2.1) in \mathcal{W} ein Egalisatordiagramm ist.⁶⁶ Die Kategorie $\text{Sh}(X; \mathcal{W})$ ist die volle Unterkategorie von $\text{PSh}(X; \mathcal{W})$, deren Objekte Garben sind. Ist \mathcal{F} eine \mathcal{W} -wertige Garbe, so ist $\mathcal{F}(\emptyset)$ ein/das finale Objekt.

2.2.9. Sei \mathcal{F} eine Garbe von Mengen auf X . Dann ist für jede offene Überdeckung \mathcal{U} von X die in 1.8.2 erklärte Abbildung ein Isomorphismus

$$\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\cong} \check{H}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F})$$

Insbesondere gilt das für alle gesättigten Überdeckungen von X , woraus der Isomorphismus

$$\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\cong} \check{H}^0(X; \mathcal{F})$$

folgt.

Beispiele 2.2.10. Die in den Beispielen 1.6.7, 1.6.8, 1.6.9, 1.6.11 erklärten Prägarben \mathcal{C}_T stetiger T -wertiger Funktionen, \mathcal{C}_T^∞ differenzierbarer T -wertiger Funktionen, $\mathcal{S}_{E/X}$ der Schnitte von $p: E \rightarrow X$ und Wolkenkratzer $E_{(x)}$ sind Garben. Dies ist klar für den Wolkenkratzer und folgt in den anderen Beispielen aus der Lokalität der Stetigkeit im Startbereich [Sch20, Proposition 2.4.13].

Beispiel 2.2.11. Sei $A \neq \{0\}$ eine nicht triviale abelsche Gruppe. Dann ist die Prägarbe

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: \text{Open}(X)^{\text{op}} &\rightarrow \text{Ab}, \\ U &\mapsto A, \end{aligned}$$

(mit Restriktionsabbildungen id_A) keine Garbe, denn $\mathcal{A}(\emptyset) = A \neq \{0\}$. Dies kann man natürlich korrigieren und einfach $\mathcal{A}(\emptyset) := \{0\}$ setzen. Falls X eine nicht-leere, nicht-zusammenhängende, offene Teilmenge U enthält (beispielsweise falls $X = \{1, 2\}$ mit der diskreten Topologie ist), so ist unser neues \mathcal{A} immer noch keine Garbe: Schreibe $U = U_1 \sqcup U_2$, wobei U_1 und U_2 offene, disjunkte, nicht-leere Teilmengen von U sind. Wähle $a, b \in A$ mit $a \neq b$. Dann kommen die auf $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ übereinstimmenden Schnitte $a \in A = \mathcal{A}(U_1)$ und $b \in A = \mathcal{A}(U_2)$ nicht von einem Element von $\mathcal{A}(U) = A$ her, die Verklebebedingung ist also verletzt.

Beispiel 2.2.12. Seien X ein topologischer Raum und $U \Subset X$ eine offene Teilmenge. Die Prägarbe

$$h_U := \text{Open}_X(-, U): V \mapsto \begin{cases} \{*\} & \text{falls } V \subset U, \\ \emptyset & \text{sonst,} \end{cases}$$

⁶⁵Dieselbe Aussage gilt für jede mit der Klumpentopologie versehene Menge X .

⁶⁶Diese Verklebebedingung ist im Gegensatz zur Verklebebedingung in Definition 2.2.1 sinnvoll, denn im allgemeinen sind die Objekte von \mathcal{W} keine Mengen.

von Mengen ist eine Garbe. Sie heißt die **durch U repräsentierte Prägarbe/Garbe**. Jede zu einer solchen Prägarbe/Garbe isomorphe Prägarbe/Garbe heißt **repräsentierbar**. Statt repräsentiert/repräsentierbar sagt man auch dargestellt/darstellbar.

Leicht sieht man (oder folgert aus dem Yoneda-Lemma), dass für jede Prägarbe \mathcal{F} von Mengen die Abbildung

$$(2.2.3) \quad \begin{aligned} \text{PSh}(h_U, \mathcal{F}) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(U), \\ \varphi &\mapsto \varphi_U(*), \end{aligned}$$

bijektiv ist.

Aufgabe 2.2.13. Sei $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X .

(a) Die durch

$$X \ni U \mapsto \ker(\varphi_U) = \{s \in \mathcal{F}(U) \mid \varphi_U(s) = 0\}$$

definierte Prägarbe ist eine Garbe (der „Kern von φ “).

Bemerkung: Im später definierten kategoriellen Sinne es dies wirklich der Kern von φ .⁶⁷

(b) Der durch

$$X \ni U \mapsto \text{cok}(\varphi_U) = \frac{\mathcal{G}(U)}{\varphi_U(\mathcal{F}(U))}$$

definierte „Prägarbenkokern“ (der im kategoriellen Sinne wirklich ein Kokern in $\text{PSh}(X; \text{Ab})$ ist) ist im Allgemeinen keine Garbe. Finde ein Gegenbeispiel! **Im Skript angeben (Exponentialsequenz auf $X = \mathbb{S}^1$, siehe Fotos)! Eine andere nette Lösung ist (mit späterer Notation) der Monomorphismus $\mathbb{Z}_{U \in X} \hookrightarrow \mathbb{Z}_X$ für $X = \mathbb{R}$ und $U = (-1, 1)$. Nimm die offene Überdeckung $X = (-\infty, 1) \cup (-1, +\infty)$.**

2.3. Garben und Halme.

Satz 2.3.1.

(a) *Stimmen zwei Schnitte einer Garbe auf allen Halmen überein, so sind sie gleich.*

Ausführlich (und mit der offensichtlichen umgekehrten Implikation): Sei \mathcal{F} eine Garbe auf einem topologischen Raum X und sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Genau dann gilt $s = t$ für zwei Schnitte $s, t \in \mathcal{F}(U)$, wenn $s_u = t_u$ für alle $u \in U$ gilt.⁶⁸

In Formeln: Die Abbildung $\mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_{u \in U} \mathcal{F}_u$, $s \mapsto (s_u)_{u \in U}$, ist injektiv.

(b) *Induziert ein Morphismus von Garben Bijektionen auf allen Halmen, so ist er ein Isomorphismus.*

Ausführlich (und mit der offensichtlichen umgekehrten Implikation): Genau dann ist ein Morphismus $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ von Garben auf einem topologischen Raum X ein Isomorphismus, wenn $\varphi_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ für alle $x \in X$ bijektiv ist.⁶⁹

Mit einer Garbe meinen wir hierbei eine Garbe von Mengen oder abelschen Gruppen oder Gruppen oder R -Moduln.

Beweis. (a) Wir zeigen nur die nicht-triviale Implikation. Gelte $s_u = t_u$ für alle $u \in U$. Jedes $u \in U$ besitzt nach 2.1.2 wegen $s_u = t_u$ eine offene Umgebung $W_u \subseteq U$ mit $s|_{W_u} = t|_{W_u}$. Da $(W_u)_{u \in U}$ eine offene Überdeckung von U ist und \mathcal{F} eine Garbe ist, ist

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_{u \in U} \mathcal{F}(W_u)$$

injektiv. Wir folgern $s = t$.

(b) Wir zeigen nur die nicht-triviale Implikation. Sei also jedes φ_x bijektiv. Sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Es genügt zu zeigen, dass $\varphi(U)$ bijektiv ist.

⁶⁷Allgemeiner sind alle Prägarbenlimiten von Diagrammen von Garben bereits Garben und somit Garbenlimiten, siehe Satz 2.7.1. Der hier betrachtete Kern ist der Egalisator von φ und 0.

⁶⁸Der Beweis dieser Aussage benötigt nur, dass der linke Pfeil in (2.2.1) für alle Systeme \mathcal{U} injektiv ist. Man nennt eine Prägarbe mit dieser Eigenschaft **separiert**.

⁶⁹Es reicht anzunehmen, dass \mathcal{F} eine Garbe und \mathcal{G} eine separierte Prägarbe ist.

Injektivität: Seien $s, t \in \mathcal{F}(U)$ mit $\varphi(U)(s) = \varphi(U)(t)$. Dann gilt

$$\varphi_u(s_u) = (\varphi(U)(s))_u = (\varphi(U)(t))_u = \varphi_u(t_u)$$

für alle $u \in U$ und somit $s_u = t_u$ wegen der Injektivität von φ_u . Teil (a) liefert $s = t$.

Surjektivität: Sei $s \in \mathcal{G}(U)$ gegeben. Für jedes $u \in U$ gibt es eine offene Umgebung $W(u) \Subset X$ und ein Element $t(u) \in \mathcal{F}(W(u))$ mit $\varphi_u(t(u)_u) = s_u$ (da φ_u surjektiv ist und jedes Element von \mathcal{F}_u ein Keim eines Schnitts über einer offenen Umgebung ist). Wegen $s_u = \varphi_u(t(u)_u) = (\varphi(W(u))(t(u)))_u$ gibt es eine offene Umgebung $W'(u) \Subset W(u) \cap U$ von u mit $s|_{W'(u)} = (\varphi(W(u))(t(u)))|_{W'(u)} = \varphi(W'(u))(t(u)|_{W'(u)})$. Indem wir $W(u)$ durch $W'(u)$ und $t(u)$ durch $t(u)|_{W'(u)}$ ersetzen, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass

$$s|_{W(u)} = \varphi(W(u))(t(u))$$

für alle $u \in U$ gilt.

Wir behaupten, dass die Familie $(t(u))_{u \in U}$ die Verklebebedingung erfüllt. In der Tat, für beliebige $u, v \in U$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi(W(u) \cap W(v))(t(u)|_{W(u) \cap W(v)}) &= \varphi(W(u))(t(u))|_{W(u) \cap W(v)} = s|_{W(u)}|_{W(u) \cap W(v)} = s|_{W(u) \cap W(v)} \\ &= \dots = \varphi(W(u) \cap W(v))(t(v)|_{W(u) \cap W(v)}) \end{aligned}$$

und somit auf Grund der bereits bewiesenen Injektivität von $\varphi(W(u) \cap W(v))$

$$t(u)|_{W(u) \cap W(v)} = t(v)|_{W(u) \cap W(v)}.$$

Da \mathcal{F} eine Garbe ist, existiert folglich (genau) ein $t \in \mathcal{F}(\bigcup W(u)) = \mathcal{F}(U)$ mit $t|_{W(u)} = t(u)$ für alle $u \in U$. Da

$$\varphi(U)(t)|_{W(u)} = \varphi(W(u))(t|_{W(u)}) = \varphi(W(u))(t(u)) = s|_{W(u)}$$

gilt und \mathcal{G} eine Garbe ist, folgt $\varphi(U)(t) = s$. Also ist $\varphi(U)$ surjektiv. \square

Korollar 2.3.2. *Induzieren zwei Morphismen von Garben von Mengen (oder abelschen Gruppen oder R -Moduln) auf allen Halmen denselben Morphismus, so sind sie gleich: Sind $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$ zwei Morphismen von Garben auf einem topologischen Raum X mit $\varphi_x = \psi_x$ für alle $x \in X$, so gilt $\varphi = \psi$.*

Beweis. Seien $U \Subset X$ offen und $s \in \mathcal{F}(U)$ beliebig. Wegen $(\varphi(U)(s))_x = \varphi_x(s_x) = \psi_x(s_x) = (\psi(U)(s))_x$ für alle $x \in X$ folgt $\varphi(U)(s) = \psi(U)(s)$ nach Satz 2.3.1.(a) und somit $\varphi = \psi$. \square

2.4. Garben von Mengen und étale Räume.

2.4.1. Unser Ziel ist Satz 2.4.15.

2.4.2. Wir erinnern an die Definition [Sch20, Definition 4.1.11] einer étalen Abbildung: Eine Abbildung $p: E \rightarrow X$ topologischer Räume heißt étale, falls sie stetig ist und jeder Punkt $x \in E$ eine offene Umgebung $U \Subset E$ hat, so dass $p(U)$ offen in X ist und die induzierte Abbildung $U \rightarrow p(U)$ ein Homöomorphismus ist.

Wir erinnern ebenfalls an wichtige Eigenschaften étaler Abbildungen (siehe [Sch20, Aufgabe 4.1.16]):

- (a) Jede Einbettung einer offenen Menge ist étale.
- (b) Jede étale Abbildung ist offen.
- (c) Seien $F \xrightarrow{m} E \xrightarrow{p} X$ stetige Abbildungen. Ist p étale, so ist m genau dann étale, wenn $p \circ m$ étale ist.

Definition 2.4.3. Sei X ein topologischer Raum. Ein **étaler Raum über X** ist eine étale Abbildung $p: E \rightarrow X$; genaugenommen ist das Paar (E, p) gemeint, wobei E ein topologischer Raum und $p: E \rightarrow X$ eine étale Abbildung sind; *by abuse of notation* läßt man oft p weg und spricht nur von E als étalem Raum. Die **Kategorie der étalen Räume über X** ist die volle Unterkategorie $\text{étTop}/X$ von Top/X , deren Objekte die étalen Räume über X sind.

2.4.4. Sei $E = (E \xrightarrow{p} X)$ ein étaler Raum über X .

- (a) Ist $F = (F \xrightarrow{q} X)$ ein weiterer étale Räume über X , so ist jeder Morphismus $m: F \rightarrow E$ in $\text{étTop}/X$ automatisch étale und offen nach 2.4.2.

- (b) Speziell gilt: Ist $s: U \subseteq E$ ein stetiger Schnitt von p , wobei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge ist, so ist s étale und offen (denn U ist étale über X). Als Schnitt ist s injektiv und somit eine offene Einbettung $s: U \xrightarrow{\sim} s(U) \subseteq E$.

Definition 2.4.5 (Étaler Raum einer Prägarbe). Sei \mathcal{F} eine Prägarbe von Mengen auf einem topologischen Raum X . Wir versehen die Menge

$$\text{ét}(\mathcal{F}) := \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

mit der Finaltopologie bezüglich der folgenden Familie $(\bar{s})_{U \subseteq X, s \in \mathcal{F}(U)}$ von Abbildungen:

- Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ und jedes $s \in \mathcal{F}(U)$ betrachte die Abbildung $\bar{s}: U \rightarrow \text{ét}(\mathcal{F})$, $u \mapsto \bar{s}(u) := s_u \in \mathcal{F}_u \subseteq \text{ét}(\mathcal{F})$.

Wir nennen $\text{ét}(\mathcal{F})$ bzw. genauer die offensichtlich stetige⁷⁰ Abbildung

$$\text{ét}(\mathcal{F}) \rightarrow X,$$

die alle Elemente von $\mathcal{F}_x \subseteq \text{ét}(\mathcal{F})$ auf x abbildet, den **étalen Raum (über X) von \mathcal{F}** (die Terminologie wird in Proposition 2.4.10.(c) gerechtfertigt).

Ist $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus, so induzieren die $\varphi_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ eine offensichtlich stetige⁷¹ Abbildung $\text{ét}(\varphi): \text{ét}(\mathcal{F}) \rightarrow \text{ét}(\mathcal{G})$ über X . Dies definiert den Funktor „étaler Raum“

$$\text{ét}: \text{PSh}(X; \text{Set}) \rightarrow \text{Top}/X,$$

der, wie wir in Proposition 2.4.10.(c) sehen werden, in der vollen Unterkategorie $\text{étTop}/X$ landet.

2.4.6. Nach Konstruktion sind die Fasern von $p = p_{\mathcal{F}}: \text{ét}\mathcal{F} \rightarrow X$ genau die Halme von \mathcal{F} , in Formeln $p^{-1}(x) = \mathcal{F}_x$ für alle $x \in X$.

2.4.7. Sei X ein topologischer Raum. Die in 1.6.9 definierte Zuordnung $(q: E \rightarrow X) \mapsto \mathcal{S}E := \mathcal{S}_E = \mathcal{S}_{E/X}$ erweitert in offensichtlicher Weise zu einem Funktor

$$\mathcal{S}: \text{Top}/X \rightarrow \text{PSh}(X; \text{Set}).$$

Dieser Funktor landet in der vollen Unterkategorie $\text{Sh}(X; \text{Set})$ der Garben (siehe Beispiel 2.2.10).

Proposition 2.4.8 (Adjunktion (étaler Raum, Schnitte)). Sei X ein topologischer Raum. Dann ist $(\text{ét}, \mathcal{S})$ ein adjungiertes Paar von Funktoren

$$\text{PSh}(X; \text{Set}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{ét}} \\ \xleftarrow{\mathcal{S}} \end{array} \text{Top}/X$$

durch die wie folgt definierten Bijektionen

$$\alpha = \alpha_{\mathcal{F}, E}: \text{Top}/X(\text{ét}(\mathcal{F}), E) \xrightarrow{\sim} \text{PSh}_{X, \text{Set}}(\mathcal{F}, \mathcal{S}_E),$$

für $\mathcal{F} \in \text{PSh}(X; \text{Set})$ und $(E \xrightarrow{q} X) \in \text{Top}/X$. Ist $f: \text{ét}(\mathcal{F}) \rightarrow E$ ein Morphismus in Top/X , so sei $\alpha(f): \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}_E$ der (wohldefinierte) Prägarbenmorphismus mit

$$\begin{aligned} \alpha(f)(U): \mathcal{F}(U) &\rightarrow \mathcal{S}_E(U), \\ s &\mapsto f \circ \bar{s}, \end{aligned}$$

für $U \subseteq X$.

Beweis. Dem Leser überlassen (siehe Aufgabe 2.4.9): Definiere beispielsweise eine zu α inverse Abbildung β ; zeige, dass α mit Morphismen verträglich ist. \square

⁷⁰Denn für jedes Paar (U, s) wie oben ist die Verknüpfung $U \xrightarrow{\bar{s}} \text{ét}(\mathcal{F}) \rightarrow X$ die stetige Inklusion $U \subseteq X$.

⁷¹Denn für jedes Paar (U, s) wie oben ist die Verknüpfung $U \xrightarrow{\bar{s}} \text{ét}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\text{ét}(\varphi)} \text{ét}(\mathcal{G})$ die stetige Abbildung $\overline{\varphi(U)}(s): U \rightarrow \text{ét}(\mathcal{G})$.

Aufgabe 2.4.9. Beweise Proposition 2.4.8 und zeige, dass Eins η und Koeins ε der Adjunktion wie folgt gegeben sind. Die Eins ist

$$(2.4.1) \quad \begin{aligned} \eta_{\mathcal{F}}: \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{S}_{\text{ét } \mathcal{F}}, \\ \mathcal{F}(U) \ni s &\mapsto (\bar{s}: U \rightarrow \text{ét } \mathcal{F}) \end{aligned}$$

für $\mathcal{F} \in \text{PSh}(X; \text{Set})$ und die Koeins ist

$$(2.4.2) \quad \begin{aligned} \varepsilon_E: \text{ét } \mathcal{S}_E &\rightarrow E, \\ (\mathcal{S}_E)_x = (\mathcal{S}_E)_{q(e)} \ni e = s_x &\mapsto \text{ev}_{q(e)}(e) = e(q(e)) = \text{ev}_x(e) = e(x) = s(x) \end{aligned}$$

für $(E \xrightarrow{q} X) \in \text{Top}/_X$ mit der in 2.1.7 erklärten Auswertung von Funktionskeimen.

Ende der 10. Vorlesung am 18.05.2021 (der 13.05.2021 war Feiertag).

Proposition 2.4.10 (Eigenschaften des étalen Raums einer Prägarbe). *Sei \mathcal{F} eine Prägarbe von Mengen auf einem topologischen Raum X und sei $p: \text{ét}(\mathcal{F}) \rightarrow X$ die stetige Abbildung aus Definition 2.4.5. Dann gelten:*

(a) Die Menge

$$(2.4.3) \quad \{\bar{s}(U) \mid U \subseteq X, s \in \mathcal{F}(U)\}$$

ist eine Basis der Topologie von $\text{ét}(\mathcal{F})$ (siehe [Sch20, Definition 2.8.7]), die mit je zwei Elementen auch deren Schnitt enthält⁷².

(b) Für alle $U \subseteq X$ und $s \in \mathcal{F}(U)$ ist der stetige Schnitt $\bar{s}: U \rightarrow \text{ét}(\mathcal{F})$ von p eine offene Einbettung $\bar{s}: U \xrightarrow{\sim} \bar{s}(U) \subseteq \text{ét}(\mathcal{F})$.⁷³

(c) Die Abbildung $p: \text{ét}(\mathcal{F}) \rightarrow X$ ist étale.

Insbesondere landet der Funktor $\text{ét}: \text{PSh}(X; \text{Set}) \rightarrow \text{Top}/_X$ in der vollen Unterkategorie $\text{étTop}/_X$.

(d) Ist $V \subseteq X$ eine offene Teilmenge, so ist ein Schnitt $t: V \rightarrow \text{ét}(\mathcal{F})$ von p über V genau dann stetig, wenn es für jedes $v \in V$ eine offene Umgebung $U \subseteq V$ und einen Schnitt $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $t|_U = \bar{s}$ gibt.

Beweis. (a) Wir zeigen zuerst, dass alle Elemente von (2.4.3) offen sind. Seien $U \subseteq X$ und $s \in \mathcal{F}$. Wir behaupten $\bar{s}(U) \subseteq \text{ét}(\mathcal{F})$. Für beliebige $V \subseteq X$ und $t \in \mathcal{F}(V)$ ist zu zeigen, dass

$$\bar{t}^{-1}(\bar{s}(U)) = \{x \in U \cap V \mid s_x = t_x\}$$

offen in V ist. Jedes $x \in U \cap V$ mit $s_x = t_x$ hat aber nach 2.1.2 eine offene Umgebung $W \subseteq U \cap V$ mit $s|_W = t|_W$. Daraus folgt $s_w = (s|_W)_w = (t|_W)_w = t_w$ für alle $w \in W$, d. h. $x \in W \subseteq \bar{t}^{-1}(\bar{s}(U))$. Folglich gilt wie gewünscht $\bar{t}^{-1}(\bar{s}(U)) \subseteq V$.

Sei $N \subseteq \text{ét}(\mathcal{F})$ eine beliebige offene Menge. Sei $e \in N$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von $x := p(e)$ und ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $e = s_x = \bar{s}(x)$. Nach Definition der Finaltopologie ist $V := \bar{s}^{-1}(N) \subseteq U$ eine offene Teilmenge mit $x \in V$. Wir folgern $e = \bar{s}(x) \in \bar{s}(V) = \overline{\bar{s}|_V}(V) \subseteq N$. Somit ist N eine Vereinigung von Elementen der Menge (2.4.3). Mit anderen Worten ist (2.4.3) eine Basis.

Seien $U, V \subseteq X$ und $s \in \mathcal{F}(U)$ und $t \in \mathcal{F}(V)$. Wegen $\bar{s}(U) \subseteq \text{ét}(\mathcal{F})$ und der Stetigkeit von \bar{t} ist

$$W := \bar{t}^{-1}(\bar{s}(U)) = \{x \in U \cap V \mid s_x = t_x\}$$

offen in X . Wegen

$$(2.4.4) \quad \bar{s}(U) \cap \bar{t}(V) = \{e \in \text{ét}(\mathcal{F}) \mid \exists x \in U \cap V : s_x = e = t_x\} = \bar{s}(W) = \overline{\bar{s}|_W}(W)$$

ist der Schnitt zweier Elemente unserer Basis wieder in der Basis.

(b) Seien $U \subseteq X$ und $s \in \mathcal{F}(U)$. Sicherlich ist $\bar{s}: U \rightarrow \text{ét}(\mathcal{F})$ stetig und ein Schnitt von p und somit injektiv. Für jede offene Teilmenge $U' \subseteq U$ gilt $\bar{s}(U') = \overline{\bar{s}|_{U'}}(U') \subseteq \text{ét}(\mathcal{F})$. Also ist \bar{s} eine offene Einbettung.

(c) Für jedes $e \in \text{ét}(\mathcal{F})$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von $x := p(e)$ und ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $e = s_x = \bar{s}(x)$. Als offene Einbettung (nach (b)) induziert \bar{s} einen Homöomorphismus $U \xrightarrow{\sim} \bar{s}(U)$, dessen

⁷²Ich war versucht zu schreiben, dass die Basis unter endlichen Schnitte abgeschlossen ist, jedoch ist der „leere Schnitt“ (Indexmenge ist leer) alias der ganze Raum $\text{ét}(\mathcal{F})$ im Allgemeinen nicht in unserer Basis.

⁷³Wenn (c) schon bekannt wäre, wäre (b) eine einfache Folgerung aus 2.4.4.(b).

Inverses natürlich die von p induzierte Abbildung $\bar{s}(U) \rightarrow p(\bar{s}(U)) = U$ ist. Weil $\bar{s}(U)$ eine offene Umgebung von e in $\text{ét}(\mathcal{F})$ ist und $U \Subset X$ gilt, ist p étale.

(d) Die Implikation \Leftarrow ist trivial, denn alle \bar{s} sind stetig. Wir zeigen \Rightarrow . Sei $v \in V$. Wegen $t(v) \in \mathcal{F}_{p(t(v))} = \mathcal{F}_v$ gibt es eine offene Umgebung $W \Subset X$ von v und ein $s \in \mathcal{F}(W)$ mit $t(v) = s_v = \bar{s}(v)$. Da t stetig ist, folgt $v \in U := t^{-1}(\bar{s}(W)) \Subset V \cap W \Subset V$. Dann gilt $t(u) = \bar{s}(u) = s_u$ für alle $u \in U$, also $t|_U = \bar{s}|_U = \overline{s|_U}$. \square

2.4.11. Sei $s \in \mathcal{F}(U)$ ein Schnitt einer Prägarbe \mathcal{F} über einer offenen Menge $U \Subset X$ und sei $x \in U$. Dann enthält jede Umgebung von $s_x \in \text{ét}(\mathcal{F})$ eine offene Umgebung der Form $\bar{s}(W)$ für eine geeignete offene Umgebung $W \Subset U$ von x . Die folgt sofort aus Proposition 2.4.10.(a) und der im Beweis beobachteten Gleichheit (2.4.4).

Lemma 2.4.12. Sei \mathcal{F} ein Prägarbe von Mengen auf X . Dann induziert die Eins $\eta_{\mathcal{F}}: \mathcal{F} \xrightarrow{(2.4.1)} \mathcal{S}_{\text{ét}\mathcal{F}}$ Isomorphismen auf allen Halmen, in Formeln

$$(\eta_{\mathcal{F}})_x: \mathcal{F}_x \xrightarrow{\sim} (\mathcal{S}_{\text{ét}\mathcal{F}})_x$$

für alle $x \in X$.

Beweis. Die Injektivität ist klar, denn die Verknüpfung

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{(\eta_{\mathcal{F}})_x} (\mathcal{S}_{\text{ét}\mathcal{F}})_x \xrightarrow[\text{(2.1.1)}]{\text{ev}_x} p^{-1}(x) = \mathcal{F}_x$$

ist offensichtlich die Identität.

Surjektivität: Jedes Element von $(\mathcal{S}_{\text{ét}\mathcal{F}})_x$ ist der Keim t_x eines $t \in \mathcal{S}_{\text{ét}\mathcal{F}}(V)$ alias stetigen Schnittes $t: V \rightarrow \text{ét}\mathcal{F}$ für eine offene Teilmenge $V \Subset X$. Nach Proposition 2.4.10.(d) gilt ohne Einschränkung $t = \bar{s}$ für ein $s \in \mathcal{F}(V)$. Dann ist $s_x \in \mathcal{F}_x$ das gesuchte Urbild. \square

Lemma 2.4.13. Genau dann ist eine Prägarbe $\mathcal{F} \in \text{PSh}(X; \text{Set})$ eine Garbe, wenn die Eins $\eta_{\mathcal{F}}: \mathcal{F} \xrightarrow{(2.4.1)} \mathcal{S}_{\text{ét}(\mathcal{F})}$ der Adjunktion $(\text{ét}, \mathcal{S})$ ein Isomorphismus ist.

Beweis. \Leftarrow : Dies ist trivial, denn \mathcal{S}_E ist für jede stetige Abbildung $E \rightarrow X$ eine Garbe.

\Rightarrow : Nach Lemma 2.4.12 ist $\eta_{\mathcal{F}}$ halmweise ein Isomorphismus. Weil sowohl \mathcal{F} als auch $\mathcal{S}_{\text{ét}\mathcal{F}}$ Garben sind, ist $\eta_{\mathcal{F}}$ dann automatisch ein Isomorphismus (siehe Satz 2.3.1.(b)). \square

Lemma 2.4.14. Genau dann ist eine stetige Abbildung $q: E \rightarrow X$ étale, wenn die Koeins $\varepsilon_E: \text{ét}(\mathcal{S}_E) \xrightarrow{(2.4.2)} E$ der Adjunktion $(\text{ét}, \mathcal{S})$ ein Isomorphismus ist.

Insbesondere gilt: Ist $q: E \rightarrow X$ étale, so induziert ε_E auf allen Fasern Isomorphismen, in Formeln $(\varepsilon_E)_x = \text{ev}_x: (\mathcal{S}_E)_x \xrightarrow{\sim} q^{-1}(x)$ für alle $x \in X$ (vgl. 2.1.7).

Beweis. Nach Proposition 2.4.10.(c) wissen wir, dass $p: \text{ét}(\mathcal{S}_E) \rightarrow X$ stets étale ist.

\Leftarrow : Das ist mit diesem Wissen trivial.

\Rightarrow : Sei E étale über X . Da die stetige Abbildung ε_E dann ein Morphismus in $\text{étTop}/_X$ ist, ist sie automatisch offen (siehe 2.4.4). Es genügt also zu zeigen, dass ε_E bijektiv ist. Dies ist sicher der Fall, wenn für jedes $x \in X$ die von ε_E auf den Fasern über x induzierte Abbildung

$$(2.4.5) \quad \varepsilon_E: p^{-1}(x) = (\mathcal{S}_E)_x \rightarrow q^{-1}(x)$$

bijektiv ist.

Surjektivität: Für jedes $e \in q^{-1}(x)$ gibt es eine offene Umgebung $e \in W \Subset X$, so dass die von q induzierte Abbildung ein Homöomorphismus $q|_W: W \xrightarrow{\sim} q(W) \Subset X$ ist. Sei $s: q(W) \xrightarrow{\sim} W \Subset E$ sein Inverses. Dann gilt $s \in \mathcal{S}_E(q(W))$. Nach Definition der Koeins gilt $\varepsilon_E(s_x) = s(x) = e$. Also ist (2.4.5) surjektiv.

Injektivität: Seien zwei Elemente von $(\mathcal{S}_E)_x$ gegeben. Wir können sie als s_x und t_x darstellen, für geeignete offene Teilmengen U und V von X und $s \in \mathcal{S}_E(U)$ und $t \in \mathcal{S}_E(V)$. Wir nehmen an, dass die Bilder von s_x und t_x unter (2.4.5) übereinstimmen, dass also $s(x) = t(x)$ gilt. Sei $W \subset E$ eine offene Umgebung von $s(x) = t(x)$, so dass $q|_W: W \xrightarrow{\sim} q(W) \Subset X$ ein Homöomorphismus ist. Da s und t stetig sind, ist $s^{-1}(W) \cap t^{-1}(W)$ eine offene Teilmenge von X . Da $q|_W: W \rightarrow X$ injektiv ist, müssen s und t auf $s^{-1}(W) \cap t^{-1}(W)$ übereinstimmen. Erst recht gilt dann $s_x = t_x$ für die Keime bei x . Also ist (2.4.5) injektiv. \square

Satz 2.4.15 (Garben von Mengen als étale Räume). Sei X ein topologischer Raum. Dann induziert die Adjunktion $(\text{ét}, \mathcal{S}, \eta, \varepsilon)$ von Funktoren $\text{PSh}(X; \text{Set}) \xrightleftharpoons[\mathcal{S}]{\text{ét}} \text{Top}/X$ Äquivalenzen⁷⁴

$$\begin{aligned} \text{ét}: \text{Sh}(X; \text{Set}) &\xrightarrow{\cong} \text{étTop}/X && \text{und} \\ \text{Sh}(X; \text{Set}) &\xleftarrow{\cong} \text{étTop}/X: \mathcal{S} \end{aligned}$$

von Kategorien, die vermöge η und ε quasi-invers zueinander sind.

2.4.16. Wir können uns dank dieses Satzes Garben als geometrische (bzw. zumindest topologische) Objekte vorstellen. Die damit verbundene geometrische Anschauung ist für mein Verständnis von Garben entscheidend.

Entscheidend für geometrische Anschauung von Garben! Male Bilder! Wolkenkratzer 1.6.11, konstante Garben 1.6.7.(b), Ausdehnung durch Null, Seite 32 Soergel; gewisse Einschränkung: der étale Raum von Garben wie $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ ist nicht so leicht zu visualisieren, siehe unten. Der offenen Einbettung $U \subset X$ entspricht h_U aus Beispiel 2.2.12.

Beweis. Dies folgt aus der allgemeinen Aussage von Aufgabe 1.1.42 und unseren Charakterisierungen von étalen Räumen bzw. Garben in Lemma 2.4.14 bzw. Lemma 2.4.13. \square

2.4.17. Der étale Raum $\text{ét}(\mathcal{F})$ einer Garbe ist im Allgemeinen nicht Hausdorff: Sei $\mathcal{C}_{\mathbb{R}} = \mathcal{C}_{\mathbb{R}, \mathbb{R}}$ die Garbe der stetigen reellwertigen Funktionen auf $X = \mathbb{R}$. Betrachte die Nullfunktion 0 und die Funktion $f(x) = \max(x, 0)$ als Elemente von $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$. Ihre Keime 0_p und f_p stimmen an allen Stellen $p < 0$ überein, differieren aber an allen Stellen $p \geq 0$. Daraus folgt, dass die beiden Elemente $f_0 \neq 0_0$ von $\text{ét}(\mathcal{C}_{\mathbb{R}})$ keine disjunkten Umgebungen haben (verwende 2.4.11). Also ist $\text{ét}(\mathcal{C}_{\mathbb{R}})$ nicht Hausdorff.

2.4.18. Sei \mathcal{O} die Garbe der holomorphen Funktionen auf der komplexen Ebene $X = \mathbb{C}$: Sie ordnet jeder offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ die Menge $\mathcal{O}(U)$ der holomorphen Funktionen auf U zu (mit offensichtlichen Restriktionen; es handelt sich offensichtlich um eine Garbe). Für diese Garbe ist $\text{ét}(\mathcal{O})$ Hausdorff: Seien zwei verschiedene Elemente von $\text{ét}(\mathcal{O})$ gegeben. Wir können sie darstellen als Keime f_u und g_v , für geeignete komplexe Zahlen $u, v \in \mathbb{C}$, offene Umgebungen $u \in U \subseteq \mathbb{C}$, $v \in V \subseteq \mathbb{C}$ und Schnitte $f \in \mathcal{O}(U)$, $g \in \mathcal{O}(V)$. Nach Annahme gilt $f_u \neq g_v$.

- Fall $u \neq v$: Dann haben f_u und g_v sicherlich disjunkte offene Umgebungen (etwa $\bar{f}(U)$ und $\bar{g}(V)$), wenn man ohne Einschränkung U und V so verkleinert, dass $U \cap V = \emptyset$ gilt).
- Fall $u = v$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $U = V$ ein offener ε -Ball um $u = v$ ist (also insbesondere zusammenhängend ist, d. h. ein Gebiet in der Sprechweise der Funktionentheorie). Sicherlich sind $\bar{f}(U)$ und $\bar{g}(U)$ offene Umgebungen von f_u und g_u . Wir behaupten, dass sie disjunkt sind. Sonst gibt es ein $x \in U$ mit $f_x = g_x$. Folglich stimmen f und g auf einer offenen Umgebung $W \subseteq U = V$ von x überein. Insbesondere ist $x \in U$ ein Häufungspunkt der Koinzidenzmenge $\{z \in U \mid f(z) = g(z)\}$. Der Identitätssatz für holomorphe Funktionen [Wik20, Identitätssatz für holomorphe Funktionen] liefert $f = g$ auf U und insbesondere $f_u = g_u = g_v$ im Widerspruch zur Annahme.

Also ist $\text{ét}(\mathcal{O})$ Hausdorff.

Genauer ist $\text{ét}(\mathcal{O})$ eine 1-dimensionale holomorphe Mannigfaltigkeit⁷⁵, wenn man als Karten die Homöomorphismen $\bar{s}: U \xrightarrow{\cong} \bar{s}(U) \subseteq \text{ét}(\mathcal{O})$ aus Proposition 2.4.10.(a) nimmt, für $U \subseteq \mathbb{C}$ und $s \in \mathcal{O}(U)$. Eine **Riemannsche Fläche** ist eine zusammenhängende 1-dimensionale holomorphe Mannigfaltigkeit. Ist $f \in \text{ét}(\mathcal{O})$ ein beliebiges Element (= ein Funktionskeim einer holomorphen Funktion), so ist die Zusammenhangskomponente (= Wegzusammenhangskomponente) von f in $\text{ét}(\mathcal{O})$ offen (und abgeschlossen), wie sofort aus [Sch20, 5.2.4 für „lokal wegzusammenhängend“ und Lemma 2.6.17] folgt, also eine Riemannsche Fläche. Wir nennen sie die **Riemannsche Fläche zum Funktionskeim** f . Wir geben einige Beispiele (ohne Beweise, aber hoffentlich sind die Behauptungen anschaulich klar).

⁷⁴By abuse of notation verwenden wir dieselben Symbole ét und \mathcal{S} für die induzierten Funktoren.

⁷⁵Wer die Definition nachlesen möchte, siehe Soergel: Mannigfaltigkeiten und Lie-Gruppen. Insbesondere ist die Hausdorff-Eigenschaft Teil der Definition.

- Sei w eine (holomorphe) n -te Wurzel der holomorphen Funktion $z = \text{id}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ auf einem kleinen ε -Ball um 1, etwa die mit $w(1) = 1$. Dann ist die Riemannsche Fläche F zum Funktionskeim $w_1 \in \mathcal{O}_1$ eine n -blättrige Überlagerung von \mathbb{C}^\times . Die Abbildung

$$F \xrightarrow{\sim} \{(z, u) \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \mid u^n = z\},$$

$$\mathcal{O}_z \ni s_z \mapsto (z, s_z(z)),$$

die man in formal besserer, aber weniger suggestiver Notation als $f \mapsto (p(f), f(p(f)))$ schreiben kann, ist ein Isomorphismus Riemannscher Flächen.

- (langweilig) Seien $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $z \in \mathbb{C}$ und F die Riemannsche Fläche zum Funktionskeim f_z . Dann ist $\bar{f}: \mathbb{C} \rightarrow F$ ein Isomorphismus Riemannscher Flächen.

Für mehr Informationen zu Riemannschen Flächen und dem gerade skizzierten siehe [For77, insbesondere Satz 7.8]; jedoch ist die dortige Verwendung des Begriffs *Überlagerung* verschieden von dem in der Topologie gebräuchlichen, vgl. [For77, Bemerkung nach 4.11 Definition, 4.22 Satz].

2.4.19 (Schnitte einer Garbe über beliebigen Teilmengen). Sei $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X; \text{Set})$ eine Garbe. Dann ist nach Lemma 2.4.13 die Eins ein Isomorphismus $\eta_{\mathcal{F}}: \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_{\text{ét}(\mathcal{F})}$; mit anderen Worten ist für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ die Zuordnung $s \mapsto \bar{s}$ eine Bijektion

$$(2.4.6) \quad \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_{\text{ét} \mathcal{F}}(U) = \{t: U \rightarrow \text{ét}(\mathcal{F}) \text{ stetig} \mid p(t(u)) = u \text{ für alle } u \in U\}.$$

Die rechte Seite ist aber auch sinnvoll für nicht notwendig offene Teilmengen von X . Wir definieren deshalb für beliebige Teilmengen $A \subset X$ die **Menge der Schnitte von \mathcal{F} über A** als

$$(2.4.7) \quad \mathcal{F}(A) := \Gamma(\mathcal{F}; A) := \{t: A \rightarrow \text{ét}(\mathcal{F}) \text{ stetig} \mid p(t(a)) = a \text{ für alle } a \in A\}.$$

⁷⁶ Beispielsweise gilt

$$(2.4.8) \quad \mathcal{F}(\{x\}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_x$$

via $t \mapsto t(x)$.

2.4.20 (Einschränkung einer Garbe auf beliebige Teilmengen). Jede Prägarbe $\mathcal{F} \in \text{PSh}(X; \text{Set})$ läßt sich auf jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ einschränken; wir notieren diese Einschränkung als $\mathcal{F}|_U$. Formal ist sie als Komposition

$$\mathcal{F}|_U: \text{Open}(U)^{\text{op}} \rightarrow \text{Open}(X)^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \text{Set}$$

definiert. Ist \mathcal{F} eine Garbe, so ist $\mathcal{F}|_U$ offensichtlich ebenfalls eine Garbe.

Ist \mathcal{F} eine Garbe, so ist es auch möglich, \mathcal{F} auf beliebige Teilmengen $A \subset X$ einzuschränken, denn mit $p: \text{ét} \mathcal{F} \rightarrow X$ ist auch $(\text{ét} \mathcal{F})|_A = p^{-1}(A) \rightarrow A$ étale (offensichtlich oder als Pullback nach [Sch20, Aufgabe 4.1.16]). Diesem étalen Raum entspricht nach Satz 2.4.15 die Garbe seiner stetigen Schnitte, die wir als

$$\mathcal{F}|_A := \mathcal{S}_{p^{-1}(A)} = \mathcal{S}_{(\text{ét} \mathcal{F})|_A}$$

notieren und als Einschränkung von \mathcal{F} auf A bezeichnen. ⁷⁷ Ihre globalen Schnitt sind genau die Elemente von (2.4.7), in Formeln

$$\mathcal{F}|_A(A) = \mathcal{F}(A).$$

Warnung 2.4.21. Die Einschränkung der Garbe $\mathcal{C}_{\mathbb{R}} = \mathcal{C}_{\mathbb{R}, X}$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf einem topologischen Raum X auf eine offene Teilmenge $U \subset X$ ist die Garbe $\mathcal{C}_{\mathbb{R}, U}$ der stetigen Funktionen auf U . Dies stimmt für andere Teilmengen im Allgemeinen keinesfalls: Ist etwa $x \in X$ ein Punkt, so ist die Einschränkung von $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ auf $\{x\}$ der Halm $(\mathcal{C}_{\mathbb{R}})_x$, aufgefasst als Garbe auf $\{x\}$.

⁷⁶ Die Pingeligen werden einen kleinen Notationskonflikt bemerken: Ist $U \subseteq X$ offen, so haben wir nun eigentlich zwei Definitionen von $\mathcal{F}(U)$, die jedoch bis auf den kanonischen Isomorphismus (2.4.6) übereinstimmen, da \mathcal{F} eine Garbe ist. In der Praxis sieht man diesen Isomorphismus meist als Gleichheit an.

(Dies erklärt auch, weshalb wir $\mathcal{F}(A)$ hier nur für Garben definieren, denn für Prägarben hätten wir sonst wirklich zwei verschiedene Definitionen von $\mathcal{F}(U)$).

⁷⁷ Ähnlich wie in Fußnote 76 sind die beiden für $\mathcal{F}|_U$ gegebenen Definitionen kanonisch isomorph (dies gilt aber nicht, wenn \mathcal{F} nur eine Prägarbe, aber keine Garbe, wäre, wie man schon für $U = X$ sieht).

2.5. Garben von abelschen Gruppen und abelsche Gruppenobjekte étaler Räume.

2.5.1. Der Leser mag sich fragen, ob wir mit Satz 2.4.15 auch Garben von abelschen Gruppen geometrisch beschreiben können. Dies geht mit Hilfe der in 1.2.70 eingeführten Terminologie von abelschen Gruppen-Objekten. **Sinnvoll, diese jetzt zu erklären!**

2.5.2. Jede Äquivalenz zwischen Kategorien induziert eine Äquivalenz zwischen den entsprechenden Kategorien von abelschen Gruppen-Objekten.⁷⁸ Somit liefern (die relativ tautologische Aussage von) Aufgabe 2.5.3 und Satz 2.4.15 Äquivalenzen

$$\mathrm{Sh}(X; \mathrm{Ab}) \xleftarrow{\cong} \mathrm{Ab}(\mathrm{Sh}(X; \mathrm{Set})) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ab}(\mathrm{étTop}/X)$$

von Kategorien. In Worten kann man also Garben abelscher Gruppen auf X durch abelsche Gruppen-Objekte in der Kategorie der étalen Räume beschreiben.

Was ist aber nun ein Objekt von $\mathrm{Ab}(\mathrm{étTop}/X)$ konkret?

Dazu sollten wir zunächst das terminale Objekt und endliche Produkte in $\mathrm{étTop}/X$ verstehen, was aber einfach ist: Das terminale Objekt ist $\mathrm{id}_X: X \rightarrow X$. Gegeben zwei étale Abbildungen $E \rightarrow X$ und $F \rightarrow X$ ist $E \times_X F \rightarrow X$ ebenfalls étale (nach [Sch20, Aufgabe 4.1.16]) und offensichtlich das Produkt in $\mathrm{étTop}/X$ (wie auch in Top/X). Analog werden endliche Produkte gebildet.

Somit ist ein Objekt von $\mathrm{Ab}(\mathrm{étTop}/X)$ eine étale Abbildung $p: E \rightarrow X$ zusammen mit Additions- und Neutrales-Element- und Inversen-Morphismen

$$\begin{aligned} \mu = +: E \times_X E &\rightarrow E, \\ \eta: X &\rightarrow E, \\ \iota = -: E &\rightarrow E \end{aligned}$$

in $\mathrm{étTop}/X \subset \mathrm{Top}/X$, so dass die in 1.2.70 erklärten Diagramme kommutieren. Kommutativität ist beispielsweise im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E \times_X E & \xrightarrow[\substack{\text{swap} \\ (e,f) \mapsto (f,e)}}{=} & E \times_X E \\ & \searrow + & \swarrow + \\ & E & \end{array}$$

codiert.

Offensichtlich ist die Faser $E(x) = p^{-1}(x) \cong \mathrm{Top}/X(\{x\}, E)$ über jedem Punkt $x \in X$ eine abelsche Gruppe. Salopp gesprochen ist $p: E \rightarrow X$ eine „Familie $(E(x))_{x \in X}$ von stetig in X variierenden abelschen Gruppen“.

Aufgabe 2.5.3 ((Prä-)Garben abelscher Gruppen als abelsche Gruppen-Objekte in der Kategorie der (Prä-)Garben von Mengen). Sei X ein topologischer Raum. Die naheliegenden Funktoren liefern waagerechte Äquivalenzen von Kategorien und senkrechte Inklusionen voller Unterkategorien im kommutativen Diagramm⁷⁹

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ab}(\mathrm{PSh}(X; \mathrm{Set})) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{PSh}(X; \mathrm{Ab}) \\ \cup & & \cup \\ \mathrm{Ab}(\mathrm{Sh}(X; \mathrm{Set})) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Sh}(X; \mathrm{Ab}). \end{array}$$

Hinweis: Zuerst kümmere man sich um die obere Horizontale. Dazu verallgemeinere man den Isomorphismus (1.2.16) mit Hilfe der folgenden Formalität (die so tautologisch ist, dass das Hauptproblem darin besteht, zu verstehen, was eigentlich zu zeigen ist): Ist \mathcal{C} eine beliebige Kategorie mit endlichen Produkten und ist

⁷⁸Vgl. 1.2.72; jede Äquivalenz erhält alle Limiten und Kolimiten, was man direkt sieht, aber auch daraus folgt, dass sie sowohl ein linksadjungierter als auch ein rechtsadjungierter Funktor ist.

⁷⁹Wer mag, kann sich auch noch überlegen, dass alles mit den Vergissfunktoren nach $\mathrm{PSh}(\mathrm{Set}; X)$ und $\mathrm{Sh}(\mathrm{Set}; X)$ kompatibel ist.

\mathcal{I} eine Kategorie, so hat $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ nach Aufgabe 1.2.68 ebenfalls alle endlichen Produkte und der naheliegende Funktor ist eine Äquivalenz

$$(2.5.1) \quad \text{Ab}(\mathcal{C}^{\mathcal{I}}) \xrightarrow{\cong} \text{Ab}(\mathcal{C})^{\mathcal{I}}$$

von Kategorien. **Nachträglich ergänzt:** Die linke Vertikale existiert (als Funktor, den man dann als Inklusion einer vollen Unterkategorie auffassen kann) wegen 1.2.72 und der (offensichtlichen, aber noch nicht bewiesenen) Tatsache, dass $\text{Sh}(X; \text{Set}) \rightarrow \text{PSh}(X; \text{Set})$ mit endlichen Produkten (und sogar allen Limiten) kommutiert, siehe der erste Punkt von Satz 2.7.1.

Bemerkung: Analoges gilt für Grp, Ring, Mod(R) etc. statt Ab.

2.5.4 (Alternative Definition eines abelschen Gruppen-Objekts). **nicht in Vorlesung erklärt** Wir erklären, wie die Tautologie (2.5.1) zu einer äquivalenten Beschreibung der Kategorie abelscher Gruppen-Objekte führt. Sei \mathcal{C} eine Kategorie. Da der volltreue Yoneda Funktor $\mathcal{C} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$, $G \mapsto \mathcal{C}(-, G)$, offensichtlich mit endlichen Produkten (und sogar beliebigen Limiten, siehe Fußnote 19) vertauscht, erhalten wir mit 1.2.72 den ersten der folgenden Funktoren, der volltreu ist, die anderen Funktoren sind die angegebenen Äquivalenzen von Kategorien.

$$\text{Ab}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ab}(\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}) \xrightarrow[\cong]{(2.5.1)} \text{Ab}(\text{Set})^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \xrightarrow[\cong]{(1.2.16)^{-1}} \text{Ab}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}.$$

In Worten ist ein abelsches Gruppenobjekt $(A, +, 0, -)$ in \mathcal{C} also „dasselbe“ wie ein Objekt $A \in \mathcal{C}$ zusammen mit einem „Lift“ $\widetilde{\mathcal{C}(-, A)} \in \text{Ab}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ von $\mathcal{C}(-, A) \in \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ unter dem Vergissfunktor $\text{Ab}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$, also kompatiblen Gruppenstrukturen auf allen $\mathcal{C}(S, A)$ für $S \in \mathcal{C}$.

Analog kann man Gruppenobjekte (statt abelscher Gruppenobjekte) etc. beschreiben.

Ende der 11. Vorlesung am 20.05.2021.

Hausaufgaben:

- (1) Aufgabe 2.2.7: Prägarben und Garben von Mengen bzw. abelschen Gruppen auf zweielementigem Raum.
- (2) Aufgabe 2.4.9: Adjunktion $(\text{ét}, \mathcal{S})$
- (3) Aufgabe 2.2.13: Prägarbenkern bzw. -kokern
- (4) Aufgabe 2.5.3: abelsche Gruppenobjekte von Garben

2.6. Garbifizierung.

Satz 2.6.1 (Garbifizierung für Prägarben von Mengen). *Sei X ein topologischer Raum. Der Funktor **Garbifizierung***

$$\begin{aligned} \natural := \mathcal{S} \circ \text{ét} : \text{PSh}(X; \text{Set}) &\rightarrow \text{Sh}(X; \text{Set}), \\ \mathcal{P} &\mapsto \natural \mathcal{P}, \end{aligned}$$

und die (volltreue) Inklusion $\iota : \text{Sh}(X; \text{Set}) \subset \text{PSh}(X; \text{Set})$ bilden ein Paar (\natural, ι) adjungierter Funktoren vermöge der Bijektionen

$$(2.6.1) \quad \circlearrowright \eta_{\mathcal{P}} : \text{Sh}(\natural \mathcal{P}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\cong} \text{PSh}(\mathcal{P}, \iota(\mathcal{G})),$$

für Prägarben $\mathcal{P} \in \text{PSh}(X; \text{Set})$ und Garben $\mathcal{G} \in \text{Sh}(X; \text{Set})$, wobei $\eta_{\mathcal{P}}$ die Eins $\eta_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}_{\text{ét}} \mathcal{P} = \natural \mathcal{P}$ der Adjunktion $(\text{ét}, \mathcal{S})$ ist.⁸⁰

⁸⁰Für die Pingeligen: Genau genommen ist \natural der eindeutige Funktor, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{PSh}(X; \text{Set}) & \xrightarrow{\mathcal{S} \circ \text{ét}} & \text{PSh}(X; \text{Set}) \\ & \searrow \natural & \cup \iota \\ & & \text{Sh}(X; \text{Set}) \end{array}$$

kommutativ macht. Die Abbildung (2.6.1) bildet genau genommen einen Morphismus $\varphi : \natural \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$ auf die Verknüpfung $\iota(\varphi) \circ \eta_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \xrightarrow{\eta_{\mathcal{P}}} \mathcal{S}_{\text{ét}} \mathcal{P} = \natural \mathcal{P} \xrightarrow{\iota \varphi} \iota \mathcal{G}$ ab.

2.6.2 (Universelle Eigenschaft der Garbifizierung). Die Bijektion (2.6.1) kann auch als universelle Eigenschaft der Eins $\eta_{\mathcal{P}}: \mathcal{P} \rightarrow \mathfrak{h}\mathcal{P}$ gelesen werden, wobei $\mathcal{P} \in \text{PSh}(X; \text{Set})$ eine beliebige Prägarbe ist: Für jede Garbe $\mathcal{G} \in \text{Sh}(X; \text{Set})$ faktorisiert jeder Prägarbenmorphismus $\psi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$ in eindeutiger Weise als

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{P}}} & \mathfrak{h}\mathcal{P} \\ & \searrow \psi & \downarrow \exists! \tilde{\psi} \\ & & \mathcal{G}. \end{array}$$

⁸¹ In diesem Sinne ist $\eta_{\mathcal{P}}$ eine „universelle Prägarbe-Garbe-Abbildung“. Ist \mathcal{P} bereits eine Garbe, so ist sie ein Isomorphismus (nach Lemma 2.4.13).

Beweis. Für beliebige Prägarben $\mathcal{P}, \mathcal{G} \in \text{PSh}(X; \text{Set})$ betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \text{PSh}(\mathcal{P}, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{G} \circ}} & \text{PSh}(\mathcal{P}, \mathcal{S} \acute{\text{e}}\mathcal{t} \mathcal{G}) & \xleftarrow{\sim} & \text{Top}_{/X}(\acute{\text{e}}\mathcal{t} \mathcal{P}, \acute{\text{e}}\mathcal{t} \mathcal{G}) \\ \uparrow \circ \eta_{\mathcal{P}} & & \uparrow \circ \eta_{\mathcal{P}} & \swarrow \mathcal{S} & \\ \text{PSh}(\mathcal{S} \acute{\text{e}}\mathcal{t} \mathcal{P}, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{G} \circ}} & \text{PSh}(X; \text{Set})(\mathcal{S} \acute{\text{e}}\mathcal{t} \mathcal{P}, \mathcal{S} \acute{\text{e}}\mathcal{t} \mathcal{G}), & & \end{array}$$

dessen rechte obere Horizontale die Adjunktionsbijektion ist. Das linke Quadrat ist offensichtlich kommutativ, das rechte Dreieck ist wegen des kommutativen rechten oberen Dreiecks in (1.1.9) kommutativ.⁸² Die Abbildung \mathcal{S} ist bijektiv, denn \mathcal{S} ist volltreu auf étalen Räumen (siehe Satz 2.4.15). Also ist die rechte Vertikale $\circ \eta_{\mathcal{P}}$ bijektiv. Ist nun \mathcal{G} sogar eine Garbe, so ist $\eta_{\mathcal{G}}$ ein Isomorphismus (siehe Lemma 2.4.13), so dass dann auch die linke Vertikale $\circ \eta_{\mathcal{P}}$ bijektiv ist. Da die Morphismenmenge links unten mit $\text{Sh}(\mathfrak{h}\mathcal{P}, \mathcal{G})$ übereinstimmt, zeigt dies die Bijektivität von (2.6.1). Offensichtlich ist (2.6.1) natürlich in \mathcal{P} und \mathcal{G} . \square

2.6.3. Garbifizierung verändert die Halme nicht: Nach Lemma 2.4.12 gilt $\mathcal{P}_x \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{h}\mathcal{P})_x$ für alle $x \in X$.

Beispiel 2.6.4 (Garbifizierung auf einelementigen Räumen). Sei \mathcal{P} eine Prägarbe von Mengen auf einem einelementigen Raum $\{*\}$. Dann ist ihre Garbifizierung $\mathfrak{h}\mathcal{P}$ durch

$$(2.6.2) \quad (\mathfrak{h}\mathcal{P})(\{*\}) = \mathcal{S}_{\acute{\text{e}}\mathcal{t} \mathcal{P}}(\{*\}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_* \xleftarrow{\sim} \mathcal{P}(\{*\})$$

eindeutig gegeben (denn wie immer bei Garben ist $(\mathfrak{h}\mathcal{P})(\emptyset)$ einelementig). Modulo des Isomorphismus $\text{Sh}(\{*\}; \text{Set}) \xrightarrow{\sim} \text{Set}$ aus 2.2.6 ist Garbifizierung also isomorph zum Halm-Funktor $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}_*$ und auch zum Globale-Schnitte-Funktor $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}(\{*\})$.

2.6.5 (Explizite Beschreibung der Garbifizierung). Sei $\mathcal{P} \in \text{PSh}(X; \text{Set})$ eine Prägarbe von Mengen. Dann gilt

$$(2.6.3) \quad \begin{aligned} (\mathfrak{h}\mathcal{P})(U) &= \mathcal{S}_{\acute{\text{e}}\mathcal{t} \mathcal{P}}(U) \\ &= \{s: U \rightarrow \acute{\text{e}}\mathcal{t} \mathcal{P} \text{ stetiger Schnitt}\} \\ &= \left\{ s = (s(u))_{u \in U} \in \prod_{u \in U} \mathcal{P}_u \mid \begin{array}{l} \text{für alle } u \in U \text{ existiert eine offene Umgebung } V \ni u \\ \text{und ein } t \in \mathcal{P}(V) \text{ mit } t_v = s(v) \text{ für alle } v \in V \end{array} \right\} \end{aligned}$$

für jedes $U \ni x$, wobei die letzte Gleichung wegen Proposition 2.4.10.(d) gilt. Man beachte, dass in der letztgenannten Menge der étale Raum $\acute{\text{e}}\mathcal{t} \mathcal{P}$ keine Rolle spielt bzw. jedenfalls nicht explizit auftaucht, man also die Garbifizierung $\mathfrak{h}\mathcal{P}$ auch ohne explizite Erwähnung des étalen Raums $\acute{\text{e}}\mathcal{t} \mathcal{P}$ hätte definieren können.

Aufgabe 2.6.6 (Garbifizierung für Prägarben abelscher Gruppen). Zeige, dass Satz 2.6.1 sinngemäß auch für Prägarben und Garben von abelschen Gruppen (statt Prägarben und Garben von Mengen) gilt.

Hinweis als Slogan: Garbifizierung von Prägarben von Mengen ist „dasselbe“ wie Garbifizierung von Prägarben von abelschen Gruppen.

⁸¹Dies ist genau 1.1.36.(a), jedoch unterdrücken wir hier den Rechtsadjungierten $\iota: \text{Sh}(X; \text{Set}) \subset \text{PSh}(X; \text{Set})$ in der Notation. Vergleiche auch 1.1.37 und Aufgabe 1.1.38.

⁸²Nicht benötigt: Das Diagramm bleibt kommutativ, wenn man die beiden oberen Ecken mit der Abbildung $\acute{\text{e}}\mathcal{t}$ verbindet, denn es gilt $\eta_{\mathcal{G}} \circ \varphi = (\mathcal{S} \acute{\text{e}}\mathcal{t} \varphi) \circ \eta_{\mathcal{P}}$ für alle $\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$, denn η ist eine natürliche Transformation.

Hinweis: Sei $\mathcal{P} \in \text{PSh}(X; \text{Ab})$ eine Prägarbe abelscher Gruppen. Definiere eine Garbe abelscher Gruppen $\mathfrak{h}^{\text{Ab}}\mathcal{P}$ so, dass ihre unterliegende Garbe von Mengen die Garbifizierung von $\mathfrak{h}\mathcal{P} = \mathfrak{h}^{\text{Set}}\mathcal{P}$ ist (verwende (2.6.3)).

Bemerkung: Analog wird Garbifizierung für Gruppen-Prägarben, Modul-Prägarben, Ring-Prägarben definiert.

Aufgabe 2.6.7. Finde Beispiele von Prägarben, die keine Garben sind. Wie sieht ihre Garbifizierung aus?

Hinweis: Aufgabe 2.2.7

2.7. Limiten und Kolimiten von Garben.

Satz 2.7.1 (Limiten und Kolimiten von Garben). *Die Kategorie $\text{Sh}(X; \text{Set})$ der Garben von Mengen auf einem topologischen Raum X hat alle Limiten und Kolimiten und diese können wie folgt berechnet werden:*

- *Der Limes eines Diagramms von Garben in der Kategorie der Prägarben ist (eine Garbe und) ein Limes in der Kategorie der Garben, in Formeln $\lim^{\text{Sh}} \mathcal{F}_i = \lim^{\text{PSh}} \mathcal{F}_i$ für jedes Diagramm $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Set})$ von Garben.*⁸³
- *Die Garbifizierung des Kolimes eines Diagramms von Garben in der Kategorie der Prägarben ist ein Kolimes in der Kategorie der Garben, in Formeln $\text{colim}^{\text{Sh}} \mathcal{F}_i = \mathfrak{h} \text{colim}^{\text{PSh}} \mathcal{F}_i$ für jedes Diagramm \mathcal{F} von Garben.*

Analoges gilt für die Kategorie $\text{Sh}(X; \text{Ab})$ der Garben abelscher Gruppen.

Aufgabe 2.7.2. (sehr leicht) Wie sehen das initiale Objekt und das terminale Objekt in $\text{Sh}(X; \text{Set})$ und $\text{Sh}(X; \text{Ab})$ aus?

Beweis. Nach 1.6.12 gibt es in der Kategorie der Prägarben alle Limiten und Kolimiten und diese werden objektweise berechnet erkannt. Sei $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Set})$ ein Diagramm von Garben von Mengen oder ein Diagramm $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Ab})$ von Garben von abelschen Gruppen.

Zum Limes: Wir behaupten, dass sein ohne Einschränkung objektweise berechneter Limes $\lim_{i \in \mathcal{I}}^{\text{PSh}} \mathcal{F}_i$ in der Kategorie der Prägarben eine Garbe ist; dann ist er nach Aufgabe 1.2.67 der gesuchte Limes in der Kategorie der Garben.

Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System offener Teilmengen mit Vereinigung $W := \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Sei $i \in \mathcal{I}$. Da \mathcal{F}_i eine Garbe ist, ist $\mathcal{F}_i(W)$ der Egalisator/Limes des Diagramms

$$\prod_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{F}_i(U) \xrightarrow[r_1]{r_2} \prod_{U, V \in \mathcal{U}} \mathcal{F}_i(U \cap V)$$

von Mengen (siehe 2.2.4). Aufgabe 1.2.26 impliziert⁸⁴, dass $\lim_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i(W)$ der Egalisator von

$$\prod_{U \in \mathcal{U}} \lim_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i(U) \xrightarrow[r_1]{r_2} \prod_{U, V \in \mathcal{U}} \lim_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i(U \cap V)$$

ist. Wegen der objektweisen Berechnung von $\lim_{i \in \mathcal{I}}^{\text{PSh}} \mathcal{F}_i$ ist also $(\lim_{i \in \mathcal{I}}^{\text{PSh}} \mathcal{F}_i)(W)$ der Egalisator von

$$\prod_{U \in \mathcal{U}} (\lim_{i \in \mathcal{I}}^{\text{PSh}} \mathcal{F}_i)(U) \xrightarrow[r_1]{r_2} \prod_{U, V \in \mathcal{U}} (\lim_{i \in \mathcal{I}}^{\text{PSh}} \mathcal{F}_i)(U \cap V).$$

Dies zeigt, dass $\lim_{i \in \mathcal{I}}^{\text{PSh}} \mathcal{F}_i$ eine Garbe ist.

Zum Kolimes: Wir behaupten, dass $\mathfrak{h} \text{colim}_{i \in \mathcal{I}}^{\text{PSh}} \mathcal{F}_i$ oder präziser $\mathfrak{h} \text{colim}_{i \in \mathcal{I}}^{\text{PSh}} \iota(\mathcal{F}_i)$ zusammen mit den Verknüpfungen

$$\text{in}_j: \mathcal{F}_j \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}\iota\mathcal{F}_j \xrightarrow{\mathfrak{h}\text{in}_j} \mathfrak{h} \text{colim}_{i \in \mathcal{I}}^{\text{PSh}} \iota(\mathcal{F}_i)$$

⁸³In Aufgabe 2.2.13.(a) hat der Leser das bereits in einem konkreten Fall nachgerechnet.

⁸⁴Neben \mathcal{I} betrachten wir die Indexkategorie $\mathcal{J} = (1 \xrightarrow{\alpha} 2)$ und den Funktor $F: \mathcal{I} \times \mathcal{J} \rightarrow \text{Set}$, der $(i, 1)$ auf $\prod_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{F}_i(U)$ und $(i, 2)$ auf $\prod_{U, V \in \mathcal{U}} \mathcal{F}_i(U \cap V)$ abbildet und Morphismen in der offensichtlichen Weise abbildet. Dann gilt $\mathcal{F}_i(W) = \lim_{j \in \mathcal{J}} F(i, j)$ und die zitierte Aufgabe liefert $\lim_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i(W) = \lim_{i \in \mathcal{I}} \lim_{j \in \mathcal{J}} F(i, j) \cong \lim_{j \in \mathcal{J}} \lim_{i \in \mathcal{I}} F(i, j) = \text{eq} \left(\prod_{U \in \mathcal{U}} \lim_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i(U) \xrightarrow[r_1]{r_2} \prod_{U, V \in \mathcal{U}} \lim_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i(U \cap V) \right)$. Weil Produkte Limiten sind, liefert die zitierte Aufgabe aber auch $\prod_{U \in \mathcal{U}} \lim_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i(U) \cong \lim_{i \in \mathcal{I}} \prod_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{F}_i(U)$ und analog für das andere Produkt.

als kanonischen Morphismen ein Kolimes ist. Sei $\mathcal{T} \in \text{Sh}(X; \text{Set})$ eine beliebige Garbe. Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Sh}(\natural \text{colim}_{i \in \mathcal{I}}^{\text{PSh}} \iota(\mathcal{F}_i), \mathcal{T}) & \cong & \text{PSh}(\text{colim}_{i \in \mathcal{I}}^{\text{PSh}} \iota(\mathcal{F}_i), \iota(\mathcal{T})) \\ \downarrow & & \downarrow \sim \\ \lim_{i \in \mathcal{I}} \text{Sh}(\mathcal{F}_i, \mathcal{T}) & \xrightarrow{\sim} & \lim_{i \in \mathcal{I}} \text{PSh}(\iota(\mathcal{F}_i), \iota(\mathcal{T})), \end{array}$$

dessen linke Vertikale von den Morphismen in_j induziert ist, kommutativ⁸⁵. Die obere Bijektion kommt von der Adjunktion (\natural, ι) , die untere von der Volltreueheit von ι und die rechte von Proposition 1.2.22, welche dann nochmals angewandt unsere Behauptung liefert.

Konkret konstruiert man Morphismen aus dem Garbenkolimes also wie folgt: Gegeben eine Familie kompakter Morphismen in die Garbe \mathcal{T} kommt diese von einem eindeutigen Morphismus vom Prägarbenkolimes, welcher nach der universellen Eigenschaft eindeutig über den Garbifizierungsmorphismus faktorisiert, also vom Garbenkolimes herkommt.

Dieser Beweis ist offensichtlich eine Instanz eines allgemeinen Resultats: Wenn ein volltreuer Funktor $\iota: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ einen Linksadjungierten L hat und \mathcal{B} alle Kolimiten besitzt, so hat auch \mathcal{A} alle Kolimiten und es gilt $\text{colim}^{\mathcal{A}} = L \text{colim}^{\mathcal{B}}$. \square

Beispiel 2.7.3 (Garbifizierung bei Kolimiten ist nötig). Sei ein topologischer Raum $X = U \sqcup V$ die disjunkte Vereinigung zweier offener nichtleerer Teilmengen U, V (etwa $X = \{1\} \sqcup \{2\}$ mit der diskreten Topologie). Dann ist das Prägarbenkoprodukt $h_U \amalg^{\text{PSh}} h_V$ der beiden durch U und V dargestellten Garben h_U und h_V (siehe Beispiel 2.2.12) keine Garbe. Das Garbenkoprodukt $h_U \amalg^{\text{Sh}} h_V$ ist isomorph zu h_X . Dies zeigt, dass ein Prägarbenkolimes von Garben im Allgemeinen keine Garbe ist.

Beispiel 2.7.4 (Eine Art Fortsetzung von Aufgabe 2.1.9). Für jede Garbe $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X; \text{Set})$ von Mengen auf einem topologischen Raum X behaupten wir, dass der kanonische Morphismus aus dem Kolimes ein Isomorphismus

$$\text{colim}_{(U,s) \in \text{Open}(X) \downarrow \mathcal{F}}^{\text{Sh}} h_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$$

ist. In der Tat, betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{colim}_{(U,s) \in \text{Open}(X) \downarrow \mathcal{F}}^{\text{Sh}} h_U & \xrightarrow{\dots\dots\dots} & \mathcal{F} \\ \uparrow & \nearrow \sim & \\ \text{colim}_{(U,s) \in \text{Open}(X) \downarrow \mathcal{F}}^{\text{PSh}} h_U & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{(2.1.2)} \end{array}$$

dessen linke Vertikale der kanonische Morphismus in die Garbifizierung ist, weswegen der gestrichelte Morphismus eindeutig existiert (dies ist der obige kanonische Morphismus aus dem Kolimes, vergleiche der blaue Text im obigen Beweis). Da (2.1.2) ein Isomorphismus ist und da \mathcal{F} eine Garbe ist, ist der Prägarbenkolimes bereits eine Garbe, die linke Vertikale ist also ein Isomorphismus. Also ist der gestrichelte Morphismus ein Isomorphismus.

Proposition 2.7.5. Sei X ein topologischer Raum. Dann gelten:

- (a) Für jedes $x \in X$ kommutiert der Halm-Funktor $(-)_x: \text{Sh}(X; \text{Set}) \rightarrow \text{Set}$ mit allen Kolimiten und allen ENDLICHEN Limiten (aber im Allgemeinen nicht mit unendlichen Produkten, siehe Beispiel 2.7.6).
- (b) Genauer detektieren alle Halm-Funktoren gemeinsam Kolimiten und ENDLICHE Limiten von Garben:

⁸⁵Denn

$$\begin{array}{ccc} \text{colim} \iota(\mathcal{F}_i) & \longrightarrow & \iota \natural \text{colim} \iota(\mathcal{F}_i) \\ \uparrow \text{in}_j & & \uparrow \iota \natural \text{in}_j \\ \iota(\mathcal{F}_j) & \xrightarrow{\sim} & \iota \natural \iota(\mathcal{F}_j) \end{array}$$

ist kommutativ.

- Ein Kegel \mathcal{C} unter einem Diagramm $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Set})$, $i \mapsto \mathcal{F}(i)$ von Garben ist genau dann ein Kolimes, wenn \mathcal{C}_x für jedes $x \in X$ ein Kolimes von $(-)_x \circ \mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow \text{Set}$, $i \mapsto \mathcal{F}(i)_x$ ist.
- Ein Kegel \mathcal{L} über einem ENDLICHEN Diagramm $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Set})$, $i \mapsto \mathcal{F}(i)$ von Garben ist genau dann ein Limes, wenn \mathcal{L}_x für jedes $x \in X$ ein Limes von $(-)_x \circ \mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow \text{Set}$, $i \mapsto \mathcal{F}(i)_x$ ist.

(c) **Halm-Funktor auf Prägarben.** *Hauptsächlich Vorbereitung zu (a), aber ich brauche es nochmal in der nächsten Proposition.* Für jedes $x \in X$ kommutiert der Halm-Funktor $(-)_x: \text{PSh}(X; \text{Set}) \rightarrow \text{Set}$ mit allen Kolimiten und allen ENDLICHEN Limiten (aber im Allgemeinen nicht mit unendlichen Produkten, siehe Beispiel 2.7.6).

Analoges gilt für die Kategorie $\text{Sh}(X; \text{Ab})$ der Garben abelscher Gruppen.

Beweis. (c) **Zu Kolimiten:** Gelte $\mathcal{C} = \text{colim } \mathcal{F}_i$ in $\text{PSh}(X; \text{Set})$ und werde der Kolimes ohne Einschränkung objektweise ausgerechnet. Dann gilt $\mathcal{C}(U) = (\text{colim } \mathcal{F}_i)(U) = \text{colim } \mathcal{F}_i(U)$ für jedes $U \subseteq X$ nach 1.6.12. Das Analogon von Aufgabe 1.2.26 für Kolimiten zeigt dann

$$\mathcal{C}_x = \text{colim}_{x \in U \subseteq X} \mathcal{C}(U) = \text{colim}_{x \in U \subseteq X} \text{colim}_i \mathcal{F}_i(U) \cong \text{colim}_i \text{colim}_{x \in U \subseteq X} \mathcal{F}_i(U) = \text{colim}_i (\mathcal{F}_i)_x.$$

Zu endlichen Limiten: Gelte $\mathcal{L} = \lim_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i$ in $\text{PSh}(X; \text{Set})$, wobei die Indexkategorie \mathcal{I} endlich ist und der Limes ohne Einschränkung objektweise ausgerechnet werde. Da der Halm bei x ein FILTERRENDER Kolimes von Mengen ist und solche Kolimiten mit ENDLICHEN Limiten vertauschen (siehe Aufgabe 1.2.75.(c)), erhalten wir ähnlich wie oben

$$\mathcal{L}_x = \text{colim}_{x \in U \subseteq X} \mathcal{L}(U) = \text{colim}_{x \in U \subseteq X} \lim_i \mathcal{F}_i(U) \cong \lim_i \text{colim}_{x \in U \subseteq X} \mathcal{F}_i(U) = \lim_i (\mathcal{F}_i)_x.$$

(a) **Zu endlichen Limiten:** Da $\iota: \text{Sh}(X; \text{Set}) \rightarrow \text{PSh}(X; \text{Set})$ mit allen Limiten vertauscht (nach Satz 2.7.1 oder alternativ als Rechtsadjungierter zur Garbifizierung nach Satz 1.2.23), vertauscht

$$(-)_x: \text{Sh}(X; \text{Set}) \xrightarrow{\iota} \text{PSh}(X; \text{Set}) \xrightarrow{(-)_x} \text{Set}$$

nach (c) mit allen endlichen Limiten.

Zu Kolimiten: Gelte $\mathcal{C} = \text{colim}^{\text{Sh}} \mathcal{F}_i$ in $\text{PSh}(X; \text{Set})$. Nach Satz 2.7.1 können wir annehmen, dass $\mathcal{C} = \natural \text{colim}^{\text{PSh}} \iota(\mathcal{F}_i)$ gilt. Da Garbifizierung den Halm nicht ändert (siehe 2.6.3), folgt mit (c) wie gewünscht.

$$\mathcal{C}_x = (\natural \text{colim}^{\text{PSh}} \iota(\mathcal{F}_i))_x \xleftarrow{\sim} (\text{colim}^{\text{PSh}} \iota(\mathcal{F}_i))_x \cong \text{colim} \iota(\mathcal{F}_i)_x = \text{colim} (\mathcal{F}_i)_x.$$

(b) Die Implikationen \Rightarrow wiederholen nur (a).

Zu den Implikationen \Leftarrow : Wir haben einen induzierten Morphismus $\text{colim } \mathcal{F}(i) \rightarrow \mathcal{C}$ bzw. $\mathcal{L} \rightarrow \lim \mathcal{F}(i)$. Nach Annahme und (a) induziert er einen Isomorphismus auf allen Halmen. Somit ist er nach Satz 2.3.1.(b) bereits ein Isomorphismus.

Die Beweise der entsprechenden Aussagen für $\text{Sh}(X; \text{Ab})$ gehen analog; man beachte dabei, dass filtrierende Kolimiten von abelschen Gruppen ebenfalls mit endlichen Limiten vertauschen, wie sofort aus den Slogans 1.2.55 und 1.2.11 folgt. \square

Beispiel 2.7.6 (Halm des Produkts ist nicht das Produkt der Halme). Betrachte auf $X = \mathbb{R}$ die durch offene Bälle $U_n := B_{1/n}(0)$ dargestellten Garben $\mathcal{F}(n) := h_{U_n}$ und ihr Produkt $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(n)$ in der Kategorie der Garben (und auch Prägarben, es wird also „naiv“ ausgerechnet). Dann ist für $x = 0$ der kanonische Morphismus

$$\left(\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(n) \right)_x \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(n)_x$$

nicht bijektiv, denn die linke Seite ist leer, die rechte besteht aber aus genau einem Element.

Analog konstruiert man ein Beispiel abelscher Garben: Sei nun $\mathcal{F}(n)$ die Garbe der Schnitte des étalen Raums $(U_n \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})) \sqcup (X \times \{0\}) \rightarrow X$, wobei die Abbildung jeweils die Projektion auf die erste Komponente ist. Dann ist

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} = \left(\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(n) \right)_x \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(n)_x = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$$

ebenfalls nicht bijektiv.

Satz 2.7.7. Garbifizierung $\mathfrak{h}: \text{PSh}(X; \text{Set}) \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Set})$ erhält alle Kolimiten (als Linksadjungierter) und alle endlichen Limiten.

Analoges gilt für die Garbifizierung $\mathfrak{h}: \text{PSh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Ab})$ aus Aufgabe 2.6.6.

Beweis. Die erste Aussage ist wie angedeutet klar wegen der Adjunktion (\mathfrak{h}, ι) (siehe Satz 1.2.49).

Sei $\mathcal{L} = \lim_{i \in \mathcal{I}}^{\text{PSh}} \mathcal{F}(i)$ ein endlicher Limes von Prägarben. Zu zeigen ist, dass $\mathfrak{h}\mathcal{L}$ ein Limes des Diagramms $i \mapsto \mathfrak{h}\mathcal{F}(i)$ ist (dass ist äquivalent dazu, dass der kanonische Morphismus $\mathfrak{h}\mathcal{L} = \mathfrak{h} \lim^{\text{PSh}} \mathcal{F}(i) \rightarrow \lim^{\text{Sh}} \mathfrak{h}(\mathcal{F}(i))$ ein Isomorphismus ist). Betrachte das folgende linke kommutative Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathfrak{h}\mathcal{L} \\ \downarrow \text{pr}_j & & \downarrow \mathfrak{h}\text{pr}_j \\ \mathcal{F}(j) & \longrightarrow & \mathfrak{h}\mathcal{F}(j) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{L}_x & \xrightarrow{\sim} & (\mathfrak{h}\mathcal{L})_x \\ \downarrow (\text{pr}_j)_x & & \downarrow (\mathfrak{h}\text{pr}_j)_x \\ \mathcal{F}(j)_x & \xrightarrow{\sim} & (\mathfrak{h}\mathcal{F}(j))_x \end{array}$$

Seine Horizontalen sind die kanonischen Morphismen in die jeweilige Garbifizierung und $j \in \mathcal{I}$ ist beliebig. Das rechte Diagramm entsteht aus dem linken durch Halm-Nehmen an einem beliebigen Punkt $x \in X$ und hat als Horizontalen Isomorphismen, da Garbifizierung den Halm nicht ändert (siehe 2.6.3). Proposition 2.7.5.(c) zeigt $\mathcal{L}_x = \lim \mathcal{F}(i)_x$. Wegen der Isomorphismen im rechten Diagramm folgt $(\mathfrak{h}\mathcal{L})_x = \lim(\mathfrak{h}\mathcal{F}(i))_x$. Teilaussage (b) der zitierten Proposition zeigt dann $\mathfrak{h}\mathcal{L} = \lim \mathfrak{h}\mathcal{F}(i)$ wie gewünscht. \square

Ende der 12. Vorlesung am 01.06.2021 (davor Leseweche nach Pfingsten).

Hausaufgaben: Zwei der drei folgenden Aufgaben (Donnerstag ist Feiertag), aber natürlich auch gerne alle.

- (1) Aufgabe 2.6.6: Garbifizierung abelscher Prägarben
- (2) Aufgabe 1.2.26: Limiten vertauschen mit Limiten
- (3) Aufgabe 1.2.75: Filtrierende Kolimiten vertauschen mit endlichen Limiten in Set

2.8. Direktes und inverses Bild von Garben.

Definition 2.8.1. Sei $f: Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung.

- (a) Ist $\mathcal{G} \in \text{PSh}(Y; \text{Set})$ eine Prägarbe von Mengen auf Y , so ist ihr **direktes Bild (von Prägarben von Mengen)** diejenige Prägarbe $f_*^{\text{PSh}} \mathcal{G} \in \text{PSh}(X; \text{Set})$ mit

$$(f_*^{\text{PSh}} \mathcal{G})(U) := \mathcal{G}(f^{-1}(U)) \quad \text{für alle } U \in \mathcal{O}_X$$

und offensichtlichen Restriktionsabbildungen. Dies definiert in offensichtlicher Weise einen Funktor **direktes Bild** (oder **Vorschub**, englisch *direct image* oder *push forward*)

$$f_*^{\text{PSh}}: \text{PSh}(Y; \text{Set}) \rightarrow \text{PSh}(X; \text{Set}).$$

Ist \mathcal{G} eine Garbe, so ist $f_*^{\text{PSh}} \mathcal{G}$ offensichtlich ebenfalls eine Garbe. Somit restringiert f_*^{PSh} zu einem Funktor **direktes Bild (von Garben von Mengen)**

$$f_* = f_*^{\text{Sh}}: \text{Sh}(Y; \text{Set}) \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Set}).$$

- (b) Sei $\mathcal{F} \in \text{PSh}(X; \text{Set})$ eine Prägarbe von Mengen auf X . Für $V \in \mathcal{O}_Y$ betrachte den filtrierenden Kolimes

$$(f_{\text{PSh}}^* \mathcal{F})(V) := \text{colim}_{U: f(V) \subset U \in \mathcal{O}_X} \mathcal{F}(U)$$

wobei die nur angedeutete (offensichtlich filtrierende) Indexkategorie die opponierte Kategorie derjenigen Kategorie ist, die der durch Inklusion partiell geordneten Menge $\{U \in \mathcal{O}_X \mid f(V) \subset U\}$ zugeordnet ist. Für $W \in \mathcal{O}_Y$ gibt es kanonische Morphismen $(f_{\text{PSh}}^* \mathcal{F})(V) \rightarrow (f_{\text{PSh}}^* \mathcal{F})(W)$ (siehe 1.2.45). Insgesamt definiert dies eine Prägarbe $f_{\text{PSh}}^* \mathcal{F} \in \text{PSh}(Y; \text{Set})$. In offensichtlicher Weise erweitert diese Definition zu Morphismen und liefert den Funktor **inverses Bild von Prägarben** (englisch *inverse image* oder *pullback*)

$$f_{\text{PSh}}^*: \text{PSh}(X; \text{Set}) \rightarrow \text{PSh}(Y; \text{Set}).$$

Warnung: Ist \mathcal{F} eine Garbe, so ist $f_{\text{PSh}}^* \mathcal{F}$ im Allgemeinen keine Garbe! Das einfachste Gegenbeispiel konstruiert man wohl mit $f = \text{id}: \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}$ und der diskreten Topologie im Startbereich und der Klumpentopologie im Zielbereich.

Die Verknüpfung dieses Funktors mit Garbifizierung

$$f^* := \natural \circ f_{\text{PSh}}^* : \text{PSh}(X; \text{Set}) \rightarrow \text{Sh}(Y; \text{Set})$$

wie auch dessen (mit demselben Symbol bezeichnete) Einschränkung

$$f^* := f_{\text{Sh}}^* := f^* \circ \iota = \natural \circ f_{\text{PSh}}^* \circ \iota : \text{Sh}(X; \text{Set}) \rightarrow \text{Sh}(Y; \text{Set})$$

auf die Kategorie der Garben nennen wir **inverses Bild**; letzteren Funktor könnte man genauer **inverses Bild von Garben** nennen.

Beispiel 2.8.2 (Direktes Bild von Garben verallgemeinert globale Schnitte). Sei Y ein topologischer Raum. Für die eindeutige stetige Abbildung $c: Y \rightarrow \{*\}$ in das terminale Objekt von Top gilt unter der angegebenen Äquivalenz $\text{Sh}(\{*\}; \text{Set}) \xrightarrow{\sim} \text{Set}$ von Kategorien

$$c_* \mathcal{G} \xrightarrow{(2.2.2)} c_* \mathcal{G}(\{*\}) = \mathcal{G}(c^{-1}(\{*\})) = \mathcal{G}(Y) = \Gamma(Y; \mathcal{G}) = \Gamma(\mathcal{G})$$

natürlich in Garben $\mathcal{G} \in \text{Sh}(Y; \text{Set})$ oder schlampiger aber leichter merkbar

$$c_* \mathcal{G} = \Gamma(\mathcal{G}).$$

In Worten ist das direkte Bild entlang c der Funktor der globalen Schnitte.

Beispiel 2.8.3 (Inverses Bild von Garben verallgemeinert Halm). Seien X ein topologischer Raum und $i: \{*\} \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Sei $x := i(*)$ (d. h. i ist im Wesentlichen die Inklusion $\{x\} \hookrightarrow X$). Dann gilt unter der Äquivalenz $\text{Sh}(\{*\}; \text{Set}) \xrightarrow[\approx]{(2.2.2)} \text{Set}$ von Kategorien

$$i^* \mathcal{F} \xrightarrow{(2.2.2)} i^* \mathcal{F}(\{*\}) = \natural_{\text{PSh}}^* \mathcal{F}(\{*\}) \xrightarrow{(2.6.2)} i_{\text{PSh}}^* \mathcal{F}(\{*\}) = \mathcal{F}_x$$

oder schlampiger aber leichter merkbar

$$i^* \mathcal{F} = \mathcal{F}_x$$

natürlich in Garben $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X; \text{Set})$.

Beispiel 2.8.4 (Wolkenkratzer 1.6.11 als direktes Bild). Seien X ein topologischer Raum und $i: \{*\} \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Sei $x := i(*)$. Ist E eine Menge, die wir per $E(\{*\}) = E$ und $E(\emptyset) = \{*\}$ als Garbe auf $\{*\}$ auffassen, so gilt

$$i_* E = E_{(x)}$$

natürlich in E .

Satz 2.8.5. Sei $f: Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Dann ist (f^*, f_*) ein adjungiertes Paar von Funktoren⁸⁶

$$(2.8.1) \quad \text{Sh}(Y; \text{Set}) \begin{array}{c} \xleftarrow{f^*} \\ \xrightarrow{f_*} \end{array} \text{Sh}(X; \text{Set})$$

(das genaue Adjunktionsdatum wird im Beweis beschrieben).

Sollte Eins und Koeins explizit beschreiben bzw. angeben. Das ist später nützlich, etwa für Proposition 2.14.4, Proposition 2.14.5 oder wenn man Aufgabe 4.2.10 mit Hilfe der kurzen exakten Sequenz aus der vorherigen Proposition lösen will...

Beweis. Wir zeigen zunächst eine Adjunktion auf Prägarbenniveau und folgern dann die behauptete Adjunktion auf Garbenniveau.

Adjunktion $(f_{\text{PSh}}^*, f_*^{\text{PSh}})$ auf Prägarbenniveau: Seien $\mathcal{G} \in \text{PSh}(Y, \text{Set})$ und $\mathcal{F} \in \text{PSh}(X, \text{Set})$ beliebig. Dann konstruieren wir Bijektionen

$$\text{PSh}_Y(f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{F}), \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} M \xleftarrow{\sim} \text{PSh}_X(\mathcal{F}, f_*^{\text{PSh}}(\mathcal{G})),$$

⁸⁶Meine private Konvention ist, dass ich den Linksadjungierten oben schreibe, den Rechtsadjungierten unten.

wobei die Menge $M = M_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}$ wie folgt definiert ist:

$$M := \left\{ \alpha \in \prod_{\substack{V \in Y \\ U \in X \\ V \subset f^{-1}(U)}} \text{Set}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(V)) \mid \begin{array}{c} \text{Für alle } V, V', U, U' \text{ mit } V' \in V \in Y \text{ und } U' \in U \in X \text{ und } V \subset \\ f^{-1}(U) \text{ und } V' \subset f^{-1}(U') \text{ ist das Diagramm } \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\alpha_{U,V}} & \mathcal{G}(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(U') & \xrightarrow{\alpha_{U',V'}} & \mathcal{G}(V') \end{array} \\ \text{kommutativ.} \end{array} \right\}$$

- Sei $\varphi \in \text{PSh}_Y(f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{F}), \mathcal{G})$. Gegeben $V \in Y$ und $U \in X$ mit $V \subset f^{-1}(U)$ (oder äquivalent $f(V) \subset U$) sei $\alpha_{V,U}$ die Verknüpfung

$$\alpha_{V,U}: \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\text{in}_U} \text{colim}_{\tilde{U}: f(V) \subset \tilde{U} \in X} \mathcal{F}(\tilde{U}) = f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{F})(V) \xrightarrow{\varphi(V)} \mathcal{G}(V).$$

Dann gilt $\alpha := (\alpha_{V,U})_{V,U} \in M$ und die Zuordnung $\varphi \mapsto \alpha$ definiert eine Bijektion, wie man unschwer nachrechnet.

- Sei $\psi \in \text{PSh}_X(\mathcal{F}, f_*^{\text{PSh}}(\mathcal{G}))$. Gegeben $V \in Y$ und $U \in X$ mit $V \subset f^{-1}(U)$ sei $\alpha_{V,U}$ die Verknüpfung

$$\alpha_{V,U}: \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\psi(U)} f_*^{\text{PSh}}(\mathcal{G})(U) = \mathcal{G}(f^{-1}(U)) \rightarrow \mathcal{G}(V).$$

Dann gilt $\alpha := (\alpha_{V,U})_{V,U} \in M$ und die Zuordnung $\psi \mapsto \alpha$ definiert eine Bijektion, wie man unschwer nachrechnet.

Die so konstruierte Bijektion $\text{PSh}_Y(f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{F}), \mathcal{G}) \cong \text{PSh}_X(\mathcal{F}, f_*^{\text{PSh}}(\mathcal{G}))$ ist natürlich in \mathcal{F} und \mathcal{G} und macht $(f_{\text{PSh}}^*, f_*^{\text{PSh}})$ zu einem adjungierten Paar von Funktoren.

Adjunktion (f^*, f_*) auf Garbenniveau: Die Bijektionen

$$\begin{aligned} (2.8.2) \quad \text{Sh}_Y(f^* \mathcal{F}, \mathcal{G}) &= \text{Sh}_Y(\natural f_{\text{PSh}}^* \iota \mathcal{F}, \mathcal{G}) \\ (\text{Adjunktion } (\natural, \iota)) &\cong \text{PSh}_Y(f_{\text{PSh}}^* \iota \mathcal{F}, \iota(\mathcal{G})) \\ (\text{Adjunktion } (f_{\text{PSh}}^*, f_*^{\text{PSh}})) &\cong \text{PSh}_X(\iota \mathcal{F}, f_*^{\text{PSh}} \iota \mathcal{G}) \\ &= \text{PSh}_X(\iota \mathcal{F}, \iota f_*^{\text{Sh}} \mathcal{G}) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Sh}_X(\mathcal{F}, f_* \mathcal{G}) \end{aligned}$$

sind natürlich in Garben $\mathcal{G} \in \text{Sh}(Y, \text{Set})$ und $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X, \text{Set})$ und liefern die behauptete Adjunktion. \square

2.8.6. Als Linksadjungierter erhält f^* alle Kolimiten (Satz 1.2.49).

Beispielsweise zeigt dies nach Beispiel 2.8.3, dass der Halm-Funktor $(-)_x: \text{Sh}(X; \text{Set}) \rightarrow \text{Set}$ alle Kolimiten erhält; wir haben dies und mehr bereits in Proposition 2.7.5.(a) erklärt.

2.8.7. Sind $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ stetige Abbildungen, so gelten offensichtlich $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ als Funktoren $\text{Sh}(Z; \text{Set}) \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Set})$ und $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\text{Sh}(X; \text{Set})}$.⁸⁷

Korollar 2.8.8. Seien $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ stetige Abbildungen. Dann gilt

$$g^* f^* \mathcal{F} \cong (f \circ g)^* \mathcal{F}$$

natürlich in Garben $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X; \text{Set})$, wobei die Isomorphismen im Beweis erklärt sind.

Beweis. Knapp: Aus Satz 2.8.5, folgt, dass der Funktor $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ sowohl $(f \circ g)^*$ als auch $g^* \circ f^*$ ⁸⁸ als Linksadjungierte hat. Somit müssen diese beiden Linksadjungierten isomorph sein (siehe Aufgabe 1.1.39).

⁸⁷Analoges gilt auf Prägarbenniveau.

⁸⁸Die beiden Adjunktionen $(f_{\text{Sh}}^*, f_{\text{Sh}}^{\text{Sh}})$ und $(g_{\text{Sh}}^*, g_{\text{Sh}}^{\text{Sh}})$ liefern dies per „Verknüpfung von Adjunktionen“.

Ausführlich: Für alle $\mathcal{G} \in \text{Sh}(Z; \text{Set})$ und $\mathcal{E} \in \text{Sh}(X; \text{Set})$ sind die offensichtlichen Bijektionen

$$\begin{aligned} \text{Sh}_Z((f \circ g)^* \mathcal{E}, \mathcal{G}) &\cong \text{Sh}_X(\mathcal{E}, (f \circ g)_* \mathcal{G}) \\ &= \text{Sh}_X(\mathcal{E}, f_* g_* \mathcal{G}) \\ &\cong \text{Sh}_Y(f^* \mathcal{E}, g_* \mathcal{G}) \\ &\cong \text{Sh}_Y(g^* f^* \mathcal{E}, \mathcal{G}) \end{aligned}$$

natürlich in \mathcal{G} und \mathcal{E} . Natürlichkeit in \mathcal{G} ist nichts anderes als ein Isomorphismus

$$\text{Sh}_Z((f \circ g)^* \mathcal{E}, -) \cong \text{Sh}_Y(g^* f^* \mathcal{E}, -)$$

in $\text{Set}^{\text{Sh}(Z; \text{Set})}$. Volltreueheit des Yoneda-Funktors ([Sch21, Korollar A.0.14]) zeigt, dass dieser Isomorphismus von genau einem Isomorphismus $(f \circ g)^* \mathcal{E} \cong g^* f^* \mathcal{E}$ herkommt. Dass dieser natürlich in \mathcal{E} ist, folgt aus der Natürlichkeit in \mathcal{E} in den obigen Bijektionen. \square

Korollar 2.8.9 (Halm des inversen Bilds). *Mittlerweile bevorzuge ich die konkrete Konstruktion in (2.8.10), die nicht nur explizit ist, sondern auch allgemeiner für Prägarben gilt, was ich im Beweis von Proposition 2.16.6 verwende!*

Sei $f: Y \rightarrow X$ stetig. Dann gilt

$$(2.8.3) \quad (f^* \mathcal{F})_y \cong \mathcal{F}_{f(y)}$$

natürlich in Garben $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X; \text{Set})$ für alle $y \in Y$.

Insbesondere erhält $f^*: \text{Sh}(X; \text{Set}) \rightarrow \text{Sh}(Y; \text{Set})$ alle endlichen Limiten (als Linksadjungierter erhält f^* offensichtlich alle Kolimiten).

Beweis. Sei $i: \{*\} \hookrightarrow Y$ die eindeutige Abbildung mit $i(*) = y$. Dann gilt

$$(f^* \mathcal{F})_y = i^* f^* \mathcal{F} \cong (f \circ i)^* \mathcal{F} = \mathcal{F}_{f(y)}$$

nach Beispiel 2.8.3 und Korollar 2.8.8.

Um zu zeigen, dass f^* endliche Limiten erhält, genügt es nach Proposition 2.7.5.(b) zu zeigen, dass für jedes $y \in Y$ die Verknüpfung $(-)_y \circ f^*$ endliche Limiten erhält. Diese Verknüpfung ist aber nach dem soeben Bewiesenen zum Halm-Funktor $(-)_y \circ f^*$ isomorph, welcher nach der zitierten Proposition endliche Limiten erhält. \square

2.8.10 (Bijektion (2.8.3) explizit bzw. von Hand). Seien $f: Y \rightarrow X$ stetig und $\mathcal{F} \in \text{PSh}(X; \text{Set})$ eine Prägarbe. Dann gibt es in \mathcal{F} natürliche Bijektionen und Gleichheiten

$$\begin{aligned} (f^* \mathcal{F})_y &\xleftarrow{\sim} (f_{\text{PSh}}^* \mathcal{F})_y \\ &= \text{colim}_{V: y \in V \subseteq Y} (f_{\text{PSh}}^* \mathcal{F})(V) \\ &= \text{colim}_{V: y \in V \subseteq Y} \left(\text{colim}_{U: f(V) \subset U \subseteq X} \mathcal{F}(U) \right) \\ (2.8.4) \quad &\xrightarrow{\sim} \text{colim}_{U: f(y) \in U \subseteq X} \mathcal{F}(U) \\ &= \mathcal{F}_{f(y)}. \end{aligned}$$

Die erste Bijektion gilt, da sich der Halm beim Garbifizieren nicht ändert (siehe 2.6.3). Die andere Bijektion ist relativ offensichtlich, verwende Satz 1.2.54 oder zeige, dass beide Seiten dieselbe universelle Eigenschaft haben. Natürlichkeit in \mathcal{F} ist klar.

Die so erhaltene Identifikation zwischen den Halmen

$$(2.8.5) \quad (f^* \mathcal{F})_y \cong \mathcal{F}_{f(y)}$$

ist hoffentlich⁸⁹ die Bijektion (2.8.3).

⁸⁹Ich gebe zu, dass ich das nicht gecheckt habe, bisher aber auch nicht im Skript verwende. Plausibel ist es natürlich: Welche Abbildung sollte es denn sonst sein?

2.8.11. Der Halm des direkten Bildes hat im Allgemeinen keine so offensichtliche Beschreibung. Für $f: Y \rightarrow X$ stetig und $\mathcal{G} \in \text{Sh}(Y; \text{Set})$ und $x \in X$ gilt per Definition

$$(f_*\mathcal{G})_x = \text{colim}_{\substack{V \subseteq X \\ x \in V}} \mathcal{G}(f^{-1}V).$$

Elemente des Halmes werden also repräsentiert durch Schnitte von \mathcal{G} auf offenen Umgebungen der Faser $f^{-1}(x)$, die von offenen Umgebungen U von x herkommen.

Beispielsweise gilt $(f_*\mathcal{G})_x = \{*\}$ für alle $x \in X \setminus \overline{f(Y)}$; ist \mathcal{G} eine Garbe abelscher Gruppen, so schreibt man natürlich $\{0\}$ statt $\{*\}$.

Beispiel 2.8.12. Ist $j: U := \mathbb{R} \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}$ die Inklusion und $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_U$ die Garbe der lokalkonstanten ganzzahligen Funktionen auf U , so gilt

$$(j_*\mathcal{G})_x \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } x \in U; \\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Der Leser versuche, sich den zugehörigen étalen Raum vorzustellen.

Ist allgemeiner $j: U \rightarrow X$ die Inklusion einer beliebigen offenen Teilmenge eines topologischen Raums, so gilt $(j_*\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_x$ für alle $x \in U$ (denn die offenen Umgebungen von x in U sind kofinal in den offenen Umgebungen von x in X), aber die Halme an allen Punkten $x \in \overline{U} \setminus U$ können „schlimmer“ aussehen.

Beispiel 2.8.13. Ist $i: A \hookrightarrow X$ die Inklusion einer abgeschlossenen Teilmenge und \mathcal{G} eine Garbe auf A , so gilt

$$(i_*\mathcal{G})_x \xrightarrow{\sim} \begin{cases} \mathcal{G}_x & \text{falls } x \in A; \\ \{*\} & \text{sonst (was man als } \{0\} \text{ schreibt, falls } \mathcal{G} \text{ eine abelsche Garbe ist).} \end{cases}$$

Hier ist der zweite Fall $x \notin A$ klar (nach 2.8.11). Im Fall $x \in A$ gilt

$$(i_*\mathcal{G})_x = \text{colim}_{\substack{V \subseteq X \\ x \in V}} \mathcal{G}(V \cap A) \xrightarrow{\sim} \text{colim}_{\substack{W \subseteq A \\ x \in W}} \mathcal{G}(W) = \mathcal{G}_x,$$

denn wenn V alle offenen Umgebungen von x in X durchläuft, durchläuft $W := V \cap A$ alle offenen Umgebungen von x in A (formal kommt der Morphismus zwischen den (filtrierenden) Kolimiten von 1.2.45; er ist offensichtlich ein Isomorphismus).

2.8.14. Alles in Abschnitt 2.8 bis hier gilt genauso für Garben und Prägarben abelscher Gruppen, man kann also überall Set durch Ab ersetzen. Alle verwendeten Kolimiten sind filtrierend, weswegen die Konstruktionen für Mengen- und Abelsche-Gruppen-(Prä)-Garben „dieselben“ sind (nach Slogan 1.2.55): Dies meint etwa salopp $f_{\text{Ab}}^* = f_{\text{Set}}^*$ oder genauer, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Sh}(Y; \text{Ab}) & \xleftarrow{f^* = f_{\text{Ab}}^*} & \text{Sh}(X; \text{Ab}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sh}(Y; \text{Set}) & \xleftarrow{f^* = f_{\text{Set}}^*} & \text{Sh}(X; \text{Set}) \end{array}$$

mit vertikalen Verisssfunctoren kommutativ ist. Analoges gilt für Grp oder $\text{Mod}(R)$ oder Ring statt Set , ist aber nicht so wichtig für uns.

Satz 2.8.15 (Inverses Bild von Garben von Mengen via étaler Räume). *Seien $f: Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X; \text{Set})$ eine Garbe auf X . Betrachte das kartesische Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X \text{ét } \mathcal{F} & \longrightarrow & \text{ét } \mathcal{F} \\ \downarrow \text{pr}_Y & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X, \end{array}$$

Nach der universellen Eigenschaft der Garbifizierung 2.6.2 kommt φ von genau einem Morphismus $\widehat{\varphi}$ von Garben, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} f_{\text{PSh}}^* \mathcal{F} & \xrightarrow{\eta_{f^* \mathcal{F}}} & f^* \mathcal{F} \\ & \searrow \varphi & \downarrow \exists! \widehat{\varphi} \\ & & \mathcal{S}_{Y \times_X \text{ét} \mathcal{F}}. \end{array}$$

kommutativ macht.⁹¹ Der Morphismus (2.8.6) ist per Definition $\widehat{\varphi}$ – zu zeigen ist nun noch, dass $\widehat{\varphi}$ ein Isomorphismus ist. Dies können wir nach Satz 2.3.1.(b) halmweise testen. Zu zeigen ist also, dass

$$\widehat{\varphi}_y: (f^* \mathcal{F})_y \rightarrow (\mathcal{S}_{Y \times_X \text{ét} \mathcal{F}})_y$$

für jedes $y \in Y$ ein Isomorphismus ist.

Beide Halme sind zu $\mathcal{F}_{f(y)}$ isomorph: Der linke nach (2.8.5). Da $Y \times_X \text{ét} \mathcal{F}$ étale über Y ist, gilt nach Lemma 2.4.14 für den rechten Halm

$$(2.8.9) \quad (\mathcal{S}_{Y \times_X \text{ét} \mathcal{F}})_y \xrightarrow[\sim]{\text{ev}_y} \{y\} \times_X \text{ét} \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{f(y)}.$$

Erinnert man sich an die Herleitung von (2.8.5) und verwendet die obige Konstruktion von φ , so sieht man rasch, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (f^* \mathcal{F})_y & \xrightarrow{\widehat{\varphi}_y} & (\mathcal{S}_{Y \times_X \text{ét} \mathcal{F}})_y \\ & \searrow \sim & \downarrow \sim \text{ (2.8.9)} \\ & \text{(2.8.5)} & \mathcal{F}_{f(y)} \end{array}$$

kommutativ ist. Folglich ist $\widehat{\varphi}_y$ ein Isomorphismus. \square

2.8.17 (Inverses Bild von Garben verallgemeinert Einschränkung). Ist $a: A \subset X$ die Inklusion einer beliebigen Teilmenge eines topologischen Raums und ist \mathcal{F} eine Garbe auf X , so ist $a^* \mathcal{F}$ die in 2.4.20 definierte Einschränkung $\mathcal{F}|_A$ bis auf den Isomorphismus $a^* \mathcal{F} \xrightarrow[\sim]{(2.8.6)} \mathcal{S}_{A \times_X \text{ét} \mathcal{F}} = \mathcal{S}_{(\text{ét} \mathcal{F})|_A} = \mathcal{F}|_A$, denn $A \times_X \text{ét} \mathcal{F} = (\text{ét} \mathcal{F})|_A$.

Beispiel 2.8.18 (Adjunktion konstante Garbe-globale Schnitte). Seien X ein topologischer Raum und $c: X \rightarrow \{*\}$ die konstante Abbildung. Sei T eine Menge, die wir als Garbe auf $\{*\}$ auffassen; ihr étaler Raum ist $T = \text{ét}(T) \rightarrow \{*\}$, wobei T die diskrete Topologie trägt. Dann gilt

$$c^* T \xrightarrow[\sim]{(2.8.6)} \mathcal{S}_{X \times_{\{*\}} T} = \mathcal{S}_{X \times T} \cong T_X$$

nach Satz 2.8.15 natürlich in Mengen T (siehe Beispiel 1.6.7.(b) für die Definition von T_X).

Nach Satz 2.8.5 haben wir eine Adjunktion (c^*, c_*) . Wir haben gerade gesehen, dass der Funktor c^* isomorph zu $T \mapsto T_X$ ist. Nach Beispiel 2.8.2 ist c_* zu Γ isomorph. Somit erhalten wir eine Adjunktion $((-)_X, \Gamma)$ oder bildlich

$$\begin{array}{ccc} & (-)_X & \\ \text{Sh}(X; \text{Set}) & \xleftarrow{\quad} & \text{Set} \\ & \Gamma = \Gamma(X; -) & \end{array}$$

Definition 2.8.19. Sei X ein topologischer Raum. Eine Garbe $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X; \text{Set})$ heißt **konstant**, wenn sie zu einer Garbe der Gestalt T_X für einen geeigneten diskreten topologischen Raum T (alias eine Menge T) isomorph ist. Man nennt \mathcal{F} **lokal**⁹² **konstant**, falls jeder Punkt von X eine offene Umgebung $U \ni x$ hat, so dass die Restriktion $\mathcal{F}|_U$ konstant ist.

⁹¹Äquivalent und einfacher kann man auch $\widehat{\varphi}$ mit Hilfe der Adjunktion (f^*, f_*) durch den naheliegenden Morphismus $\mathcal{F} \rightarrow f_* \mathcal{S}_{Y \times_X \text{ét} \mathcal{F}}$ definieren. Die gegebene Konstruktion scheint mir aber für den Rest des Beweises brauchbarer.

⁹²Der Begriff *lokal* wird hier ähnlich wie in [Sch20, Definition 5.2.2] erklärt verwendet.

Eine Garbe $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ abelscher Gruppen heißt analog **konstant**, wenn sie zu einer Garbe der Garbe der Gestalt T_X für eine abelsche Gruppe T isomorph ist.⁹³ **Lokal konstant** ist dann analog wie oben definiert.⁹⁴

2.8.20. Der Funktor $\text{Set} \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Set}), T \mapsto T_X$, ist für $X \neq \emptyset$ stets treu, denn die Verknüpfung $\text{Set}(S, T) \rightarrow \text{Sh}(S_X, T_X) \xrightarrow{(-)_x} \text{Set}((S_X)_x, (T_X)_x)$ ist modulo der offensichtlichen Bijektionen $T \xrightarrow{\sim} (T_X)_x$ und $S \xrightarrow{\sim} (S_X)_x$ die Identität.

Ist X zusammenhängend, so ist er volltreu, denn dann kommt jeder Morphismus $T_X \rightarrow S_X$ von Garben alias jeder Morphismus $T \times X \rightarrow S \times X$ étaler Räume über X von genau einer Abbildung $T \rightarrow S$. Für zusammenhängendes X ist also Set äquivalent zur vollen Unterkategorie der konstanten Garben.

2.8.21. Die volle Unterkategorie der lokal konstanten Garben von Mengen auf X entspricht unter der Äquivalenz $\text{Sh}(X; \text{Set}) \xrightarrow{\sim} \text{étTop}/_X$ der vollen Unterkategorie der Überlagerungen von X .

Aufgabe 2.8.22. Sei \mathcal{F} eine Garbe von Mengen auf einem topologischen Raum X . Gibt es eine Teilmenge $T \subset \mathcal{F}(X)$, so dass für alle $x \in X$ die Verknüpfung $T \subset \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}_x$ ein Isomorphismus ist, so ist \mathcal{F} eine konstante Garbe.

Bemerkung: Nettes „Gegenbeispiel“-Bild auf (circa) Seite 32 in [Soe21]).

2.9. Mono- und Epimorphismen.

Definition 2.9.1. Sei $f: A \rightarrow B$ ein Morphismus in einer Kategorie \mathcal{C} .

Wir nennen f einen **Monomorphismus**, wenn für (alle Objekte T und) alle Morphismen $s, t: T \rightarrow A$ in \mathcal{C} aus $f \circ s = f \circ t$ bereits $s = t$ folgt. Äquivalent: Für alle Objekte $T \in \mathcal{C}$ ist

$$f_* = f \circ ? : \mathcal{C}(T, A) \rightarrow \mathcal{C}(T, B)$$

injektiv. Dass f ein Monomorphismus ist, wird oft mit der Schreibweise $f: A \hookrightarrow B$ angedeutet.

Wir nennen f einen **Epimorphismus**, wenn für (alle Objekte T und) alle Morphismen $s, t: B \rightarrow T$ in \mathcal{C} aus $s \circ f = t \circ f$ bereits $s = t$ folgt. Äquivalent: Für alle Objekte $T \in \mathcal{C}$ ist

$$f^* = ? \circ f : \mathcal{C}(B, T) \rightarrow \mathcal{C}(A, T)$$

injektiv. Dass f ein Epimorphismus ist, wird oft mit der Schreibweise $f: A \twoheadrightarrow B$ angedeutet.

2.9.2. Ein Morphismus $f: A \rightarrow B$ in \mathcal{C} ist genau dann ein Monomorphismus, wenn $f^{\text{op}}: B^{\text{op}} \rightarrow A^{\text{op}}$ in \mathcal{C}^{op} ein Epimorphismus ist.

2.9.3. Jeder Isomorphismus ist ein Mono- und Epimorphismus.

Beispiel 2.9.4. Ein Morphismus in Set ist genau dann ein Monomorphismus bzw. Epimorphismus, wenn er injektiv bzw. surjektiv ist. Dieselbe Aussage stimmt in Ab und in $\text{Mod}(R)$.

In diesen Kategorien ist ein Morphismus genau dann ein Isomorphismus, wenn er sowohl ein Epi- als auch ein Monomorphismus ist.⁹⁵

Beispiel 2.9.5. Ein Morphismus $f: X \rightarrow Y$ in Top ist genau dann ein Monomorphismus bzw. Epimorphismus, wenn f injektiv bzw. surjektiv ist.

Die Identität $\mathbb{R}^{\text{disc}} \rightarrow \mathbb{R}$ von den reellen Zahlen mit der diskreten Topologie in sich selbst mit der normalen Topologie ist ein Mono- und Epimorphismus in Top , aber kein Isomorphismus.

Bemerkung: Die volle Unterkategorie $\text{Top}^{\text{qc, Hd}} \subset \text{Top}$ der quasi-kompakten Hausdorffräume ist nach [Sch20, Satz 2.7.15] balanciert im Sinne der Fußnote 95.

Aufgabe 2.9.6. Ein Morphismus in Grp bzw. in Ring ist genau dann ein Monomorphismus, wenn er injektiv ist.

Bemerkungen:

⁹³Achtung, diese Bedingung ist stärker als die Forderung, dass \mathcal{F} als Garbe von Mengen konstant ist: Nimm etwa $X = \{a, b\}$ mit der diskreten Topologie und \mathcal{F}_a und \mathcal{F}_b isomorph als Mengen, aber nicht isomorph als abelsche Gruppen.

⁹⁴Ist dies dazu äquivalent, dass die unterliegende Garbe von Mengen lokal konstant ist? Mal überlegen..., eventuell Bedingungen an X stellen.

⁹⁵Kategorien, in denen ein Morphismus genau dann ein Isomorphismus ist, wenn er sowohl ein Epi- als auch ein Monomorphismus ist, werden **balanciert** genannt.

- Man kann zeigen, dass ein Morphismus in Grp genau dann ein Epimorphismus ist, wenn er surjektiv ist (die Implikation \Leftarrow ist trivial; die andere findet man leicht im Internet; sie ist eine Übungsaufgabe mit Hinweis in [ML98, I.5]).
- Jeder surjektive Morphismus in Ring ist offensichtlich ein Epimorphismus. Jede Lokalisierung $R \rightarrow S^{-1}R$ eines kommutativen Rings (etwa $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$) ist ein Epimorphismen in der Kategorie aller Ringe (aber Lokalisierungen sind selten surjektiv; oft sind sie injektiv). Es gibt aber auch injektive Epimorphismen kommutativer Ringe, die keine Lokalisierungen sind.

Lemma 2.9.7. Sei $f: A \rightarrow B$ ein Morphismus in einer Kategorie \mathcal{C} .

(a) Genau dann ist f ein Monomorphismus, wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\text{id}_A} & A \\ \text{id}_A \downarrow & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

kartesisch ist.

Insbesondere erhält jeder Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, der Pullback-Diagramme oder etwas allgemeiner endliche Limiten erhält (etwa jeder Rechtsadjungierte), Monomorphismen.

(b) Genau dann ist f ein Epimorphismus, wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ f \downarrow & & \downarrow \text{id}_B \\ B & \xrightarrow{\text{id}_B} & B \end{array}$$

kokartesisch ist.

Insbesondere erhält jeder Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, der Pushout-Diagramme oder etwas allgemeiner endliche Kolimiten erhält (etwa jeder Linksadjungierte), Epimorphismen.

Beweis. Das ist jeweils nur eine Umformulierung der Definition. □

Aufgabe 2.9.8. Seien $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ Morphismen in einer Kategorie. Sind f und g Monomorphismen, so auch $g \circ f$. Ist $g \circ f$ ein Monomorphismus, so auch f . Formuliere die dualen Aussagen für Epimorphismen.

Aufgabe 2.9.9. Ist

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

ein kartesisches Diagramm in einer Kategorie, so ist mit g auch f ein Monomorphismus.

Dual: Ist das obige Diagramm kokartesisch, so ist mit f auch g ein Epimorphismus.

Lemma 2.9.10. Sei \mathcal{I} eine Indexkategorie. Sei \mathcal{C} eine Kategorie. Dann ist ein Morphismus $\varphi: F \rightarrow G$ in der Funktorkategorie $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$, also ein Morphismus von \mathcal{I} -förmigen Diagrammen in \mathcal{C} , genau dann ein Monomorphismus bzw. Epimorphismus, wenn

$$(2.9.1) \quad \varphi(i): F(i) \rightarrow G(i)$$

für alle $i \in \mathcal{I}$ ein Monomorphismus bzw. Epimorphismus ist.

Beweis. (In beiden Fällen ist die Implikation \Leftarrow ohnehin offensichtlich, sie wird aber vom Folgenden mitbewiesen.) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- φ ist ein Monomorphismus.

- Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\text{id}_F} & F \\ \text{id}_F \downarrow & & \downarrow \varphi \\ F & \xrightarrow{\varphi} & G \end{array}$$

ist kartesisch (äquivalent zum vorigen Punkt nach Lemma 2.9.7).

- Für alle $i \in \mathcal{I}$ ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(i) & \xrightarrow{\text{id}_{F(i)}} & F(i) \\ \text{id}_{F(i)} \downarrow & & \downarrow \varphi(i) \\ F(i) & \xrightarrow{\varphi(i)} & G(i) \end{array}$$

kartesisch (äquivalent zum vorigen Punkt nach Aufgabe 1.2.68).

- Für alle $i \in \mathcal{I}$ ist $\varphi(i)$ ein Monomorphismus (äquivalent zum vorigen Punkt nach Lemma 2.9.7).

Die offensichtliche Variation dieses Arguments zeigt die Charakterisierung von Epimorphismen. □

Korollar 2.9.11 (Mono- und Epimorphismen von Prägarben). *Sei $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben von Mengen (oder abelschen Gruppen) auf einem topologischen Raum X . Dann ist φ genau dann ein Monomorphismus bzw. Epimorphismus, wenn*

$$(2.9.2) \quad \varphi(U): \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$$

für alle $U \in \mathcal{O} X$ injektiv bzw. surjektiv ist.

Insbesondere gelten:

- Definiere eine Prägarbe $\text{im}(\varphi)$, das **Bild von φ** , durch $\text{im}(\varphi)(U) := \text{im}(\varphi(U)) = \varphi(U)(\mathcal{F}(U))$ mit Restriktionsabbildungen induziert von \mathcal{G} .⁹⁶
Dann faktorisiert φ in offensichtlicher Weise als Komposition $\mathcal{F} \rightarrow \text{im}(\varphi) \hookrightarrow \mathcal{G}$, wobei die erste Abbildung ein Epimorphismus ist und die zweite ein Monomorphismus.
- Äquivalent sind:⁹⁷
 - φ ist ein Isomorphismus;
 - φ ist sowohl ein Mono- als auch ein Epimorphismus;
 - die Abbildung (2.9.2) ist bijektiv für alle $U \in \mathcal{O} X$.

Beweis. Das folgt sofort aus Lemma 2.9.10 und Beispiel 2.9.4. □

Proposition 2.9.12 (Mono- und Epimorphismen von Garben). *Sei $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben von Mengen oder abelschen Gruppen auf einem topologischen Raum X . Dann gelten (die roten Bedingungen sind für meinen Geschmack am wichtigsten):*

- (a) Äquivalent sind:
- (i) φ ist ein Monomorphismus von Garben.
 - (ii) φ ist ein Monomorphismus von Prägarben.
 - (iii) Für alle $U \in \mathcal{O} X$ ist $\varphi(U)$ injektiv.
 - (iv) Für alle $x \in X$ ist φ_x injektiv.
 - (v) Die Abbildung $\text{ét}(\varphi): \text{ét}(\mathcal{F}) \rightarrow \text{ét}(\mathcal{G})$ ist injektiv (und dann als offene stetige Abbildung automatisch eine offene Einbettung).
- (b) Äquivalent sind:
- (i) φ ist ein Epimorphismus von Garben.

⁹⁶Dies ist eine ad hoc Definition. Wer mag, kann im Internet nachlesen, wie man allgemein das Bild eines Morphismus in einer beliebigen Kategorie definieren kann. Später definieren wir insbesondere für abelsche Kategorien, was das Bild eines Morphismus ist. Die Kategorie $\text{PSh}(X; \text{Ab})$ ist abelsch und das hier definierte Bild stimmt mit dem so definierten kategoriellen Bild überein.

⁹⁷Hier ist eh klar, dass erster und dritter Punkt äquivalent sind, und dass der erste Punkt den zweiten impliziert. Die neue Information ist, dass der zweite Punkt die beiden anderen impliziert.

- (ii) Für alle $U \Subset X$ und alle $t \in \mathcal{G}(U)$ und alle $x \in U$ existiert eine offene Umgebung V von x in U und ein $s \in \mathcal{F}(V)$ mit $\varphi_V(s) = t|_V$.
- (iii) Für alle $x \in X$ ist φ_x surjektiv.
- (iv) Die Abbildung $\text{ét}(\varphi): \text{ét}(\mathcal{F}) \rightarrow \text{ét}(\mathcal{G})$ ist surjektiv (und dann als offene stetige Abbildung automatisch eine finale Surjektion, vgl. [Sch20, 2.8.81]).

Beweis. (a)

(i) \Leftarrow (ii): Dies ist offensichtlich.

(i) \Rightarrow (ii): Sei \mathcal{T} eine Prägarbe und seien $\alpha, \beta: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{F}$ zwei Morphismen von Prägarben mit $\varphi \circ \alpha = \varphi \circ \beta$. Die universelle Eigenschaft der Garbifizierung 2.6.2 liefert Morphismen $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{F}$ und für diese gilt $\varphi \circ \tilde{\alpha} = \varphi \circ \tilde{\beta}$ (wegen Eindeutigkeit). Da φ ein Monomorphismus von Garben ist, folgt $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$ und daraus $\alpha = \beta$.

(ii) \Leftrightarrow (iii): Siehe Korollar 2.9.11.

(i) \Leftrightarrow (iv): Wegen Lemma 2.9.7 (und Beispiel 2.9.4) folgt dies aus Proposition 2.7.5.(b) (denn Pullbacks sind ENDLICHE Limiten).⁹⁸

(iv) \Leftrightarrow (v): Trivial, denn $\text{ét}(\varphi) = \bigsqcup_{x \in X} \varphi_x$.

(b)

(i) \Leftrightarrow (iii): Wegen Lemma 2.9.7 (und Beispiel 2.9.4) folgt dies aus Proposition 2.7.5.(b).

(ii) \Leftrightarrow (iii): Offensichtlich nach der Definition des Halms.

(iii) \Leftrightarrow (iv): Klar. □

Aufgabe 2.9.13. Beweise oder widerlege: Ein Morphismus $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ von Prägarben von Mengen auf einem topologischen Raum X ist genau dann ein Monomorphismus bzw. Epimorphismus, wenn für alle $x \in X$ der Morphismus $\varphi_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ injektiv bzw. surjektiv ist.

Aufgabe 2.9.14. Sei $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor alias ein Morphismus in der Kategorie der Kategorien. Genau dann ist F ein Monomorphismus, wenn F treu ist und $F_{\text{Obj}}: \text{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{D})$ injektiv ist.

(Wie man sinnvoll charakterisiert, dass F ein Epimorphismus ist, ist mir nicht klar.)

2.10. Kerne und Kokerne in Kategorien.

2.10.1. Wir wollen zeigen, dass die Kategorie $\text{Sh}(X; \text{Ab})$ abelsch ist, was salopp gesprochen bedeutet, dass sie ähnlich gute Eigenschaften hat wie die Kategorie der abelschen Gruppen (oder der Moduln über einem Ring).⁹⁹ Wir erklären deswegen zunächst grundlegende kategorielle Begriffe, die für die Definition einer abelschen Kategorie benötigt werden.

Definition 2.10.2. Ein Objekt N einer Kategorie \mathcal{A} heißt **Nullobjekt**, wenn es sowohl initial als auch terminal ist: Für alle Objekte $A \in \mathcal{A}$ bestehen $\mathcal{A}(N, A)$ und $\mathcal{A}(A, N)$ aus genau einem Element.

Je zwei Nullobjekte sind eindeutig isomorph, weswegen wir von *dem* Nullobjekt sprechen und es als $0_{\mathcal{A}}$ notieren, wenn es existiert.

2.10.3. Eine Kategorie hat genau dann ein Nullobjekt, wenn es ein initiales und ein terminales Objekt hat und diese isomorph sind.

Definition 2.10.4. Sind $A, B \in \mathcal{A}$ Objekte einer Kategorie mit Nullobjekt $0_{\mathcal{A}}$, so heißt die folgende Verknüpfung eindeutiger Morphismen **Nullmorphismus** und wird als $0 = 0_{DC}$ notiert:

$$0 = 0_{BA}: A \rightarrow 0_{\mathcal{A}} \rightarrow B.$$

2.10.5. Ist $f: A \rightarrow B$ ein Morphismus in einer Kategorie mit Nullobjekt, so gilt $f \circ 0 = 0 = 0 \circ f$.

Genau dann ist ein Objekt N ein Nullobjekt, wenn $\text{id}_N = 0$. Insbesondere gilt $\text{id}_0 = 0$.

Jeder beim Nullobjekt startende oder endende Morphismus ist der Nullmorphismus.

⁹⁸Wer einen konkreteren Beweis bevorzugt:

(iii) \Rightarrow (iv): Seien $e, e' \in \mathcal{F}_x$ mit $\varphi_x(e) = \varphi_x(e')$. Dann existieren $x \in U \Subset X$ und $s, s' \in \mathcal{F}(U)$ mit $e = s_x$ und $e' = s'_x$. Wegen $\varphi_U(s)_x = \varphi_x(e) = \varphi_x(e') = \varphi_U(s')_x$ gibt es eine offene Umgebung V von x in U mit $\varphi_U(s)|_V = \varphi_U(s')|_V$, also $\varphi_V(s|_V) = \varphi_V(s'|_V)$. Weil φ_V injektiv ist, folgt $s|_V = s'|_V$ und somit $e = s_x = s'_x = e'$.

(iv) \Rightarrow (iii): Dies ist im Beweis von Satz 2.3.1.(b) enthalten.

⁹⁹Diese drei Kategorien sind sogar besonders gute abelsche Kategorien, nämlich sogenannte Grothendieck-Kategorien.

- Beispiele 2.10.6.** (a) In Ab oder $\text{Mod}(R)$ ist der Nullmodul (alias jeder einelementige Modul) ein Nullobjekt. Dies rechtfertigt die oft verwendete Schreibweise $0 = \{0\}$.
- (b) In Grp ist jede einelementige Gruppe ein Nullobjekt, etwa die Gruppe $\{1\}$. In diesem Fall ist es auch üblich, das Nullobjekt als 1 zu notieren, d. h. $0_{\text{Grp}} = 1 = \{1\}$.
- (c) Die Kategorie Set hat kein Nullobjekt.
- (d) In der Kategorie $\text{Set}_{\{*\}}$ der punktierten Mengen ist $(\{*\}, *)$ initial und terminal, also ein Nullobjekt, wie auch jede punktierte Menge mit genau einem Element.
- (e) Die Kategorie Top hat kein Nullobjekt.
- (f) In der Kategorie $\text{Top}_{\{*\}}$ der punktierten topologischen Räume ist jeder einpunktige Raum ein Nullobjekt.
- (g) In $\text{PSh}(X; \text{Set})$ gibt es kein Nullobjekt, denn die Prägarbe $\emptyset_X^{\text{PSh}}: U \mapsto \emptyset$ ist ein initiales Objekt und $\{*\}_X: U \mapsto \{*\}$ ist ein terminales Objekt, diese sind aber nicht isomorph. Die Prägarbe $\{*\}$ ist sogar eine Garbe und somit terminal in $\text{Sh}(X; \text{Set})$; sie entspricht dem étalen Raum $X \xrightarrow{\text{id}} X$. Die Garbifizierung

$$\emptyset^{\text{Sh}} := \mathbb{1}\emptyset^{\text{PSh}}: U \mapsto \begin{cases} \emptyset & \text{falls } U \neq \emptyset; \\ \{*\} & \text{falls } U = \emptyset \end{cases}$$

ist initial in $\text{Sh}(X; \text{Set})$; sie entspricht dem étalen Raum $\emptyset \rightarrow X$. Also hat auch $\text{Sh}(X; \text{Set})$ im Fall $X \neq \emptyset$ kein Nullobjekt.

- (h) Die Nullgarbe $0: U \mapsto 0 = \{0\}$ von abelschen Gruppen (ist wirklich eine Garbe) und ist ein Nullobjekt sowohl in $\text{Sh}(X; \text{Ab})$ als auch in $\text{PSh}(X; \text{Ab})$.
- (i) Genau dann hat eine Kategorie \mathcal{A} ein Nullobjekt, wenn ihre opponierte Kategorie \mathcal{A}^{op} ein Nullobjekt hat.

2.10.7. Bisher haben wir die Begriffe *Kern* und *Kokern* in der naiven Bedeutung für Morphismen von R -Moduln verwendet. Die folgende Definition verallgemeinert diesen Begriff zu beliebigen Kategorien mit Nullobjekt.

Definition 2.10.8. Sei $f: A \rightarrow B$ ein Morphismus in einer Kategorie \mathcal{A} mit Nullobjekt.

- (a) Ein **Kern von f** ist ein (Objekt K zusammen mit einem) Morphismus $i: K \rightarrow A$ mit den beiden folgenden Eigenschaften:
- $f \circ i = 0$;
 - Ist $t: T \rightarrow A$ ein beliebiger Morphismus mit $f \circ t = 0$, so gibt es genau einen Morphismus $\tilde{t}: T \rightarrow K$ mit $i \circ \tilde{t} = t$:

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ \exists! \tilde{t} \swarrow & \downarrow \forall t \text{ mit } f \circ t = 0 & \\ K & \xrightarrow{i} A & \xrightarrow{f} B \end{array}$$

Diese beiden Bedingungen sind zu jeder der folgenden beiden Bedingungen äquivalent:

- Für alle Objekte $T \in \mathcal{A}$ ist die Abbildung

$$(2.10.1) \quad \mathcal{A}(T, K) \xrightarrow{i \circ} \{t \in \mathcal{A}(T, A) \mid f \circ t = 0\}$$

- bijektiv.
- Das Diagramm

$$K \xrightarrow{i} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{0} \end{array} B$$

ist ein Egalisatordiagramm.

Ein Kern von f ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus (als Objekt der Kategorie $\mathcal{C}_{/A}$), wird deswegen meist als $\ker(f) \rightarrow A$ notiert und als *der* Kern bezeichnet. Oft wird das Objekt $\ker(f)$ als Kern bezeichnet und der Morphismus nach A wird nicht explizit erwähnt. Analoges gilt bei den folgenden drei Definitionen.

- (b) Ein **Kokern von f** ist ein Morphismus $p: B \rightarrow \text{cok}(f)$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:
- $p \circ f = 0$;

- Ist $t: B \rightarrow T$ ein beliebiger Morphismus mit $t \circ f = 0$, so gibt es genau einen Morphismus $\tilde{t}: \text{cok}(f) \rightarrow T$ mit $\tilde{t} \circ p = t$:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{p} & \text{cok}(f) \\
 & & \downarrow & \swarrow \text{dotted} & \\
 & & T & &
 \end{array}$$

$\forall t \text{ mit } t \circ f = 0$ $\exists! \tilde{t}$

- (c) Ein **Bild von f** ist ein Kern eines Kokerns von f und wird als $\text{im}(f) \rightarrow B$ notiert.
- (d) Ein **Kobild von f** ist ein Kokern eines Kerns von f und wird als $A \rightarrow \text{coim}(f)$ notiert.¹⁰⁰

2.10.9. Ein Kern von $f: A \rightarrow B$ ist dasselbe wie ein Kokern von $f: B^{\text{op}} \rightarrow A^{\text{op}}$.

Beispiel 2.10.10. In $\text{Mod}(R)$ hat jeder Morphismus $f: A \rightarrow B$ einen Kern und einen Kokern; genauer sind die naiven Kandidaten $\{a \in A \mid f(a) = 0\}$ und $B/f(A)$ (zusammen mit den offensichtlichen Morphismen) ein möglicher Kern und Kokern.

2.10.11. In jeder Kategorie mit Nullobjekt, in der jedes Diagramm $A \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \rightleftarrows \\ \xrightarrow{0} \end{smallmatrix} B$ einen Egalisator und einen Koegalisor hat (oder gar allgemeiner alle Limiten und Kolimiten existieren), hat jeder Morphismus einen Kern und einen Kokern.

Beispiel 2.10.12. Wir geben drei Beispiele für Kategorien, in denen nach 2.10.11 alle Morphismen Kerne und Kokerne haben.

- (a) Die Kategorie $\text{PSh}(X; \text{Ab})$ der Prägarben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X . Kerne und Kokerne können objektweise berechnet werden und erkannt werden.
- (b) Die Kategorie $\text{Sh}(X; \text{Ab})$ der Garben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X (Limiten und Kolimiten existieren nach Satz 2.7.1). Kerne können objektweise berechnet werden (stimmen also mit den Prägarbenkernen überein), Kokerne können als Garbifizierung des (objektweise berechneten) Prägarbenkokerns berechnet werden. Kerne und Kokerne können halmweise erkannt werden:

Sei $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Morphismus in $\text{Sh}(X; \text{Ab})$. Proposition 2.7.5.(b) liefert (unter Verwendung der Charakterisierung eines Kerns bzw. Kokerns als Egalisator bzw. Koegalisor):

- Ein Morphismus $\kappa: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{A}$ ist genau dann ein Kern von φ , wenn $\kappa_x: \mathcal{K}_x \rightarrow \mathcal{A}_x$ für alle $x \in X$ ein Kern von $\varphi_x: \mathcal{A}_x \rightarrow \mathcal{B}_x$ ist.
- Ein Morphismus $\pi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{Q}$ ist genau dann ein Kokern von φ , wenn jedes π_x ein Kokern von φ_x ist.
- (c) In der Kategorie $\text{Set}_{\{*\}}/$ punktierter Mengen hat jeder Morphismus $f: (Y, y) \rightarrow (X, x)$ einen Kern und einen Kokern, denn diese Kategorie hat ein Nullobjekt nach Beispiel 2.10.6 und alle Limiten und Kolimiten nach Aufgabe 1.2.20.

Trotz dieser allgemeinen Begründung empfehlen wir dem Leser, sich zu überlegen, dass die offensichtlichen Kandidaten Kern und Kokern sind.

Aufgabe 2.10.13. In jeder Kategorie \mathcal{C} mit Nullobjekt gelten die folgenden Aussagen.

- (a) Sei $i: \ker(f) \rightarrow A$ ein Kern eines Morphismus $f: A \rightarrow B$. Dann ist i ein Monomorphismus.
- (b) Ist ein Morphismus $f: A \rightarrow B$ ein Monomorphismus, so ist $0 \rightarrow A$ ein Kern von f .¹⁰¹
- (c) Genau dann ist ein Morphismus $f: A \rightarrow B$ der Nullmorphismus, wenn $A \xrightarrow{\text{id}_A} A$ ein Kern von f ist.
- (d) Sei $i: \ker(f) \rightarrow A$ ein Kern eines Morphismus $f: A \rightarrow B$. Dann ist $i = 0$ zu $\ker(f) = 0$ äquivalent. Im Fall $\ker(f) = 0$ hat f ein Kobild $q: A \rightarrow \text{coim}(f)$ und q ist ein Isomorphismus.
- (e) Seien $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ Morphismen, wobei f einen Kern $\ker(f)$ hat und g ein Monomorphismus ist. Dann ist $\ker(f)$ auch ein Kern von $g \circ f$.

¹⁰⁰Soergel definiert Bild und Kobild gerade andersherum, aber mir scheint die hier gegebene Variante die allgemein in der Literatur gebräuchlichere.

¹⁰¹Die umgekehrte Implikation ist im Allgemeinen falsch - leicht konstruiert man ein Gegenbeispiel (definiere abstrakt eine geeignete Kategorie mit genau vier Objekten oder finde konkret eine geeignete nicht-volle Unterkategorie der Kategorie der \mathbb{R} -Vektorräume aus vier Objekten); sie ist korrekt, falls die betrachtete Kategorie mit einer additiven Struktur (siehe Definition 2.12.1) versehen werden kann.

(f) Sei

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

ein kartesisches Diagramm. Dann hat f genau dann einen Kern, wenn g einen Kern hat, und in diesem Fall ist der kanonische Morphismus ein Isomorphismus $\ker(f) \rightarrow \ker(g)$ (in \mathcal{C}/C).

Bonus: Formuliere die dualen Aussagen für Kokerne etc..

2.10.14. Sei \mathcal{A} eine Kategorie mit Nullobjekt. Sei $f: A \rightarrow B$ ein Morphismus, der Kern, Kokern, Bild und Kobild hat. Dann gibt es im folgenden Diagramm genau einen (warum?) gestrichelten Morphismus vom Kokern des Kerns in den Kern des Kokerns, der das Diagramm kommutativ macht.

$$(2.10.2) \quad \begin{array}{ccccc} \ker(f) \hookrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \twoheadrightarrow \operatorname{cok}(f) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & \operatorname{coim}(f) & \overset{\exists!}{\dashrightarrow} & \operatorname{im}(f) & \end{array}$$

Aufgabe 2.10.15 (Weiteres Kern-Kokern-Iterieren erzeugt nichts Neues). Sei $f: A \rightarrow B$ ein Morphismus mit Kern $i: \ker(f) \hookrightarrow A$ in einer Kategorie mit Nullobjekt und sei

$$\begin{array}{ccccc} \ker(f) \hookrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \\ & \searrow h & & \nearrow g & \\ & & X & & \\ & \nearrow 0 & & & \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm. Dann ist $i: \ker(f) \hookrightarrow A$ auch der Kern von h .

Insbesondere gilt: Im Diagramm (2.10.2) ist $\ker(f) \hookrightarrow A$ auch der Kern von $A \rightarrow \operatorname{coim}(f)$ (also Kern= Kern des Kokerns des Kerns) und der Kern von $A \rightarrow \operatorname{im}(f)$.

Ende der 14. Vorlesung am 10.06.2021.

Hausaufgaben: **Dritte Aufgabe bei Weitem am aufwändigsten.**

- (1) Aufgabe 2.8.22 (konstante Garben – dazu sind Beispiel 2.8.18 und Definition 2.8.19 zu lesen)
- (2) Aufgaben 2.9.8 (Verknüpfung und Kürzen von Monos) und 2.9.9 (Pullback von Mono ist Mono)
- (3) Aufgabe 2.10.13 (Elementares zu Kernen etc.)
- (4) Aufgabe 2.10.15 (Kern-Kokern-Iterieren)

2.11. Präabelsche Kategorien.

2.11.1. Die Aussagen aus den Aufgaben 2.10.13 und 2.10.15 werden im Folgenden stillschweigend verwendet.

Definition 2.11.2. Eine Kategorie \mathcal{A} heißt **präabelsch**¹⁰², wenn

- sie ein Nullobjekt hat;
- jeder Morphismus einen Kern und Kokern hat;
- für jeden Morphismus f der in 2.10.14 erklärte Morphismus $\operatorname{coim}(f) \rightarrow \operatorname{im}(f)$ ein Isomorphismus ist.

Beispiele 2.11.3.

- (a) Die Kategorien \mathbf{Ab} und $\mathbf{Mod}(R)$ sind präabelsch.
- (b) Die Kategorie $\mathbf{PSh}(X; \mathbf{Ab})$ der Prägarben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X ist präabelsch, wie sofort aus Beispiel 2.10.12.(a) folgt: Dass $\operatorname{coim}(f) \rightarrow \operatorname{im}(f)$ ein Isomorphismus ist, kann objektweise getestet werden. Für jedes $U \in X$ ist aber $\operatorname{coim}(f)(U) = \operatorname{coim}(f_U) \rightarrow \operatorname{im}(f)(U) = \operatorname{im}(f_U)$ ein Isomorphismus, denn \mathbf{Ab} ist präabelsch (wir nehmen ohne Einschränkung an, dass Kern, Kokern, Kobild und Bild von f objektweise berechnet wurden).

¹⁰²Terminologie von [Soe21] übernommen. Dort wird auch erklärt, wie solche Kategorien anderswo heißen.

- (c) Die Kategorie $\text{Sh}(X; \text{Ab})$ der Garben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X ist präabelsch, wie sofort aus Beispiel 2.10.12.(b) folgt: Dass $\text{coim}(f) \rightarrow \text{im}(f)$ ein Isomorphismus ist, kann halmweise getestet werden (siehe Satz 2.3.1.(b)). Sei $x \in X$. Wegen $\ker(f)_x = \ker(f_x)$ folgt¹⁰³ $\text{coim}(f)_x = \text{coim}(f_x)$. Analog gelten Wegen $\text{cok}(f)_x = \text{cok}(f_x)$ und $\text{im}(f)_x = \text{im}(f_x)$. So wird $\text{coim}(f)_x \rightarrow \text{im}(f)_x$ mit $\text{coim}(f_x) \rightarrow \text{im}(f_x)$ identifiziert, was ein Isomorphismus ist, denn Ab ist präabelsch.
- (d) In der Kategorie Grp gibt es zwar ein Nullobjekt und jeder Morphismus hat einen Kern und Kokern (warum?), jedoch ist $\text{coim}(f) \rightarrow \text{im}(f)$ im Allgemeinen kein Isomorphismus (etwa für die offensichtliche Inklusion $f: S_2 \hookrightarrow S_3$).
- (e) Die Kategorie $\text{Set}_{*/}$ punktierter Mengen ist präabelsch (vgl. Beispiel 2.10.12.(c)). **scheint offensichtlich**
- (f) Die Kategorie $\text{Ab}(\text{Top})$ der abelschen topologischen Gruppen ist nicht präabelsch: Zwar existieren Nullobjekt $0 = \{0\}$ und Kerne und Kokerne (für $f: A \rightarrow B$ statt man Kern bzw. Kokern in Ab mit der Initial bzw. Finaltopologie aus), jedoch ist die dritte Bedingung verletzt: Für den Morphismus $f: \mathbb{R}^{\text{disc}} \rightarrow \mathbb{R}$, der auf den unterliegenden Mengen die Identität ist, hat trivialen Kern und Kokern, somit die jeweiligen Identitäten als Kobild und Bild, ist aber kein Isomorphismus.

2.11.4. Genau dann ist eine Kategorie \mathcal{A} präabelsch, wenn ihre opponierte Kategorie \mathcal{A}^{op} präabelsch ist.

Aufgabe 2.11.5. Sei $f: A \rightarrow B$ ein Morphismus in einer präabelschen Kategorie.

- (a) Äquivalent sind:
- (i) f ist ein Monomorphismus.
 - (ii) $\ker(f) = 0$.
 - (iii) $A \xrightarrow{\sim} \text{im}(f)$.
- (b) Dual: Finde zwei zu „ f ist Epimorphismus“ äquivalente Aussagen.
- (c) Äquivalent sind:
- (i) f ist ein Isomorphismus.
 - (ii) f ist ein Monomorphismus und ein Epimorphismus.
- (d) Epi-Mono-Faktorisierung: Hat f eine Faktorisierung $f = g \circ h: A \xrightarrow{h} X \xrightarrow{g} B$ als ein Epimorphismus gefolgt von einem Monomorphismus, so ist X sowohl Bild also auch Kobild von f (genauer ist h ein Kobild von f und g ein Bild von f).

Definition 2.11.6. Sei \mathcal{A} eine präabelsche Kategorie. Eine Sequenz $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ von Morphismen heißt **exakt bei B** , wenn die folgenden Bedingungen gelten:

- $g \circ f = 0$;
- der deswegen induzierte, im folgenden Diagramm illustrierte Morphismus $\text{coim}(f) \rightarrow \ker(g)$ ist ein Isomorphismus.

$$\begin{array}{ccccc}
 \ker(f) \hookrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} C \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
 & \text{coim}(f) & \xrightarrow{\exists!} & \ker(g) &
 \end{array}$$

(Wegen $\text{coim}(f) \xrightarrow{\sim} \text{im}(f)$ kanonisch könnte man hier auch $\text{coim}(f)$ durch $\text{im}(f)$ ersetzen, was leichter einprägsam ist: „Bild von f gleich Kern von g “.)

Eine längere Sequenz nennt man **exakt bei einem Objekt**, wenn die entsprechende 3-Term-Untersequenz exakt ist, und **exakt**, wenn sie an allen inneren Stellen exakt ist.

Eine **kurze exakte Sequenz** ist eine bei B exakte Sequenz $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, in der f ein Monomorphismus und g ein Epimorphismus sind. Äquivalent: Die verlängerte Sequenz $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ ist exakt bei A , B und C .

¹⁰³Denn bezeichnet $i: \ker(f) \rightarrow A$ den Kern von f , so gilt $\text{coim}(f)_x = \text{cok}(i)_x = \text{Kokern}(i_x) = \text{coim}(f_x)$.

2.11.7. Dieser Begriff der Exaktheit stimmt mit demjenigen in 1.2.59 auf all den Kategorien überein, wo beide erklärt sind.

Beispiele 2.11.8. Sei X ein topologischer Raum. Dieselben Argumente wie in Beispiele 2.11.3 zeigen:

- (a) Eine Sequenz $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ in der präabelschen Kategorie $\text{PSh}(X; \text{Ab})$ ist genau dann exakt, wenn $\mathcal{A}(U) \rightarrow \mathcal{B}(U) \rightarrow \mathcal{C}(U)$ für jedes $U \in X$ exakt ist.
- (b) Eine Sequenz $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ in der präabelschen Kategorie $\text{Sh}(X; \text{Ab})$ ist genau dann exakt, wenn $\mathcal{A}_x \rightarrow \mathcal{B}_x \rightarrow \mathcal{C}_x$ für jedes $x \in X$ exakt ist.

Aufgabe 2.11.9. Wir arbeiten in einer präabelschen Kategorie.

- (a) Eine Sequenz $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ von Morphismen mit $g \circ f = 0$ ist genau dann exakt, wenn der induzierte Morphismus $\text{cok}(f) \rightarrow \text{im}(g)$ ein Isomorphismus ist.

Bemerkung: Insbesondere ist eine Sequenz $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ von Morphismen in einer präabelschen Kategorie \mathcal{A} ist genau dann exakt bei B , wenn die Sequenz $A^{\text{op}} \xleftarrow{f^{\text{op}}} B^{\text{op}} \xleftarrow{g^{\text{op}}} C^{\text{op}}$ in der präabelschen Kategorie \mathcal{A}^{op} exakt bei B^{op} ist.

- (b) Genau dann ist $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B$ exakt, wenn f ein Monomorphismus ist.
- (c) Dual: Genau dann ist $A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$ exakt, wenn f ein Epimorphismus ist.
- (d) Genau dann ist $0 \rightarrow K \xrightarrow{\kappa} A \xrightarrow{f} B$ exakt, wenn κ ein Kern von f ist.
- (e) Dual: Genau dann ist $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 0$ exakt, wenn π ein Kokern von f ist.
- (f) Insbesondere gelten für jeden Morphismus $f: A \rightarrow B$:
 - (i) $0 \rightarrow \ker(f) \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow \text{cok}(f) \rightarrow 0$ ist exakt.
 - (ii) $\ker(f) \hookrightarrow A \twoheadrightarrow \text{im}(f)$ und $\text{im}(f) \hookrightarrow B \twoheadrightarrow \text{cok}(f)$ sind kurze exakte Sequenzen.
- (g) Genau dann ist $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ exakt bei B , wenn $\text{im}(f) \hookrightarrow B \twoheadrightarrow \text{im}(g)$ kurz exakt ist.

Aufgabe 2.11.10. Sei

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm in einer präabelschen Kategorie, dessen Zeilen kurze exakte Sequenzen sind. Sind α und γ Isomorphismen, so ist auch β ein Isomorphismus.

Hinweis: Aufgabe 2.11.5.(c)

Bemerkung: Allgemeiner gilt in jeder präabelschen Kategorie das Fünferlemma (siehe [Ive86, Five lemma I.1.7]).

Definition 2.11.11. Ein Funktor $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ zwischen präabelschen Kategorien heißt

- **linksexakt**, wenn er Kerne zu Kernen macht;
- **rechtsexakt**, wenn er Kokerne zu Kokerne macht;
- **exakt**, wenn er links- und rechtsexakt ist.

104

2.11.12. Sei (L, R) eine Adjunktion zwischen Funktoren $\mathcal{A} \xrightleftharpoons[R]{L} \mathcal{B}$ zwischen präabelschen Kategorien. Dann ist L rechtsexakt und R ist linksexakt, denn L erhält alle Kolimiten und insbesondere Kokerne und R erhält alle Limiten und insbesondere Kerne.

Beispiele 2.11.13. Sei X ein topologischer Raum.

- (a) Beispiel 2.11.8.(a) besagt insbesondere: Für jedes $U \in X$ ist „Werte bei U aus“ $\text{PSh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{Ab}$, $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(U)$, exakt.
- (b) Beispiel 2.11.8.(b) besagt insbesondere: Für jedes $x \in X$ ist „Nimm Halm bei x “ $(-)_x: \text{Sh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{Ab}$, $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_x$ exakt. Dasselbe gilt auch für $(-)_x: \text{PSh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{Ab}$ nach Proposition 2.7.5.(c).

¹⁰⁴Diese Definition stimmt sicherlich in den später definierten abelschen Kategorien mit der im kategoriellen Kontext üblichen Definition [Sta18, 0034] überein.

- (c) Die Inklusion $\iota: \text{Sh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{PSh}(X; \text{Ab})$ ist als Rechtsadjungierter linksexakt nach 2.11.12.
- (d) Garbifizierung $\natural: \text{PSh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Ab})$ ist exakt (da sie sowohl Kolimiten als auch endliche Limiten erhält, siehe Satz 2.7.7; Rechtsexaktheit folgt natürlich auch aus der Adjunktion (\natural, ι)).

Sei $f: Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung.

- (e) Der Funktor $f^*: \text{Sh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(Y; \text{Ab})$ ist exakt (Korollar 2.8.9 in der Version für Garben abelscher Gruppen, vgl. 2.8.14).
- (f) Der Funktor $f_*: \text{Sh}(Y; \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Ab})$ ist linksexakt (als Rechtsadjungierter). Insbesondere ist der Globale-Schnitte-Funktor $\Gamma: \text{Sh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{Ab}$ linksexakt.
 Ausblick: Die q -Garbenkohomologie $H^q(X; \mathcal{F})$ einer Garbe $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ ist per Definition der q -te Rechtsderivierte dieses Funktors Γ .
- (g) Proposition 1.2.61 besagt beispielsweise, dass $\text{colim Ab}^{\mathcal{I}} \rightarrow \text{Ab}$ für jede filtrierende Indexkategorie \mathcal{I} exakt ist. Man beachte, dass die Ausgangskategorie als Funktorkategorie abelsch ist, siehe Aufgabe 2.12.15.

Aufgabe 2.11.14. Jeder rechts- oder linksexakte Funktor $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ zwischen präabelschen Kategorien bildet das Nullobjekt auf das Nullobjekt ab.

Aufgabe 2.11.15. Ein Funktor $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ zwischen präabelschen Kategorien ist

- (a) genau dann linksexakt, wenn für alle kurzen exakten Sequenzen $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ die Sequenz $0 \rightarrow FA \rightarrow FB \rightarrow FC$ exakt ist.
 Bemerkungen:
 - Wegen Aufgabe 2.11.9 bedeutet die zweite Bedingung genau, dass F Kerne von Epimorphismen erhält¹⁰⁵).
 - Analog ist ein Funktor genau dann rechtsexakt, wenn er Kokerne von Monomorphismen erhält.
 - Insbesondere ist F genau dann exakt, wenn einer der folgenden Bedingungen gilt:
 - Für alle kurzen exakten Sequenzen $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ ist die Sequenz $0 \rightarrow FA \rightarrow FB \rightarrow FC \rightarrow 0$ exakt.
 - F erhält Epimorphismen und Kerne von Epimorphismen.
 - F erhält Monomorphismen und Kokerne von Monomorphismen.
- (b) genau dann exakt, wenn für alle exakten Sequenzen $A \rightarrow B \rightarrow C$ die Sequenz $FA \rightarrow FB \rightarrow FC$ exakt ist.

2.12. Additive und abelsche Kategorien.

Definition 2.12.1. Sei \mathcal{A} eine Kategorie. Eine **additive Struktur auf \mathcal{A}** ist eine Struktur einer abelschen Gruppe auf allen Morphismenmengen $\mathcal{A}(A, B)$,¹⁰⁶ für $A, B \in \mathcal{A}$, so dass alle Kompositionen

$$\circ: \mathcal{A}(B, C) \times \mathcal{A}(A, B) \rightarrow \mathcal{A}(A, C)$$

bilinear sind.

2.12.2. Ist \mathcal{A} eine Kategorie mit einer additiven Struktur, so ist die Menge der Endomorphismen $\mathcal{A}(A, A)$ für jedes $A \in \mathcal{A}$ ein Ring.

Jeder Ring R kann als Kategorie mit additiver Struktur mit genau einem Objekt aufgefasst werden, dessen Endomorphismenring R ist.

In diesem Sinne ist also ein Ring dasselbe wie eine Kategorie mit additiver Struktur, die genau ein Objekt hat.

2.12.3. Jede additive Struktur auf einer Kategorie \mathcal{A} liefert auf allen vollen Unterkategorien $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$ eine additive Struktur.

Lemma 2.12.4 (Finale Objekte als initiale Objekte). *Kann eine Kategorie \mathcal{A} mit finalem Objekt mit einer additiven Struktur versehen werden, so ist das finale Objekt auch initial und somit ein Nullobjekt und die in Definition 2.10.4 definierten Nullmorphisme sind für jede Wahl einer additiven Struktur die neutralen Elemente.*

¹⁰⁵Wir verlangen hierbei nicht, dass F Epimorphismen erhält.

¹⁰⁶Gegeben ist also mit anderen Worten eine Addition $+: \mathcal{A}(A, B) \times \mathcal{A}(A, B) \rightarrow \mathcal{A}(A, B)$, die $\mathcal{A}(A, B)$ zu einer abelschen Gruppe macht.

Beweis. Sei $F \in \mathcal{A}$ final. Wir fixieren eine beliebige additive Struktur auf \mathcal{A} und notieren das neutrale Element von $\mathcal{A}(A, B)$ als $\tilde{0}_{BA}$. Da F final ist, ist $\tilde{0}_{FA}$ für jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$ der eindeutige Morphismus $A \rightarrow F$. Insbesondere gilt $\text{id}_F = \tilde{0}_{FF}$.

Sei $A \in \mathcal{A}$ beliebig. Dann ist $\tilde{0}_{AF}: F \rightarrow A$ ein Morphismus und für jeden Morphismus $f: F \rightarrow A$ gilt $f = f \circ \text{id}_F = f \circ \tilde{0}_{FF} = \tilde{0}_{AF}$ wegen der Bilinearität der Verknüpfung. Also ist F ein initiales Objekt und damit ein Nullobjekt.

Für beliebige $A, B \in \mathcal{A}$ folgt $0_{BA} = \tilde{0}_{BF} \circ \tilde{0}_{FA} = \tilde{0}_{BA}$. \square

Definition 2.12.5. Eine Kategorie heißt **additiv**, wenn sie endliche Produkte (und also insbesondere ein terminales Objekt) hat und mit einer additiven Struktur versehen werden kann (die dann notwendig eindeutig ist, wie wir in Lemma 2.12.8 sehen werden). Wir bemerken schon hier, dass Koprodukte in additiven Kategorien mit dem Symbol \oplus notiert werden (siehe Notation 2.12.9).

Eine Kategorie heißt **abelsch**, wenn sie additiv und präabelsch ist.

Lemma 2.12.6 (Produkt zweier Objekte als Koprodukt). *Seien A, B zwei Objekte einer additiven Kategorie mit Produkt $(A \times B, \text{pr}_A, \text{pr}_B)$. Dann ist $A \times B$ zusammen mit den nach Lemma 2.12.4 wohldefinierten Morphismen*

$$\begin{aligned} \text{in}_A &:= \langle \text{id}_A, 0 \rangle: A \rightarrow A \times B, \\ \text{in}_B &:= \langle 0, \text{id}_B \rangle: B \rightarrow A \times B \end{aligned}$$

ein Koprodukt von A und B . Salopp gilt also $A \times B = A \amalg B$.

Analog gilt $A_1 \times \cdots \times A_n = A_1 \amalg \cdots \amalg A_n$ für alle $n \geq 1$ und Objekte A_1, \dots, A_n .

Beweis. Fixiere eine beliebige additive Struktur auf \mathcal{A} . Dann gilt

$$\text{in}_A \circ \text{pr}_A + \text{in}_B \circ \text{pr}_B = \text{id}_{A \times B},$$

denn schalten wir pr_A bzw. pr_B hinter beide Seiten, so kommt pr_A bzw. pr_B heraus.

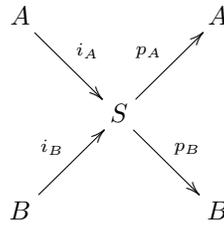
Seien beliebige Morphismen $\alpha: A \rightarrow T$ und $\beta: B \rightarrow T$ gegeben. Gibt es einen Morphismus $\gamma: A \times B \rightarrow T$ mit $\gamma \circ \text{in}_A = \alpha$ und $\gamma \circ \text{in}_B = \beta$, so folgt

$$\gamma = \gamma \circ \text{id}_{A \times B} = \gamma \circ (\text{in}_A \circ \text{pr}_A + \text{in}_B \circ \text{pr}_B) = \alpha \circ \text{pr}_A + \beta \circ \text{pr}_B.$$

Andererseits hat dieser somit einzig möglicher Kandidat $\alpha \circ \text{pr}_A + \beta \circ \text{pr}_B$ die gesuchte Eigenschaft.

Der Beweis der Verallgemeinerung geht analog (oder per Induktion mit Aufgabe 1.2.25). \square

Aufgabe 2.12.7. Sei ein Diagramm



in einer Kategorie mit additiver Struktur gegeben, so dass $p_A \circ i_A = \text{id}_A$ und $p_A \circ i_B = 0$ und $p_B \circ i_B = \text{id}_B$ und $p_B \circ i_A = 0$ gelten. Dann sind äquivalent:

- (a) (S, i_A, i_B) ist ein Koprodukt von A und B .
- (b) (S, p_A, p_B) ist ein Produkt von A und B .
- (c) $i_A \circ p_A + i_B \circ p_B = \text{id}_S$.

Lemma 2.12.8 (Eindeutigkeit der additiven Struktur). *Auf einer additiven Kategorie gibt es genau eine additive Struktur: Sind $f, g: A \rightarrow B$ zwei Morphismen, so ist $f + g$ (für jede Wahl einer additiven Struktur $+$) die folgende Verknüpfung:*

$$f + g = \langle f, g \rangle \circ \langle \text{id}_A, \text{id}_A \rangle: A \xrightarrow{\langle \text{id}_A, \text{id}_A \rangle} A \times A = A \amalg A \xrightarrow{\langle f, g \rangle} B,$$

wobei die Gleichheit nach Lemma 2.12.6 gilt.

Beweis. Sei \mathcal{A} die betrachtete additive Kategorie. Seien $f, g: A \rightarrow B$ zwei Morphismen. Wir verwenden Lemma 2.12.6 und behaupten, dass die Verknüpfung

$$A \xrightarrow{\langle \text{id}_A, \text{id}_A \rangle} A \times A = A \amalg A \xrightarrow{\langle f, g \rangle} B$$

für jede additive Struktur auf \mathcal{A} die Summe von f und g sein muss. In der Tat, fixieren wir eine additive Struktur auf \mathcal{A} , so gilt nach dem Beweis von Lemma 2.12.6

$$\langle f, g \rangle = f \circ \text{pr}_1 + g \circ \text{pr}_2$$

und somit

$$\langle f, g \rangle \circ \langle \text{id}_A, \text{id}_A \rangle = (f \circ \text{pr}_1 + g \circ \text{pr}_2) \circ \langle \text{id}_A, \text{id}_A \rangle = f \circ \text{id}_A + g \circ \text{id}_A = f + g. \quad \square$$

Notation 2.12.9. Ist \mathcal{A} eine additive Kategorie und besitzt eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Objekten von \mathcal{A} ein Koprodukt, so notieren wir dieses als

$$\bigoplus_{i \in I} A_i := \coprod_{i \in I} A_i.$$

Analog werden endliche Koprodukte als

$$A \oplus B \oplus \cdots \oplus Z := A \amalg B \amalg \cdots \amalg Z$$

notiert. Wir erinnern daran, dass endliche Koprodukte stets existieren und auch Produkte sind (siehe Lemmata 2.12.4 für leere Produkte alias terminale Objekte und 2.12.6). In Formeln gilt also

$$A \oplus B \oplus \cdots \oplus Z = A \amalg B \amalg \cdots \amalg Z = A \times B \times \cdots \times Z$$

auf Objektebene – wie man aus den Projektionen aus dem Produkt die kanonischen Abbildungen in das Koprodukt berechnen kann und umgekehrt, ist im Fall zweier Faktoren in Lemma 2.12.6 und genauer in Aufgabe 2.12.7 erklärt; der allgemeine Fall geht analog. Man bezeichnet $A \oplus B \oplus \cdots \oplus Z$ deswegen auch als Biproduct, vgl. [Wik20, Biproduct].

2.12.10. Genau dann ist \mathcal{A} additiv, wenn \mathcal{A}^{op} additiv ist. Genau dann ist \mathcal{A} abelsch, wenn \mathcal{A}^{op} abelsch ist (siehe 2.11.4).

Beispiele 2.12.11. Sei R ein Ring.

- (a) Die Kategorie aller freien R -Moduln ist additiv¹⁰⁷, aber im Allgemeinen nicht abelsch (da nicht präabelsch - warum? Hinweis: Beispielsweise ist der Kokern von $\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}$ der Nullmodul).
- (b) Die Kategorie $\text{Mod}(R)$ aller R -Moduln ist abelsch.
- (c) Die Kategorie $\text{C}(R)$ aller Komplexe von R -Moduln ist abelsch; wie in Aufgabe 1.2.69 kann man dies direkt prüfen oder abstrakt aus den Aufgaben 2.12.15 und 2.12.16 folgern.

Beispiel 2.12.12. Sei X ein topologischer Raum. Dann ist die Kategorie $\text{PSh}(X; \text{Ab})$ der abelschen Prägarben abelsch: Dass sie präabelsch ist, haben wir bereits in Beispiel 2.11.3.(b) gesehen. Sie hat alle Limiten und insbesondere endliche Produkte. Die additive Struktur auf jeder Morphismenmenge $\text{PSh}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ist die offensichtliche: Gegeben Morphismen $\varphi, \psi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ definiere $\varphi + \psi$ durch $(\varphi + \psi)_U := \varphi_U + \psi_U$ für $U \in X$. (Alternativ: Dass $\text{PSh}(X; \text{Ab})$ abelsch ist, folgt schlicht daraus, dass es sich um eine Funktorkategorie mit Werten in einer abelschen Kategorie handelt, siehe Aufgabe 2.12.15.)

Limes-Sein, Kolimes-Sein, Kern-Sein, Kokern-Sein, Nullobjekt-Sein, Exaktheit in $\text{PSh}(X; \text{Ab})$ kann stets objektweise auf allen $U \in X$ getestet werden.

2.12.13. Der folgende Satz ist eigentlich nur eine Zusammenfassung bereits bewiesener Aussagen.

Satz 2.12.14. Die Kategorie $\text{Sh}(X; \text{Ab})$ von Garben abelscher Gruppen auf einem beliebigen topologischen Raum X ist eine abelsche Kategorie.

Sie hat alle Limiten und Kolimiten. Isomorphismus-Sein, Exakt-Sein, Kern-Sein, Kokern-Sein, Kolimes-Sein, Endlicher-Limes-Sein, Nullobjekt-Sein in $\text{Sh}(X; \text{Ab})$ kann auf den Halmen bei allen $x \in X$ getestet werden (jeweils als Genau-dann-wenn-Bedingung).

¹⁰⁷und hat sogar eine R -lineare Struktur, falls R kommutativ ist, d. h. alle Morphismenmengen sind R -Moduln und Verknüpfung ist R -bilinear

Beweis. Dass $\text{Sh}(X; \text{Ab})$ präabelsch ist, haben wir bereits in Beispiel 2.11.3.(c) gesehen. Sie hat alle Limiten (Satz 2.7.1) und insbesondere endliche Produkte. Die additive Struktur ist dieselbe wie auf $\text{PSh}(X; \text{Ab})$.

Dass alle Limiten und Kolimiten existieren, wurde in Satz 2.7.1 erklärt. Dass die angegebenen Eigenschaften halmweise getestet werden können, haben wir in Satz 2.3.1.(b), 2.11.8.(b) und Proposition 2.7.5.(b) gesehen. \square

Aufgabe 2.12.15. Seien \mathcal{A} und \mathcal{I} Kategorien. Durch „objektweises Definieren“ zeige (die Zusatzinfos „Auswerten ist ...“ und „Genau dann gilt ..., wenn alle Auswertungen ... erfüllen“ sind wichtig, aber stets offensichtlich):

- Hat \mathcal{C} ein Nullobjekt, so auch $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ und Auswerten $\text{ev}_i: \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{C}$ bei jedem $i \in \mathcal{I}$ erhält das Nullobjekt. Ein Objekt $N \in \mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ ist genau dann ein Nullobjekt, wenn jedes $N(i)$ ein Nullobjekt ist.
- Hat jeder Morphismus in \mathcal{C} einen Kern bzw. Kokern, so stimmt dasselbe in $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ und Auswerten bei jedem $i \in \mathcal{I}$ erhält diese. Ähnlich wie bei Nullobjekten kann man Kerne bzw. Kokerne durch Auswerten an allen $i \in \mathcal{I}$ detektieren.
- Mit \mathcal{C} ist auch $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ präabelsch und Auswerten bei jedem $i \in \mathcal{I}$ ist exakt. Genauer ist $F \rightarrow G \rightarrow H$ genau dann exakt, wenn jede Auswertung $F(i) \rightarrow G(i) \rightarrow H(i)$ exakt ist.
- Jede additive Struktur auf \mathcal{C} induziert eine additive Struktur auf $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$.
- Mit \mathcal{C} ist auch $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ additiv und Auswerten bei jedem $i \in \mathcal{I}$ ist additiv.
Hinweis: Aufgabe 1.2.68.
- Mit \mathcal{C} ist auch $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ abelsch und Auswerten bei jedem $i \in \mathcal{I}$ ist exakt. Genauer ist $F \rightarrow G \rightarrow H$ genau dann exakt, wenn jede Auswertung $F(i) \rightarrow G(i) \rightarrow H(i)$ exakt ist.

Aufgabe 2.12.16. Seien \mathcal{A} eine abelsche Kategorie, \mathcal{U} eine Kategorie und $V: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{A}$ ein volltreuer Funktor. Gelte:

- das Nullobjekt von \mathcal{A} liegt im essentiellen Bild von V ;
- ist $f: V(X) \rightarrow V(Y)$ ein Morphismus in \mathcal{A} für Objekte $X, Y \in \mathcal{U}$, so liegen Kern und Kokern von f im essentiellen Bild von V ;
- gegeben $n \in \mathbb{N}$ und Objekte X_1, \dots, X_n in \mathcal{U} liegt das Produkt $\prod_{i=1}^n V(X_i)$ in \mathcal{A} im essentiellen Bild von V .

Dann ist auch \mathcal{U} abelsch.

Hinweis: Sukzessive Vorgehen: Unter der ersten Bedingung hat \mathcal{U} ein Nullobjekt. ... Aufgabe 1.2.67 sollte verwendet werden.

Bemerkung: Oft wird diese Aussage auf volle Unterkategorien $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$ angewendet.

Definition 2.12.17. Ein Funktor $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ zwischen additiven Kategorien heißt **additiv**, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt (vgl. Aufgabe 2.12.18):

- Für alle $A, A' \in \mathcal{A}$ ist

$$F: \mathcal{A}(A, A') \rightarrow \mathcal{B}(FA, FA')$$

ein Morphismus (abelscher) Gruppen.

- F erhält Produkte zweier Objekte: Für alle $A, A' \in \mathcal{A}$ ist der kanonische Morphismus

$$F(A \times A') \rightarrow FA \times FA'$$

ein Isomorphismus.

- F erhält Koprodukte zweier Objekte: Für alle $A, A' \in \mathcal{A}$ ist der kanonische Morphismus

$$F(A \amalg A') \rightarrow FA \amalg FA'$$

ein Isomorphismus.

Aufgabe 2.12.18. Die drei Bedingungen in Definition 2.12.17 sind äquivalent.

Hinweis: Aufgabe 2.12.7 und Lemma 2.12.8.

2.12.19. Jeder additive Funktor erhält das Nullobjekt: Sei $N = N_{\mathcal{A}}$ das Nullobjekt von \mathcal{A} . Nach 2.10.5 gilt $0_N = \text{id}_N$. Weil F ein Funktor und additiv ist, folgt

$$0_{F(N)} = F(0_N) = F(\text{id}_N) = \text{id}_{F(N)}.$$

Daraus folgt wieder mit 2.10.5, dass $F(N)$ das Nullobjekt ist.

Beispiel 2.12.20. Sei \mathcal{A} eine additive Kategorie. Dann ist für jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$ der Funktor

$$\mathcal{A}(A, -): \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$$

additiv (dieser Funktor landet in Ab, da \mathcal{A} additiv ist!). Ist \mathcal{A} sogar abelsch, so ist dieser Funktor linksexakt (dies ist trivial nach der Definition eines Kerns in der durch (2.10.1) beschriebenen Variante).

Ebenso ist der Funktor

$$\mathcal{A}(-, A): \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$$

additiv. Ist \mathcal{A} abelsch, so ist er linksexakt (denn er bildet Kerne in \mathcal{A}^{op} alias Kokerne in \mathcal{A} auf Kerne in Ab).

2.12.21. Jeder Funktor $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ zwischen additiven Kategorien, der einen Rechts- bzw. Linksadjungierten besitzt, ist additiv, denn jeder solche Funktor erhält Kolimiten bzw. Limiten und insbesondere Produkte bzw. Koproducte.

Beispielsweise sind Garbifizierung $\natural: \text{PSh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Ab})$, Pullback f^* , Pushforward f_* additive Funktoren (was ohnehin offensichtlich ist).

Aufgabe 2.12.22. Jeder rechts- oder linksexakte Funktor $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ zwischen abelschen Kategorien ist additiv.

Hinweis: Verwende 2.11.10. Vermutlich geht es einfacher(?) mit Lemma 2.12.8.

Beispiel: Ist $f: Y \rightarrow X$ stetig, so sind die Funktoren $f^*: \text{Sh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(Y; \text{Ab})$ und $f_*: \text{Sh}(Y; \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Ab})$ additiv (denn f^* als Linksadjungierter bzw. f_* als Rechtsadjungierter ist rechts- bzw. linksexakt). Insbesondere sind die Adjunktionsbijektionen $\text{Sh}_{Y, \text{Ab}}(f^* \mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \text{Sh}_{X, \text{Ab}}(\mathcal{F}, f_* \mathcal{G})$ Morphismen abelscher Gruppen. (Diese Aussagen sind ohnehin offensichtlich.)

Aufgabe 2.12.23 (Baut auf Aufgabe 2.12.15 auf). Ist \mathcal{A} eine beliebige Kategorie, so erinnern wir an die Yoneda-Funktoren

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} &\rightarrow \text{Set}^{\mathcal{A}^{\text{op}}}, \\ A &\mapsto h_A := \mathcal{A}(-, A), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} h^{\mathcal{A}}: \mathcal{A}^{\text{op}} &\rightarrow \text{Set}^{\mathcal{A}}, \\ A &\mapsto h^A := \mathcal{A}(A, -). \end{aligned}$$

- (a) Ist \mathcal{A} eine additive Kategorie, so sind $\text{Ab}^{\mathcal{A}^{\text{op}}}$ und $\text{Ab}^{\mathcal{A}}$ ebenfalls additiv (nach der oben zitierten Aufgabe) und $h_{\mathcal{A}}$ und $h^{\mathcal{A}}$ liften zu additiven Funktoren $\tilde{h}_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}^{\mathcal{A}^{\text{op}}}$ und $\tilde{h}^{\mathcal{A}}: \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}^{\mathcal{A}}$.
- (b) **stimmt das so?** Ist \mathcal{A} sogar abelsch, so sind $\tilde{h}_{\mathcal{A}}$ und $\tilde{h}^{\mathcal{A}}$ linksexakt. **Vermutlich schon, nach den Fussnoten 19 und 28 sind $h_{\mathcal{A}}$ und $h^{\mathcal{A}}$ mit Limiten verträglich, und dies überträgt sich dann auf $\tilde{h}_{\mathcal{A}}$ und $\tilde{h}^{\mathcal{A}}$, denn nach Slogan (und objektweiser Berechnung) vertauschen (und erkennen) die Vergissfunktoren $\text{Ab}^{\mathcal{A}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{A}^{\text{op}}}$ und $\text{Ab}^{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{A}}$ alle Limiten.**

Ende der 15. Vorlesung am 15.06.2021.

2.13. Träger von Garben und von Schnitten. Hätte ich auch schon deutlich früher machen können...

Definition 2.13.1. Sei \mathcal{F} eine Garbe oder allgemeiner eine Prägarbe abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X . Der **Träger von \mathcal{F}** ist die Menge

$$\text{Supp}(\mathcal{F}) := \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}.$$

Ist $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $s \in \mathcal{F}(U)$ ein Schnitt, so ist der **Träger von s** die Menge

$$\text{Supp}(s) := \{u \in U \mid s_u \neq 0\}.$$

2.13.2. Hier ist es entscheidend, dass wir mit (Prä-)Garben abelscher Gruppen arbeiten, damit wir Nullelemente in allen Halmen haben.

2.13.3. Der Träger $\text{Supp}(\mathcal{F})$ ist im Allgemeinen weder offen noch abgeschlossen noch lokal abgeschlossen. Sei $U \Subset X$ offen. Die abelsche Garbe der stetigen Schnitte der étalen Abbildung

$$\{(x, z) \in X \times \mathbb{Z} \mid z = 0 \text{ falls } x \notin U\} \rightarrow X$$

hat genau U als Träger. Diese Garbe ist isomorph zur später in 2.14.3 definierten Garbe $\mathbb{Z}_{U \Subset X}$, für die also $\text{Supp}(\mathbb{Z}_{U \Subset X}) = U$ gilt. Jede offene Teilmenge taucht also als Träger einer Garbe auf.

Ist $i: A \hookrightarrow X$ die Inklusion einer abgeschlossenen Teilmenge, so gilt $\text{Supp}(i_*\mathbb{Z}_A) = A$ nach Beispiel 2.8.13. Jede abgeschlossene Teilmenge taucht also als Träger einer Garbe auf.

Ist $x \in X$ ein Punkt, so gilt $\text{Supp}(\mathbb{Z}_{(x)}) = \overline{\{x\}}$ für den Wolkenkratzer $\mathbb{Z}_{(x)}$ nach 2.1.5.

Mit diesen Beispielen und Proposition 2.7.5.(a) kann man nun Garben mit ziemlich wüsten Trägern konstruieren. **Frage: Welche Teilmengen treten allgemein als Träger von Garben auf?**

Lemma 2.13.4. *Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{F} \in \text{PSh}(X; \text{Ab})$ eine Prägarbe abelscher Gruppen, $U \Subset X$ offen und $s \in \mathcal{F}(U)$. Dann ist der Träger $\text{Supp}(s)$ abgeschlossen in U (und somit lokal-abgeschlossen in X), in Formeln $\text{Supp}(s) \sqsubset U$.*

Beweis. Sei $x \in U \setminus \text{Supp}(s)$, d. h. $s_x = 0 = 0_x$. Dann gibt es nach Definition des Halms eine offene Umgebung V von x in U mit $s|_V = 0 = 0_V$. Also gilt $s_v = 0$ für alle $v \in V$ und somit $x \in V \subset U \setminus \text{Supp}(s)$.

Alternativbeweis mit Verwendung des étalen Raums: Wie zuvor sei $\bar{s}: U \rightarrow \text{ét}(\mathcal{F})$, $u \mapsto \bar{s}(u) = s_u$ der zu s assoziierte (stetige offene, siehe 2.4.4.(b)) Schnitt. Der zum Nullelement $0 = 0_X \in \mathcal{F}(U)$ assoziierte Schnitt $\bar{0}$ heißt **Nullschnitt**; oft wird auch sein offenes Bild

$$N := \bar{0}(X) = \{\bar{0}(x) = 0_x \mid x \in X\} \Subset \text{ét}(\mathcal{F})$$

als **Nullschnitt** bezeichnet. Wir erhalten wegen der Stetigkeit von \bar{s} wie gewünscht

$$U \setminus \text{Supp}(s) = \{x \in U \mid s_u = 0_u\} = \{x \in U \mid \bar{s}(u) = \bar{0}(u)\} = \bar{s}^{-1}(N) \Subset U. \quad \square$$

Warnung 2.13.5. Sei $s: X = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $s(x) = \max(0, x)$ definiert. Der mengentheoretische Träger von s ist $\{x \in X \mid s(x) \neq 0\} = \mathbb{R}_{>0}$, der offen, aber nicht abgeschlossen in $X = \mathbb{R} = U$ ist.¹⁰⁸ Dies ist aber kein Widerspruch zu Lemma 2.13.4, wenn wir s als (globalen) Schnitt der abelschen Garbe $\mathcal{C}_{\mathbb{R}, X}$ reellwertiger Funktionen auf $X = \mathbb{R}$ auffassen, denn in der garbentheoretischen Definition betrachtet man die Keime s_x und nicht die Werte $s(x)$ (die im Fall einer beliebigen abelschen Prägarbe \mathcal{F} gar nicht existieren). Der garbentheoretische Träger von $s \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}, X}(X)$ ist $\text{Supp}(s) = \{x \in X \mid s_x \neq 0\} = \mathbb{R}_{\geq 0}$, was in der Tat abgeschlossen in X ist.¹⁰⁹

Aufgabe 2.13.6. Ist \mathcal{R} eine Prägarbe von Ringen, so ist $\text{Supp}(\mathcal{R})$ stets abgeschlossen.

Hinweis: Nach unseren Konventionen haben alle Ringe ein Einselement; dieses stimmt genau im Nullring mit dem Nullelement überein.

2.14. Ausdehnung durch Null.

Satz 2.14.1 (Ausdehnung durch Null für Garben abelscher Gruppen). *Sei $j: U \hookrightarrow X$ eine offene Einbettung. Dann hat das inverse Bild $j^*: \text{Sh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(U; \text{Ab})$ (welches isomorph zum Einschränken $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}|_U$ ist, siehe 2.8.17) einen Linksadjungierten $j_!: \text{Sh}(U; \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Ab})$ (das Adjunktionsdatum wird im Beweis genau erklärt), wir haben also eine Adjunktion $(j_!, j^*)$:*

$$\text{Sh}(U; \text{Ab}) \begin{array}{c} \xrightarrow{j_!} \\ \xleftarrow{j^*} \end{array} \text{Sh}(X; \text{Ab})$$

Weiter gelten:

(a) *Ist $\mathcal{G} \in \text{Sh}(U; \text{Ab})$ eine Garbe, so ist die Eins ein Isomorphismus*

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} j^* j_! \mathcal{G} \cong (j_! \mathcal{G})|_U$$

¹⁰⁸Der Träger im topologischen Sinne ist der Abschluss dieser Menge.

¹⁰⁹Leicht sieht man, dass garbentheoretischer und topologischer Träger übereinstimmen.

und es gilt $(j_! \mathcal{G})|_{X \setminus U} = 0$, weshalb man $j_! \mathcal{G}$ als **Ausdehnung durch Null von \mathcal{G}** bezeichnet. Insbesondere gilt für den Halm an einem beliebigen Punkt $x \in X$

$$(2.14.1) \quad (j_! \mathcal{G})_x \cong \begin{cases} \mathcal{G}_x & \text{falls } x \in U; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Der Funktor $j_!$ ist volltreu und erhält alle Kolimiten und alle endlichen Limiten. Insbesondere ist er exakt.

(c) Der Funktor j^* erhält alle Kolimiten und Limiten und ist insbesondere exakt.

(d) Ist $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ eine Garbe, so ist die Koeins ein Monomorphismus

$$(2.14.2) \quad j_! j^* \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}.$$

Seine Restriktion auf U ist ein Isomorphismus $j^* j_! j^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} j^* \mathcal{F}$.

Ausblick 2.14.2. Man kann den Funktor $f_!$ für beliebige stetige Abbildungen definieren. Sein Rechtsderivierter $\mathbf{R}f_!$ hat oft einen Rechtsadjungierten $f^!$, siehe [SS15, Theorem 7.7] (was vorher bekannte Resultate etwas verallgemeinert).

Algebraischer Beweis. Gelte ohne Einschränkung $U \Subset X$. Wir arbeiten statt mit j^* mit dem isomorphen Funktor $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}|_U$.

Sei $\mathcal{G} \in \text{PSh}(U; \text{Ab})$ eine Prägarbe abelscher Gruppe. Sei $j_!^{\text{PSh}} \mathcal{G}$ die durch

$$X \ni V \mapsto \begin{cases} \mathcal{G}(V) & \text{falls } V \subset U, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

definierte Prägarbe abelscher Gruppen. Dies definiert offensichtlich einen Funktor $j_!^{\text{PSh}}: \text{PSh}(U; \text{Ab}) \rightarrow \text{PSh}(X; \text{Ab})$.

Offensichtlich gilt $(j_!^{\text{PSh}} \mathcal{G})|_U = \mathcal{G}$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{PSh}(j_!^{\text{PSh}} \mathcal{G}, \mathcal{F}) &\rightarrow \text{PSh}(\mathcal{G}, \mathcal{F}|_U), \\ \varphi &\mapsto \varphi|_U, \end{aligned}$$

ist offensichtlich bijektiv (definiere die Inverse!) und natürlich in $\mathcal{G} \in \text{PSh}(U; \text{Ab})$ und $\mathcal{F} \in \text{PSh}(X; \text{Ab})$.

Definiere $j_! := \natural j_!^{\text{PSh}}$. Sind nun \mathcal{G} und \mathcal{F} Garben, so folgt

$$(2.14.3) \quad \text{Sh}(j_! \mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{PSh}(j_!^{\text{PSh}} \mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{PSh}(\mathcal{G}, \mathcal{F}|_U) = \text{Sh}(\mathcal{G}, \mathcal{F}|_U)$$

natürlich in \mathcal{G} und \mathcal{F} . Dies zeigt die gewünschte Adjunktion $(j_!, (-)|_U)$.

Zur Eins: Für $\mathcal{F} = j_! \mathcal{G}$ bildet die erste Bijektion das Element $\text{id}: j_! \mathcal{G} \rightarrow j_! \mathcal{G}$ auf den Garbifizierungsmorphismus $j_!^{\text{PSh}} \mathcal{G} \rightarrow j_! \mathcal{G}$ ab und die nächste Bijektion bildet diesen auf seine Einschränkung $\mathcal{G} = (j_!^{\text{PSh}} \mathcal{G})|_U \rightarrow (j_! \mathcal{G})|_U$ ab, welche per Definition die Eins der Adjunktion (ausgewertet bei \mathcal{G}) ist. Da aber der Garbifizierungsmorphismus auf allen Halmen ein Isomorphismus ist (siehe 2.6.3), ist auch die Eins auf allen Halmen ein Isomorphismus (denn Restriktion auf U ändert die Halme offensichtlich nicht) und dann als Morphismus von Garben bereits ein Isomorphismus (siehe Satz 2.3.1.(b)).

Da die Eins ein Isomorphismus (alias eine Isotransformation) ist, ist $j_!$ volltreu (nach Aufgabe 1.1.40).

Für alle $x \in X \setminus U$ gilt offensichtlich $(j_! \mathcal{G})_x \xleftarrow{\sim} (j_!^{\text{PSh}} \mathcal{G})_x = 0$ und somit $(j_! \mathcal{G})|_{X \setminus U} = 0$. Damit ist auch (2.14.1) bewiesen.

Dass $j_!$ alle Kolimiten und alle endlichen Limiten erhält, folgt aus (2.14.1) und Proposition 2.7.5.(b) (Kolimiten sind eh klar, weil $j_!$ ein Linksadjungierter ist).

Da der Funktor j^* sowohl links- als auch rechtsadjungiert ist, erhält er alle Limiten und Kolimiten (hier werden also auch beliebige Limiten erhalten, vgl. Korollar 2.8.9 und Beispiel 2.7.6).

110

¹¹⁰Alter Beweis, dass Koeins Monomorphismus: Für $\mathcal{G} = \mathcal{F}|_U$ entspricht die Identität $\text{id}: \mathcal{F}|_U \rightarrow \mathcal{F}|_U$ unter der rechten Bijektion in (2.14.3) dem Prägarbenmorphismus $j_!^{\text{PSh}}(\mathcal{F}|_U) \rightarrow \mathcal{F}$, dessen Auswertung bei $V \Subset U$ die Identität ist und dessen Auswertung bei allen anderen $V \Subset X$ (notwendig) die Nullabbildung ist. Dieser induziert auf allen Halmen injektive Abbildungen (genauer die Identität bei $x \in U$ und die Nullabbildung bei $x \notin U$). Dasselbe gilt dann auch für die Koeins $j_!(\mathcal{F}|_U) \rightarrow \mathcal{F}$, da Garbifizierung die Halme nicht ändert. Nach Proposition 2.9.12 ist die Koeins ein Monomorphismus.

Restriktion der Koeins auf U ist Isomorphismus: Wegen der einen Dreiecksidentität ist die Verknüpfung $\mathcal{F}|_U \rightarrow (j_!(\mathcal{F}|_U))|_U \rightarrow \mathcal{F}|_U$ die Identität. Der erste Morphismus ist eine Eins und somit wie oben gezeigt ein Isomorphismus. Also ist der zweite Morphismus ebenfalls ein Isomorphismus - mit anderen Worten restringiert die Koeins auf U zu einem Isomorphismus.

Koeins Monomorphismus: Da die Koeins auf U zu einem Isomorphismus restringiert, induziert sie auf allen Halmen bei Punkten $x \in U$ Isomorphismen. Auf allen Halmen bei Punkten $x \in X \setminus U$ induziert sie wegen (2.14.1) die (injektive) Abbildung $0 \rightarrow \mathcal{F}_x$. Also ist die Koeins nach Proposition 2.9.12 ein Monomorphismus. \square

Geometrischer Beweis für die Existenz des Linksadjungierten; Skizze. Leider verliert der Beweis etwas Anschauung, wenn man genau ist und Garben abelscher Gruppen als abelsche Gruppenobjekte in der Kategorie étaler Räume ansieht (vgl. Aufgabe 2.14.9). Erkläre in der Vorlesung deshalb nur die Anschauung!

Nach den Sätzen 2.4.15 und 2.8.15 entspricht der Funktor $j^*: \text{Sh}(X; \text{Set}) \rightarrow \text{Sh}(U; \text{Set})$ dem Funktor

$$\begin{aligned} \text{étTop}_{/X} &\rightarrow \text{étTop}_{/U}, \\ (F \xrightarrow{p} X) &\mapsto (F|_U := p^{-1}(U) \rightarrow X). \end{aligned}$$

Dieser Funktor erhält (per direktem Beweis oder als Rechtsadjungierter nach Aufgabe 2.14.9) (endliche) Produkte und liefert somit nach 1.2.72 den Funktor

$$\text{Ab}(\text{étTop}_{/X}) \rightarrow \text{Ab}(\text{étTop}_{/U}),$$

welcher dem Funktor $j^*: \text{Sh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(U; \text{Ab})$ entspricht.

Zu zeigen ist, dass dieser einen Linksadjungierten hat. Sei $q: G \rightarrow U$ eine étale Abbildung und genauer ein Objekt von $\text{Ab}(\text{étTop}_{/U})$.

Sei $a(G)$ derjenige topologische Raum, der aus G durch Hinzufügen von trivialen Gruppen $\{0\}$ als Fasern über allen Punkten von $X \setminus U$ entsteht; formal sei $a(G)$ als Pushout durch das kokartesische Diagramm¹¹¹

$$\begin{array}{ccc} U & \subset & X \\ \downarrow 0 & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & a(G) \end{array}$$

in Top definiert, wobei 0 der Nullschnitt ist, der $u \in U$ auf das Nullelement der Faser $G(u) = q^{-1}(u)$ abbildet.¹¹²

Die stetigen Abbildungen q und id_X liefern per universeller Eigenschaft des Pushouts eine stetige Abbildung $a(G) \rightarrow X$.

Zu ergänzen bzw. dem Leser überlassen, anschaulich aber klar:

- Die Abbildung $a(G) \rightarrow X$ ist étale. Dies ist recht einfach, sobald man sich überzeugt, dass die beiden Abbildungen $X \rightarrow a(G)$ und $G \rightarrow a(G)$ offene Einbettungen sind.¹¹³
- Mache den étalen Raum $a(G)$ zu einem abelschen Gruppenobjekt, so dass die offensichtliche Abbildung $G \rightarrow a(G)|_U$ ein Isomorphismus von Gruppenobjekten ist. (Gibt es hier ein gutes abstraktes Argument? Vielleicht 2.5.4 verwenden?)

Auch im Rest des Beweises sind diverse Details zu ergänzen.

Sei $F \in \text{Ab}(\text{étTop}_{/X})$ ein Objekt. Jedem Morphismus $f: a(G) \rightarrow F$ können wir die Komposition $G \xrightarrow{\sim} a(G)|_U \xrightarrow{f|_U} F|_U$ zuordnen. Ist umgekehrt ein Morphismus $G \rightarrow F|_U$ gegeben, so verklebt er mit dem Nullschnitt $0 \rightarrow F$ zu einem Morphismus $a(G) \rightarrow F$. Diese Konstruktionen sind invers zueinander und definieren eine Bijektion

$$\text{Ab}(\text{étTop}_{/X})(a(G), F) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}(\text{étTop}_{/U})(G, F|_U)$$

¹¹¹Ich könnte statt X auch $X \times \{0\}$ schreiben, was eher nach dem étalen Raum der trivialen abelschen Garbe auf X aussieht.

¹¹²Im Sinne von [Sch20, Definition 2.8.52] ist $a(G)$ die Verklebung von G mit X entlang U .

¹¹³In privaten Notizen habe ich mir überlegt, dass $\text{étTop}_{/X} \subset \text{Top}_{/X}$ mit allen Kolimiten kommutiert. Da U , X und G étale über X sind, ist also auch $a(G)$ étale über X . Dies verwendet, dass der obige Pushout in Top auch ein Pushout in $\text{Top}_{/X}$ ist (nach der zu Aufgabe 1.2.20 dualen Aussage).

Nun muss man sich noch überzeugen, dass $G \mapsto a(G)$ ein Funktor ist und dass diese Bijektion natürlich in G und F ist. \square

Notation 2.14.3 (und Bemerkung). Gegeben eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ und eine Garbe $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ verwenden wir oft die Notation

$$\mathcal{F}_{U \subseteq X} := j_! j^* \mathcal{F},$$

wobei $j: U \hookrightarrow X$ die Einbettung ist. Wegen des Monomorphismus (2.14.2) fassen wir $\mathcal{F}_{U \subseteq X}$ meist als Untergarbe¹¹⁴ von \mathcal{F} auf.

Der étale Raum $\text{ét}(\mathcal{F}_{U \subseteq X})$ kann nach Proposition 2.9.12.(a).(v) mit einer offenen Teilmenge von $\text{ét} \mathcal{F}$ identifiziert werden. Diese besteht genau aus allen Halmen \mathcal{F}_u (alias Fasern von $\text{ét} \mathcal{F} \xrightarrow{p} X$) für $u \in U$ und den Nullelementen aller anderen Halme/Fasern über Punkten von $X \setminus U$, wie aus den Punkten (a) und (d) von Satz 2.14.1 folgt, in Formeln

$$\text{ét}(\mathcal{F}_{U \subseteq X}) = p^{-1}(U) \cup N = \left\{ s = (s(x))_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{F}_x \mid s(x) = 0 \text{ für alle } x \in X \setminus U \right\}$$

für $N \subseteq \text{ét}(\mathcal{F})$ den Nullschnitt.

Ist A eine abelsche Gruppe und A_X die zugehörige konstante Garbe abelscher Gruppen auf X , so vereinfachen wir die Notation zu

$$(2.14.4) \quad A_{U \subseteq X} := (A_X)_{U \subseteq X} = j_! j^* A_X \cong j_! A_U$$

Der zugehörige étale Raum über X ist

$$\text{ét}(A_{U \subseteq X}) = \{(x, a) \in X \times A \mid a = 0 \text{ falls } x \notin U\} = (U \times (A \setminus \{0\})) \sqcup (X \times \{0\})$$

mit der offensichtlichen Abbildung nach X .

Proposition 2.14.4. Sei $i: L \hookrightarrow X$ die Inklusion einer lokal abgeschlossenen beliebigen Teilmenge $L \subset X$. Dann gelten die beiden folgenden nach Aufgabe 1.1.40 äquivalenten Aussagen:

- $i_*: \text{Sh}(L; \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Ab})$ volltreu;
- für alle $\mathcal{G} \in \text{Sh}(L; \text{Ab})$ ist die Koeins $i^* i_* \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Isomorphismus.

Analoges gilt für Garben von Mengen.

Beweis. Wir zeigen, dass $i^* i_* \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Isomorphismus ist. Dies kann auf den Halmen bei allen $x \in L$ getestet werden.

- „Beweis“: Verwende Beispiel 2.8.13 und Korollar 2.8.9.
- Korrekter Beweis: Wir müssen zuerst die Koeins verstehen.

Wir überlegen uns dies zuerst für eine beliebige stetige Abbildung $f: Y \rightarrow X$ mit Hilfe des Beweises von Satz 2.8.5. Sei \mathcal{G} eine Garbe (von Mengen oder abelschen Gruppen) auf Y . Die Koeins $f^* f_* \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ kommt von einem Morphismus $f_{\text{PSh}}^* f_* \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ von Prägarben per universeller Eigenschaft der Garbifizierung. Letzterer ist auf $V \subseteq Y$ durch diejenige Abbildung

$$(2.14.5) \quad f_{\text{PSh}}^* f_* \mathcal{G}(V) = \text{colim}_{\tilde{U}: f(V) \subset \tilde{U} \subseteq X} f_* \mathcal{G}(\tilde{U}) = \text{colim}_{\tilde{U}: f(V) \subset \tilde{U} \subseteq X} \mathcal{G}(f^{-1}(\tilde{U})) \rightarrow \mathcal{G}(V)$$

gegeben, die durch die Restriktionsabbildungen $\mathcal{G}(f^{-1}(\tilde{U})) \rightarrow \mathcal{G}(V)$ induziert wird.

Nun zurück zum Fall der lokal abgeschlossenen Inklusion $i: L \hookrightarrow X$ und \mathcal{G} einer Garbe auf L . Für $V \subseteq L$ spezialisiert (2.14.5) zur Abbildung

$$(2.14.6) \quad i_{\text{PSh}}^* i_* \mathcal{G}(V) = \text{colim}_{\tilde{U}: V \subset \tilde{U} \subseteq X} \mathcal{G}(L \cap \tilde{U}) \rightarrow \mathcal{G}(V).$$

In der filtrierenden Indexkategorie (oder Indexmenge) des Kolimes bilden diejenigen \tilde{U} mit $L \cap \tilde{U} = V$ eine konfinale Unterkategorie, auf der $\tilde{U} \mapsto \mathcal{G}(L \cap \tilde{U}) = \mathcal{G}(V)$ konstant ist. Also ist (2.14.6) ein Isomorphismus. Ist nun $x \in L$ beliebig, so ist der induzierte Isomorphismus auf den Halmen

$$(i_{\text{PSh}}^* i_* \mathcal{G})_x = \text{colim}_V i_{\text{PSh}}^* i_* \mathcal{G}(V) \rightarrow \text{colim}_V \mathcal{G}(V) = \mathcal{G}_x$$

¹¹⁴Ein Unterobjekt eines Objekts einer Kategorie ist im Wesentlichen ein Monomorphismus in dieses Objekt. Genauer sind Unterobjekte als Äquivalenzklassen definiert, siehe [Wik20, Subobject].

als Kolimes von Isomorphismen ebenfalls ein Isomorphismus (da der Kolimes ein Funktor ist). Da Garbifizierung die Halme erhält, ist auch $(i^*i_*\mathcal{G})_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ ein Isomorphismus. Also ist die Koeins wie gewünscht ein Isomorphismus. \square

Proposition 2.14.5 (Kurze exakte Garbensequenz einer Offen-abgeschlossen-Zerlegung). *Seien X ein topologischer Raum, $U \subseteq X$ eine offene und $F \subseteq X$ eine abgeschlossene¹¹⁵ Teilmenge, die zueinander komplementär sind, d. h. $X = U \sqcup F$ als Menge. Seien $U \xrightarrow{j} X \xleftarrow{i} F$ die Inklusionen. Für jede Garbe $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ ist dann*

$$(2.14.7) \quad \underbrace{j_!j^*\mathcal{F}}_{=\mathcal{F}_{U \subseteq X}} \hookrightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_*i^*\mathcal{F}$$

eine kurze exakte Sequenz, wobei der linke Morphismus die Koeins der Adjunktion $(j_!, j^*)$ und der rechte die Eins der Adjunktion (i^*, i_*) sind.

Ausblick 2.14.6. Die kurze exakte Sequenz (2.14.7) liefert später (per eigentlichem Vorschub auf einen einpunktigen Raum) eine lange exakte Sequenz der Garbenkohomologie mit kompaktem Träger bezüglich der Offen-abgeschlossen-Zerlegung $X = U \sqcup F$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass

$$(j_!j^*\mathcal{F})_x \rightarrow \mathcal{F}_x \rightarrow i_*i^*\mathcal{F}_x$$

für beliebiges $x \in X$ eine kurze exakte Sequenz abelscher Gruppen ist. Wegen $X = U \sqcup F$ und Korollar (2.8.9) genügt es zu zeigen, dass die beiden Sequenzen

$$\begin{aligned} j^*j_!j^*\mathcal{F} &\rightarrow j^*\mathcal{F} \rightarrow j^*i_*i^*\mathcal{F} \\ i^*j_!j^*\mathcal{F} &\rightarrow i^*\mathcal{F} \rightarrow i^*i_*i^*\mathcal{F} \end{aligned}$$

kurz exakt sind.

In der ersten Sequenz ist aber der linke Morphismus ein Isomorphismus (siehe Satz 2.14.1.(d)) und das rechte Objekt ist das Nullobjekt (da j^*i_* der Nullfunktorkomposition ist, denn $(j^*i_*\mathcal{A})_x \cong (i_*\mathcal{A})_x = 0$ für alle $x \in X \setminus \overline{F} = X \setminus F = U$ nach Korollar (2.8.9) und Beispiel 2.8.13).

In der zweiten Sequenz ist das linke Objekt das Nullobjekt (siehe Satz 2.14.1.(a)) und der rechte Morphismus ist ein Isomorphismus: Nach einer Dreiecksidentität ist die Verknüpfung

$$i^*\mathcal{F} \rightarrow i^*i_*i^*\mathcal{F} \rightarrow i^*\mathcal{F}$$

die Identität und der zweite Morphismus ist als Koeins einer abgeschlossenen Einbettung ein Isomorphismus (siehe Proposition 2.14.4). \square

Aufgabe 2.14.7. Seien X ein topologischer Raum und $i: F \hookrightarrow X$ die Inklusion einer abgeschlossenen Teilmenge. Ist $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X; \text{Set})$ eine Garbe von Mengen auf X , so ist die Eins $\mathcal{F} \rightarrow i_*i^*\mathcal{F}$ ein Epimorphismus.

Hinweis: Variiere einige der Argumente aus dem Beweis von Proposition 2.14.5.

Besser wäre es vielleicht, die Eins $\mathcal{F} \rightarrow f_*f^*\mathcal{F}$ für beliebiges f irgendwo explizit zu beschreiben und dies dann hier und im Beweis der Proposition zu verwenden.

Bemerkung: Ist i die Inklusion einer beliebigen Teilmenge, so ist die Eins kein Epimorphismus: Nimm etwa die Inklusion $U = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ und $\mathcal{F} = \mathbb{Z}_{U \subseteq X}$.

Aufgabe 2.14.8. Sei $i: T \hookrightarrow X$ die Inklusion einer Teilmenge eines topologischen Raums.

(a) Sei $\mathcal{G} \in \text{Sh}(T, \text{Ab})$ eine Garbe abelscher Gruppen auf T . Für jedes $V \subseteq X$ ist

$$(i_?\mathcal{G})(V) := \{s \in \mathcal{G}(T \cap V) \mid \text{Supp}(s) \subseteq V\}$$

eine abelsche Untergruppe von $\mathcal{G}(T \cap V)$ und die Zuordnung $V \mapsto i_?\mathcal{G}(V)$ definiert mit den von \mathcal{G} induzierten (wohldefinierten!) Restriktionsabbildungen eine Garbe $i_?\mathcal{G} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$.

Definiert man $i_?\varphi$ in offensichtlicher Weise für Morphismen φ von Garben auf T , so wird $i_?: \text{Sh}(T, \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(X, \text{Ab})$ ein Funktor.

¹¹⁵Der Buchstabe F wird in diesem Kontext oft verwendet wegen *fermé* für *abgeschlossen* im Französischen.

- (b) Ist $j: U \hookrightarrow X$ die Inklusion einer offenen Teilmenge, so sind die beiden Funktoren $j_?$ und $j_!$ isomorph (vermöge der naheliegenden natürlichen (Iso-)Transformation).

Bemerkung: Dies liefert eine konkrete Beschreibung der Garbifizierung im algebraischen Beweis von Satz 2.14.1.

Bemerkung: Der Funktor $i_?$ wird normalerweise als $i_!$ notiert. Die hier gewählte ad hoc Notation dient nur der Unterscheidung von $i_!$ für offenes T , die aber nach (b) vernachlässigbar ist.

Aufgabe 2.14.9. Sei $f: Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung.

- (a) Die beiden Zuordnungen „Verknüpfung mit f “

$$f \circ -: \text{Top}/Y \rightarrow \text{Top}/X,$$

$$(F \xrightarrow{q} Y) \mapsto (F \xrightarrow{f \circ q} X),$$

und „Pullback entlang f “

$$Y \times_X -: \text{Top}/X \rightarrow \text{Top}/Y,$$

$$(E \xrightarrow{p} X) \mapsto (Y \times_X E \xrightarrow{\text{pr}_Y} Y),$$

auf Objektebene lassen sich in offensichtlicher Weise zu Funktoren ausweiten.

- (b) Offensichtliche Eins und Koeins machen $(f \circ, Y \times_X -)$ zu einem Paar adjungierter Funktoren; ein Bild dazu:

$$\text{Top}/Y \begin{array}{c} \xrightarrow{f \circ} \\ \xleftarrow{Y \times_X -} \end{array} \text{Top}/X$$

- (c) Ist f étale, so restringiert diese Adjunktion zu einer Adjunktion

$$\text{étTop}/Y \begin{array}{c} \xrightarrow{f \circ} \\ \xleftarrow{Y \times_X -} \end{array} \text{étTop}/X$$

Hinweis: Trivial nach [Sch20, Aufgabe 4.1.16].

Bemerkung: Mit den Sätzen 2.4.15 und 2.8.15 kann man diese Adjunktion als Adjunktion

$$\text{Sh}(Y; \text{Set}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{f^*} \end{array} \text{Sh}(X; \text{Set})$$

interpretieren. Ist $f = j: U \hookrightarrow X$ eine offene Einbettung, so ist der obere Funktor das Analogon von $j_!$ für Garben von Mengen, die **Ausdehnung durch die leere Menge** (mit minimalem Mehraufwand folgert man, dass Satz 2.14.1 sinngemäß auch für Garben von Mengen gilt). Man kann dies natürlich auch ohne explizite Verwendung étaler Räume beweisen.

Ende der 16. Vorlesung am 17.06.2021.

Hausaufgaben:

- (1)
 - Aufgabe 2.11.5: Elementares zu Morphismen in präabelscher Kategorie
 - Aufgabe 2.11.9: Exaktheit
- (2) Aufgabe 2.14.7: Koeins für Inklusion abgeschlossener Teilmenge ist Epimorphismus
- (3) Aufgabe 2.14.8: $j_!$ per Trägerbedingung
- (4) Aufgabe 2.14.9: Ausdehnung durch leere Menge
- (5) Bonus: (Aussagen werden im Rest der Vorlesung wohl ohne Kommentar verwendet.) **Drei der ursprünglichen Bonus-Aufgaben wurden eine Woche nach hinten verschoben.**
 - Aufgabe 2.11.10: „Dreier-Lemma“
 - Aufgabe 2.11.14: Links-/rechtsexakte Funktoren erhalten Nullobjekt

2.15. Garben abelscher Gruppen als Grothendieck-Kategorie.

2.15.1. Unser Ziel ist der strukturell wichtige Satz 2.15.6, dass $\text{Sh}(X; \text{Ab})$ eine Grothendieck-Kategorie im Sinne der folgenden Definition 2.15.2 ist.

Definition 2.15.2 (vgl. [KS06, Definition 8.3.24]¹¹⁶ oder [Sta18, 079A]). Eine **Grothendieck-Kategorie** (oft auch **Grothendieck abelsche Kategorie**) ist eine Kategorie \mathcal{A} mit den folgenden Eigenschaften:

- Sie ist abelsch.
Hätte wohl irgendwo mal erwähnen sollen (oder steht das schon da?): In jeder abelschen Kategorie haben je zwei parallele Morphismen $f, g: X \rightarrow Y$ einen Egalisator und einen Koegalisateur: Betrachte $\ker(f - g)$ und $\text{cok}(f - g)$.
- Sie hat beliebige Koprodukte alias direkte Summen (und somit beliebige Kolimiten, da sie Koegalisatoren hat; dies folgt aus der dualen Aussage zu Aufgabe 1.2.12).
- Filtrierende Kolimiten sind exakt.
- Es gibt ein Objekt $G \in \mathcal{A}$, so dass der Funktor

$$\mathcal{A}(G, -): \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$$

treu ist.¹¹⁷ Ein solches Objekt G heißt **Erzeuger von \mathcal{A}** (vgl. [KS06, Items (i) und (ii) auf Seite 185]¹¹⁸).

Ausblick 2.15.3. Die Information, dass eine Kategorie eine Grothendieck-Kategorie ist, hat viele wichtige Konsequenzen (vgl. auch [Wik20, Grothendieck category]): Beispielsweise hat jede Grothendieck-Kategorie automatisch beliebige Produkte (und folglich, da Egalisatoren existieren, beliebige Limiten, siehe Aufgabe 1.2.12) und genug injektive Objekte [Sta18, 07D8, 079H]. Erwähnenswert ist auch der Satz von Gabriel-Popescu [Sta18, 0F5U], [Wik20, Gabriel–Popescu theorem].

Beispiel 2.15.4. Proposition 1.2.61 zeigt, dass die Kategorie Ab der abelschen Gruppen und etwas allgemeiner die Kategorie $\text{Mod}(R)$ der Moduln über einem Ring R Grothendieck-Kategorien sind (der naheliegende Erzeuger ist \mathbb{Z} bzw. R , die anderen Eigenschaften sind mittlerweile wohlbekannt).

2.15.5. Sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und betrachte die Garbe $\mathbb{Z}_{U \subseteq X} \cong j_! \mathbb{Z}_U$ (siehe (2.14.4)), wobei $j: U \hookrightarrow X$ die Inklusion ist. Sei $1_U \in \mathbb{Z}_{U \subseteq X}(U) = \mathbb{Z}_X(U)$ die konstante Funktion $u \mapsto 1$. Ist $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ beliebig, so behaupten wir, dass die folgende Abbildung eine (in \mathcal{F} natürliche) Bijektion

$$(2.15.1) \quad \begin{aligned} \text{Sh}(\mathbb{Z}_{U \subseteq X}, \mathcal{F}) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(U), \\ \varphi &\mapsto \varphi_U(1_U), \end{aligned}$$

ist. Dies überlegt man sich leicht direkt¹¹⁹, wir geben aber spaßeshalber eine formale Begründung:¹²⁰ Die Adjunktionen $(j_!, j^*)$ und $((-)_U, \Gamma(U; -))$ (alias (c^*, c_*) für $c: U \rightarrow \{*\}$) und offensichtliche Isomorphismen liefern Bijektionen

$$\begin{aligned} \text{Sh}_{X, \text{Ab}}(\mathbb{Z}_{U \subseteq X}, \mathcal{F}) &\cong \text{Sh}_{X, \text{Ab}}(j_! \mathbb{Z}_U, \mathcal{F}) \cong \text{Sh}_{U, \text{Ab}}(\mathbb{Z}_U, j^* \mathcal{F}) \cong \text{Sh}_{U, \text{Ab}}(\mathbb{Z}_U, \mathcal{F}|_U) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Ab}(\mathbb{Z}, \Gamma(U; \mathcal{F})) \xrightarrow[\sim]{\alpha^+ \rightarrow \alpha(1)} \Gamma(U; \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U). \end{aligned}$$

Die Verknüpfung ist die oben explizit behauptete Bijektion.¹²¹

Satz 2.15.6. Die Kategorie $\text{Sh}(X; \text{Ab})$ der Garben abelscher Gruppen auf einem beliebigen topologischen Raum X ist eine Grothendieck-Kategorie.

¹¹⁶Hier ist die Definition genauer mit Hilfe von Universen formuliert.

¹¹⁷Zu zeigen ist also, dass für beliebige Objekte $A, B \in \mathcal{A}$ die Abbildung, die einen Morphismus $f: A \rightarrow B$ auf $f \circ -: \mathcal{A}(G, A) \rightarrow \mathcal{A}(G, B)$ abbildet, injektiv ist. Da diese Abbildung ein Morphismus abelscher Gruppen ist, reicht es zu zeigen, dass aus $f \circ = 0$ bereits $f = 0$ folgt.

¹¹⁸Es ist eine gute Übung, sich zu überlegen, dass diese Definition eines Erzeugers mit der in [Sta18, 079A] übereinstimmt.

¹¹⁹Äquivalent zeige man die anschaulich plausible Behauptung, dass jeder Morphismus $U \times \mathbb{Z} \rightarrow \text{ét}(\mathcal{F})$ in $\text{Ab}(\text{étTop}/_X)$ eindeutig durch seine Einschränkung auf $U \times \{1\}$ bestimmt und definierbar ist.

¹²⁰Eine weitere formale Begründung wird am Ende von 2.15.8 gegeben.

¹²¹Eigentlich brauchen wir im Beweis von Satz 2.15.6 nur irgendeine in \mathcal{F} natürliche Bijektion $\text{Sh}(\mathbb{Z}_{U \subseteq X}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(U)$, die explizite Beschreibung kann uns egal sein.

Beweis. Da die restlichen Aussagen bekannt sind (siehe Satz 2.12.14), bleibt zu zeigen, dass filtrierende Kolimiten exakt sind und dass es einen Erzeuger gibt.

Existenz eines Erzeugers: Wir behaupten, dass

$$G := \bigoplus_{U \in X} \mathbb{Z}_{U \in X}$$

ein Erzeuger von $\text{Sh}(X; \text{Ab})$ ist, dass also $\text{Sh}(G, -)$ ein treuer Funktor ist. Natürlich in Garben $\mathcal{E} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ haben wir Bijektionen

$$\text{Sh}(G, \mathcal{E}) = \text{Sh}\left(\bigoplus_{U \in X} \mathbb{Z}_{U \in X}, \mathcal{E}\right) \cong \prod_{U \in X} \text{Sh}(\mathbb{Z}_{U \in X}, \mathcal{E}) \xrightarrow[\sim]{(2.15.1)} \prod_{U \in X} \mathcal{E}(U).$$

Ist $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ ein Morphismus, so entspricht die induzierte Abbildung $\text{Sh}(G, \varphi) = \varphi \circ: \text{Sh}(G, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Sh}(G, \mathcal{F})$ modulo dieser Bijektionen der Abbildung

$$\prod_{U \in X} \varphi(U): \prod_{U \in X} \mathcal{E}(U) \rightarrow \prod_{U \in X} \mathcal{F}(U),$$

$$(s_U)_U \mapsto (\varphi(U)(s_U))_U.$$

Da jedes $\mathcal{E}(U)$ als abelsche Gruppe nicht leer ist, ist $\varphi = (\varphi(U))_U$ durch diese Abbildung (alias $\text{Sh}(G, \varphi) = \varphi \circ$) eindeutig bestimmt (betrachte links ein Tupel, dessen V -Komponente ein gegebenes Element $t \in \mathcal{E}(V)$ ist und dessen andere Komponenten Null sind). Also ist $\text{Sh}(G, -)$ treu.

Filtrierende Kolimiten sind exakt: Seien \mathcal{I} eine filtrierende Indexkategorie und $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein (in der Mitte) exaktes Diagramm in $\text{Sh}(X; \text{Ab})^{\mathcal{I}}$. Zu zeigen ist, dass

$$\text{colim}_i \mathcal{E}(i) \rightarrow \text{colim}_i \mathcal{F}(i) \rightarrow \text{colim}_i \mathcal{G}(i)$$

exakt ist. Nach Satz 2.12.14 genügt es zu zeigen, dass für jedes $x \in X$ die Sequenz

$$(\text{colim}_i \mathcal{E}(i))_x \rightarrow (\text{colim}_i \mathcal{F}(i))_x \rightarrow (\text{colim}_i \mathcal{G}(i))_x$$

abelscher Gruppen exakt ist. Da der Halm eines Kolimes der Kolimes der Halme ist (wieder Satz 2.12.14) ist äquivalent zu zeigen, dass

$$\text{colim}_i \mathcal{E}(i)_x \rightarrow \text{colim}_i \mathcal{F}(i)_x \rightarrow \text{colim}_i \mathcal{G}(i)_x$$

exakt ist. Dies folgt aber aus Proposition 1.2.61, da für jedes $i \in \mathcal{I}$ die Sequenz $\mathcal{E}(i) \rightarrow \mathcal{F}(i) \rightarrow \mathcal{G}(i)$ nach Annahme exakt ist und dies dann wieder nach Satz 2.12.14 auch für jede Halm-Sequenz $\mathcal{E}(i)_x \rightarrow \mathcal{F}(i)_x \rightarrow \mathcal{G}(i)_x$ gilt.

Wer Diagramme mag, versteht den gerade gegebenen Beweis vielleicht besser mit dem folgenden kommutativen¹²² Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Sh}(X; \text{Ab})^{\mathcal{I}} & \xrightarrow{\text{colim}_{\mathcal{I}}} & \text{Sh}(X; \text{Ab}) \\ \downarrow (-)_x \circ & & \downarrow (-)_x \\ \text{Ab}^{\mathcal{I}} & \xrightarrow{\text{colim}_{\mathcal{I}}} & \text{Ab} \end{array}$$

□

2.15.7 (Induzierte Adjunktion auf Funktorkategorien). Sei $(L, R, \eta, \varepsilon)$ eine Adjunktion zwischen Funktoren $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[R]{L} \mathcal{D}$. Ist \mathcal{I} eine beliebige Kategorie, so erhalten wir eine induzierte Adjunktion $(L \circ, R \circ, \eta \circ, \varepsilon \circ)$ zwischen den offensichtlichen Funktoren $\mathcal{C}^{\mathcal{I}} \xrightleftharpoons[R \circ]{L \circ} \mathcal{D}^{\mathcal{I}}$, wie sich der Leser leicht überlegt (vgl. [Sch21, Lemma A.0.22] samt der dortigen Fußnote). Bei *abuse of notation* schreiben wir abkürzend $R = R \circ$ und $L = L \circ$.

¹²²Ganz genau ist es nur kommutativ bis auf den eindeutigen Isomorphismus „Kolimes der Halme \cong Halm des Kolimes“.

2.15.8 (Freie Abelsche-Gruppen-Garbe über Mengen-Garbe). Wenden wir 2.15.7 auf die Adjunktion (\mathbb{Z}, V) zwischen dem Funktor Freie-abelsche-Gruppe $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}(-): \text{Set} \rightarrow \text{Ab}$ und dem Vergissfunktors $V: \text{Ab} \rightarrow \text{Set}$ an und nehmen $\text{Open}(X)^{\text{op}}$ als Indexkategorie, wobei X ein topologischer Raum ist, so erhalten wir die Adjunktion (\mathbb{Z}, V) zwischen den Funktoren

$$\text{Set}^{\text{Open}(X)^{\text{op}}} = \text{PSh}(X; \text{Set}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{\text{PSh}}} \\ \xleftarrow{V = V^{\text{PSh}}} \end{array} \text{PSh}(X; \text{Ab}) = \text{Ab}^{\text{Open}(X)^{\text{op}}}$$

Der Vergissfunktors V^{PSh} bildet trivialerweise Garben auf Garben ab, der Funktor \mathbb{Z}^{PSh} aber nicht¹²³. Wir notieren die Restriktion von V^{PSh} als $V = V^{\text{Sh}}: \text{Sh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Set})$ und behaupten, dass

$$\mathbb{Z}^{\text{Sh}} := \natural \mathbb{Z}^{\text{PSh}} = \natural \circ \mathbb{Z}^{\text{PSh}}|_{\text{Sh}}: \text{Sh}(X; \text{Set}) \rightarrow \text{PSh}(X; \text{Ab}) \xrightarrow{\natural} \text{Sh}(X; \text{Ab})$$

linksadjungiert dazu ist. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} \text{Sh}_{X, \text{Ab}}(\mathbb{Z}^{\text{Sh}} \mathcal{S}, \mathcal{A}) &= \text{Sh}_{X, \text{Ab}}(\natural \mathbb{Z}^{\text{PSh}} \mathcal{S}, \mathcal{A}) \\ &\cong \text{PSh}_{X, \text{Ab}}(\mathbb{Z}^{\text{PSh}} \mathcal{S}, \mathcal{A}) \\ &\cong \text{PSh}_{X, \text{Set}}(\mathcal{S}, V \mathcal{A}) \\ &= \text{Sh}_{X, \text{Set}}(\mathcal{S}, V \mathcal{A}) \end{aligned}$$

natürlich in $\mathcal{S} \in \text{Sh}(X; \text{Set})$ und $\mathcal{A} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$.

Dies liefert einen weiteren Beweis der Behauptung in 2.15.5: Sei $U \Subset X$ und betrachte die dargestellte Garbe h_U . Dann ist der étale Raum von $\mathbb{Z}^{\text{PSh}} h_U$ kanonisch isomorph zu $U \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \sqcup (X \times \{0\}) \rightarrow X$. Folglich ist $\mathbb{Z}^{\text{Sh}} h_U$ kanonisch zu $\mathbb{Z}_{U \Subset X}$ isomorph (vgl. Ende von 2.14.3). Ist nun $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ beliebig, so erhalten wir Bijektionen

$$\text{Sh}_{\text{Ab}}(\mathbb{Z}_{U \Subset X}, \mathcal{F}) \cong \text{Sh}_{\text{Ab}}(\mathbb{Z}^{\text{Sh}} h_U, \mathcal{F}) \cong \text{Sh}_{\text{Set}}(h_U, V \mathcal{F}) \xrightarrow[\sim]{(2.2.3)} \mathcal{F}(U).$$

Die Verknüpfung ist genau die Abbildung (2.15.1), die somit bijektiv ist.

2.16. Tensorprodukt und Hom-Garbe.

2.16.1. Sind A, B, C abelsche Gruppen, so sind $A \otimes B = A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ und $\text{Hom}(B, C) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, C) := \text{Ab}(B, C)$ ebenfalls abelsche Gruppen und die offensichtliche Abbildung definiert eine Bijektion

$$\text{Ab}(A \otimes B, C) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}(A, \text{Hom}(B, C))$$

von Mengen und sogar von abelscher Gruppen, die in $A, B \in \text{Ab}^{\text{op}}$ und $C \in \text{Ab}$ natürlich ist. Für fixiertes B macht dies $(- \otimes B, \text{Hom}(B, -))$ zu einem adjungierten Paar von Funktoren.

Wir verallgemeinern diese Aussage nun von $\text{Ab} \cong \text{Sh}(\text{pt}, \text{Ab})$ auf $\text{Sh}(X; \text{Ab})$.

Wir arbeiten hier der Einfachheit halber nur mit Garben abelscher Gruppen. Ähnlich könnte man mit Garben von Moduln über einem Ring oder Garben von Moduln über einer Garbe von Ringen arbeiten. Es gilt die folgende Faustregel: Alle bekannten Konstruktionen mit Moduln über Ringen haben Entsprechungen für Garben.

Definition 2.16.2 (Tensorprodukt). Sei X ein topologischer Raum. Der Funktor

$$\begin{aligned} \otimes^{\text{PSh}} = \otimes_{\mathbb{Z}}^{\text{PSh}}: \text{PSh}(X; \text{Ab}) \times \text{PSh}(X; \text{Ab}) &\rightarrow \text{PSh}(X; \text{Ab}), \\ (\mathcal{A}, \mathcal{B}) &\mapsto \left(\mathcal{A} \otimes^{\text{PSh}} \mathcal{B}: U \mapsto (\mathcal{A} \otimes^{\text{PSh}} \mathcal{B})(U) := \mathcal{A}(U) \otimes \mathcal{B}(U) \right), \\ (\varphi, \psi) &\mapsto \varphi \otimes^{\text{PSh}} \psi := (\varphi_U \otimes \psi_U)_{U \Subset X}, \end{aligned}$$

¹²³Nimm etwa $X = \{1, 2\}$ mit der diskreten Topologie und sei $\mathcal{T} \in \text{Sh}(X; \text{Set})$ die terminale Garbe ($:=$ das terminale Objekt in $\text{Sh}(X; \text{Set})$), d. h. $\mathcal{T}(U) = *$ für alle $U \Subset X$. Dann ist $\mathbb{Z} \mathcal{T}$ keine Garbe abelscher Gruppen, denn $(\mathbb{Z} \mathcal{T})(U) = \mathbb{Z} * \cong \mathbb{Z}$ für alle $U \Subset X$.

(mit offensichtlichen Restriktionen $(\mathcal{A} \otimes^{\text{PSh}} \mathcal{B})(U) \rightarrow (\mathcal{A} \otimes^{\text{PSh}} \mathcal{B})(V)$ für $V \subseteq U \subseteq X$) heißt **Prägarbentensorprodukt von Prägarben**.

Seine Postkomposition mit Garbifizierung

$$\otimes = \otimes_{\mathbb{Z}} := \natural \circ \otimes^{\text{PSh}}: \text{PSh}(X; \text{Ab}) \times \text{PSh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Ab})$$

heißt **(Garben-)Tensorprodukt von Prägarben** und seine Einschränkung auf $\text{Sh}(X; \text{Ab}) \times \text{Sh}(X; \text{Ab})$ **(Garben-)Tensorprodukt von Garben**.

Meist werden \otimes^{PSh} und \otimes nur als **Tensorprodukt** bezeichnet.

Beispiel 2.16.3. Wir zeigen, dass das Prägarbentensorprodukt von Garben im Allgemeinen keine Garbe ist. Seien $U, V \subseteq X$ zwei zusammenhängende (insbesondere nichtleere), disjunkte offene Teilmengen eines topologischen Raums X . Dann gilt $\mathbb{Z}_{U \subseteq X} \otimes \mathbb{Z}_{V \subseteq X} = 0$, wie sofort aus Proposition 2.16.4 folgt, jedoch

$$(\mathbb{Z}_{U \subseteq X} \otimes^{\text{PSh}} \mathbb{Z}_{V \subseteq X})(U \cup V) = \mathbb{Z}_{U \subseteq X}(U \cup V) \otimes \mathbb{Z}_{V \subseteq X}(U \cup V) \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \neq 0.$$

Proposition 2.16.4 (Halm des Tensorprodukts). *Sei X ein topologischer Raum. Der Halm eines Tensorprodukts von Garben oder Prägarben ist das Tensorprodukt der Halme: Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{PSh}(X, \text{Ab})$ Prägarben abelscher Gruppen und $x \in X$ ein Punkt, so sind die offensichtlichen¹²⁴ Abbildungen*

$$(2.16.1) \quad (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_x \xleftarrow{\sim} (\mathcal{A} \otimes^{\text{PSh}} \mathcal{B})_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_x \otimes \mathcal{B}_x$$

Isomorphismen abelscher Gruppen und natürlich in \mathcal{A} und \mathcal{B} .

Insbesondere erhalten die Funktoren $\mathcal{A} \otimes -: \text{Sh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Ab})$ und $- \otimes \mathcal{B}$ alle Kolimiten und sind insbesondere rechtsexakt.

Beweis. Die folgenden Isomorphismen abelscher Gruppen werden sogleich erklärt.

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_x &\xleftarrow{\sim} (\mathcal{A} \otimes^{\text{PSh}} \mathcal{B})_x \\ &= \text{colim}_{U: x \in U \subseteq X} (\mathcal{A} \otimes^{\text{PSh}} \mathcal{B})(U) \\ &= \text{colim}_{U: x \in U \subseteq X} \mathcal{A}(U) \otimes \mathcal{B}(U) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{colim}_{(U, V): x \in U \subseteq X, x \in V \subseteq X} \mathcal{A}(U) \otimes \mathcal{B}(V) \\ &\cong \text{colim}_{U: x \in U \subseteq X} \text{colim}_{V: x \in V \subseteq X} \mathcal{A}(U) \otimes \mathcal{B}(V) \\ &\cong \text{colim}_{U: x \in U \subseteq X} \left(\mathcal{A}(U) \otimes \text{colim}_{V: x \in V \subseteq X} \mathcal{B}(V) \right) \\ &\cong \left(\text{colim}_{U: x \in U \subseteq X} \mathcal{A}(U) \right) \otimes \left(\text{colim}_{V: x \in V \subseteq X} \mathcal{B}(V) \right) \\ &= \mathcal{A}_x \otimes \mathcal{B}_x. \end{aligned}$$

Der erste Isomorphismus kommt daher, dass Garbifizierung die Halme nicht ändert. Der zweite Isomorphismus folgt aus Proposition 1.2.66, da die Kategorie offener Umgebungen U von x isomorph zur konfinalen, vollen Unterkategorie der „diagonalen“ Paare (U, U) offener Umgebungen von x in der Kategorie aller Paare (U, V) offener Umgebungen von x ist. Der dritte Isomorphismus ist das Analogon von Aufgabe 1.2.26 für Kolimiten. Die beiden nächsten Isomorphismen kommen daher, dass das Tensorprodukt mit einer fixierten abelschen Gruppe als Linksadjungierter mit Kolimiten vertauscht.

Offensichtlich ist die so erhaltene Bijektion $(\mathcal{A} \otimes^{\text{PSh}} \mathcal{B})_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_x \otimes \mathcal{B}_x$ die in der Fußnote 124 beschriebene.

Da $\mathcal{A}_x \otimes - \cong - \otimes \mathcal{A}_x: \text{Ab} \rightarrow \text{Ab}$ als Linksadjungierter alle Kolimiten erhält, überträgt sich dies auf $\mathcal{A} \otimes -$ nach Satz 2.12.14. \square

Proposition 2.16.5. *Sei X ein topologischer Raum. Die offensichtlichen Morphismen sind Isomorphismen*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \otimes \mathbb{Z}_X &\xleftarrow{\sim} \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X \otimes \mathcal{A}, \\ \mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}) &\xrightarrow{\sim} (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C}, \\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \end{aligned}$$

¹²⁴ Die erste ist von Garbifizierung induziert. Die zweite ist induziert vom Tensorprodukt der Abbildungen $\mathcal{A}(U) \rightarrow \mathcal{A}_x$ und $\mathcal{B}(U) \rightarrow \mathcal{B}_x$, wobei U die offenen Umgebungen von x durchläuft.

von Garben abelscher Gruppen, die natürlich in allen Argumenten sind.¹²⁵

Beweis. Die Familie der Isomorphismen $\mathcal{A}(U) \rightarrow \mathbb{Z}_X(U) \otimes \mathcal{A}(U)$, $a \mapsto 1 \otimes a$, für $U \Subset X$, definiert einen Isomorphismus $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}_X \otimes^{\text{PSh}} \mathcal{A}$ von Prägarben. Die Verknüpfung $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}_X \otimes^{\text{PSh}} \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}_X \otimes \mathcal{A}$ mit dem Morphismus in die Garbifizierung ist der in der Proposition gemeinte Morphismus. Er induziert auf allen Halmen einen Isomorphismus, wie man sofort aus Proposition 2.16.4 folgert, und ist somit selbst ein Isomorphismus.

Die Konstruktion der übrigen Morphismen samt des Beweises, dass sie Isomorphismen sind, ist dem Leser überlassen. Für den Isomorphismus in der mittleren Zeile überlege man sich etwa zunächst, dass der kanonische Morphismus von der Garbifizierung von $\mathcal{A} \otimes^{\text{PSh}} (\mathcal{B} \otimes^{\text{PSh}} \mathcal{C})$ nach $\mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$ ein Isomorphismus ist (letzteres ist a priori als zweimalige Garbifizierung definiert!), vgl. das Argument im Beweis von Proposition 2.16.6. \square

Ende der 17. Vorlesung am 22.06.2021.

Proposition 2.16.6 (Verträglichkeit von Pullback und Tensorprodukt). *Sei $f: Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Dann gilt*

$$(2.16.2) \quad f^*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} f^*\mathcal{A} \otimes f^*\mathcal{B}$$

natürlich in Garben (oder Prägarben) \mathcal{A}, \mathcal{B} abelscher Gruppen auf X unter dem im Beweis erklärten Isomorphismus.

2.16.7. Plausibel ist das, denn der Halm beider Seiten bei $y \in Y$ ist zu $\mathcal{A}_{f(y)} \otimes \mathcal{B}_{f(y)}$ isomorph (nach Korollar 2.8.9 und Proposition 2.16.4). (Dies ist aber kein Beweis: Weder haben wir einen Morphismus (2.16.2) konstruiert noch gezeigt, dass er auf allen Halmen einen Isomorphismus induziert.)

Beweis. Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} Prägarben abelscher Gruppen auf X . Zunächst konstruieren wir einen Isomorphismus

$$\alpha: f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{A} \otimes^{\text{PSh}} \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} f_{\text{PSh}}^*\mathcal{A} \otimes^{\text{PSh}} f_{\text{PSh}}^*\mathcal{B}.$$

Für jede offene Menge $V \Subset Y$ sei α_V die folgende Verknüpfung hoffentlich offensichtlicher Isomorphismen (Isomorphismus der Indexkategorie; „diagonale“ Unterkategorie konfinal, Kolimes über Produktkategorie ist „zeilenweiser“ Kolimes der „spaltenweisen“ Kolimiten; zweimal \otimes vertauscht mit Kolimiten).

$$\begin{aligned} \alpha_V: f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{A} \otimes^{\text{PSh}} \mathcal{B})(V) &= \operatorname{colim}_{U: f(V) \subset U \Subset X} \mathcal{A}(U) \otimes \mathcal{B}(U) \xrightarrow{\sim} \operatorname{colim}_{(U,U'): f(V) \subset U \Subset X} \mathcal{A}(U) \otimes \mathcal{B}(U) \\ &\xrightarrow{\sim} \operatorname{colim}_{(U,U'): f(V) \subset U \Subset X, f(V) \subset U' \Subset X} \mathcal{A}(U) \otimes \mathcal{B}(U') \xrightarrow{\sim} \operatorname{colim}_{U: f(V) \subset U \Subset X} \operatorname{colim}_{U': f(V) \subset U' \Subset X} \mathcal{A}(U) \otimes \mathcal{B}(U') \\ &\xrightarrow{\sim} \operatorname{colim}_{U: f(V) \subset U \Subset X} \mathcal{A}(U) \otimes \left(\operatorname{colim}_{U': f(V) \subset U' \Subset X} \mathcal{B}(U') \right) \\ &\xrightarrow{\sim} \left(\operatorname{colim}_{U: f(V) \subset U \Subset X} \mathcal{A}(U) \right) \otimes \left(\operatorname{colim}_{U': f(V) \subset U' \Subset X} \mathcal{B}(U') \right) = (f_{\text{PSh}}^*\mathcal{A} \otimes^{\text{PSh}} f_{\text{PSh}}^*\mathcal{B})(V). \end{aligned}$$

Die α_V sind kompatibel mit Restriktionen zu offenen Teilmengen und definieren so den Isomorphismus α .

Nun betrachte das folgende kommutative Diagramm, in dem alle mit η markierten Morphismen Instanzen der kanonischen Morphismen $\eta = \eta_{\mathcal{F}}: \mathcal{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ einer Prägarbe \mathcal{F} in ihre Garbifizierung \mathfrak{F} sind.

$$\begin{array}{ccccc} f^*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) & \xleftarrow{\exists! \varphi} & f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) & \xrightarrow[\sim]{\exists! \alpha} & f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{A}) \otimes f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\exists! \psi} & f^*(\mathcal{A}) \otimes f^*(\mathcal{B}) \\ \uparrow \eta & & \uparrow \eta & & \uparrow \eta & & \uparrow \eta \\ f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) & & & & & & f^*(\mathcal{A}) \otimes^{\text{PSh}} f^*(\mathcal{B}) \\ \uparrow f_{\text{PSh}}^*(\eta) & & & & & & \uparrow \eta \otimes^{\text{PSh}} \eta \\ f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{A} \otimes^{\text{PSh}} \mathcal{B}) & = & f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{A} \otimes^{\text{PSh}} \mathcal{B}) & \xrightarrow[\sim]{\alpha} & f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{A}) \otimes^{\text{PSh}} f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{B}) & = & f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{A}) \otimes^{\text{PSh}} f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{B}) \end{array}$$

¹²⁵Leicht folgert man, dass der Funktor \otimes , das Objekt \mathbb{Z}_X und die ersten drei obigen Isomorphismen die Kategorie $\text{Sh}(X; \text{Ab})$ zu einer *monoidalen Kategorie* machen, vgl. [Wik20, Monoidal category]. Das einfachste Beispiel einer solchen Kategorie ist die Kategorie der Mengen mit dem kartesischen Produkt. Ebenso ist die Kategorie der abelschen Gruppen mit $\otimes_{\mathbb{Z}}$ monoidal.

Die beiden gepunkteten Morphismen, die die jeweiligen Rechtecke kommutativ machen, existieren jeweils eindeutig nach der universellen Eigenschaft der Garbifizierung.

Wir behaupten nun, dass φ und ψ Isomorphismen sind, was in Worten bedeutet, dass die zwei Objekte in den oberen Ecken auch per einmaliger Garbifizierung definiert werden könnten (bis aus Isomorphie).¹²⁶

Ist diese Behauptung gezeigt, so können wir (2.16.2) := $\psi \circ \alpha \circ \varphi^{-1}$ definieren (was offensichtlich natürlich in \mathcal{A} und \mathcal{B} ist) und sind fertig.

Um zu testen, dass die Morphismen φ und ψ von Garben Isomorphismen sind, genügt es zu zeigen, dass sie auf den Halmen bei allen $y \in Y$ Bijektionen induzieren. Da alle Abbildungen η halmweise Isomorphismen sind und da die Isomorphismen (2.8.4) und (2.16.1) natürlich sind, folgt dies aber aus den kommutativen Diagrammen

$$\begin{array}{ccc}
 & (f^*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}))_y & \xleftarrow{\varphi_y} & (f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}))_y \\
 & \uparrow \eta_y \sim & & \uparrow \eta_y \sim \\
 (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{f(y)} & \xleftarrow[\sim]{(2.8.4)} & (f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}))_y & \\
 \uparrow \eta_{f(y)} \sim & & \uparrow (f_{\text{PSh}}^*(\eta))_y & \\
 (\mathcal{A} \otimes^{\text{PSh}} \mathcal{B})_{f(y)} & \xleftarrow[\sim]{(2.8.4)} & (f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{A} \otimes^{\text{PSh}} \mathcal{B}))_y & = & (f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{A} \otimes^{\text{PSh}} \mathcal{B}))_y
 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc}
 (f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{A}) \otimes f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{B}))_y & \xrightarrow{\psi_y} & (f^*(\mathcal{A}) \otimes f^*(\mathcal{B}))_y \\
 \uparrow \eta_y \sim & & \uparrow \eta_y \sim \\
 (f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{A}) \otimes^{\text{PSh}} f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{B}))_y & & (f^*(\mathcal{A}) \otimes^{\text{PSh}} f^*(\mathcal{B}))_y \xrightarrow[\sim]{(2.16.1)} f^*(\mathcal{A})_y \otimes f^*(\mathcal{B})_y \\
 & \uparrow (\eta \otimes^{\text{PSh}} \eta)_y & \uparrow \eta_y \otimes \eta_y \sim \\
 (f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{A}) \otimes^{\text{PSh}} f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{B}))_y & = & (f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{A}) \otimes^{\text{PSh}} f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{B}))_y \xrightarrow[\sim]{(2.16.1)} f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{A})_y \otimes f_{\text{PSh}}^*(\mathcal{B})_y.
 \end{array}$$

□

Definition 2.16.8 (Hom-Garbe). Sei X ein topologischer Raum. Der Funktor

$$\mathcal{H}om = \mathcal{H}om_{\mathbb{Z}}: \text{PSh}(X; \text{Ab})^{\text{op}} \times \text{PSh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{PSh}(X; \text{Ab}),$$

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \mapsto \left(\mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{B}): U \mapsto \mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{B})(U) := \text{PSh}_{U, \text{Ab}}(\mathcal{A}|_U, \mathcal{B}|_U), \right.$$

(mit offensichtlichen Restriktionen $\mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{B})(U) \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{B})(V)$ für $V \subseteq U \subseteq X$ und offensichtlicher Definition auf Morphismen) heißt **Funktor der lokalen (Homo-)Morphismen (von Prägarben)** oder salopp **Hom-Funktor** oder **lokales Hom** oder **Prägarben-Hom**. Ich nenne $\mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gerne die **Hom-Prägarbe**.

Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ Garben abelscher Gruppen, so ist die Hom-Prägarbe $\mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ bereits eine Garbe (siehe Aufgabe 2.16.9) und wird als **Hom-Garbe** bezeichnet. Der induzierte Funktor

$$\mathcal{H}om = \mathcal{H}om_X = \mathcal{H}om_{\mathbb{Z}}: \text{Sh}(X; \text{Ab})^{\text{op}} \times \text{Sh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Ab})$$

heißt **Funktor der lokalen (Homo-)Morphismen (von Garben)** oder salopp **Hom-Funktor** oder **lokales Hom** oder **Garben-Hom**.

Aufgabe 2.16.9. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$. Dann ist die Hom-Prägarbe $\mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ eine Garbe.

2.16.10. In dieser Bemerkung sind \mathcal{A} und \mathcal{B} wohl als Garben angenommen. Per Definition gilt $\Gamma(\mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{B})) = \text{PSh}_{X, \text{Ab}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ oder genauer $\Gamma \circ \mathcal{H}om = \text{Sh}_{X, \text{Ab}}$ als Funktoren, was die Terminologie *lokale* Homomorphismen erklärt.

(Die Notation $\text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \text{Sh}_{X, \text{Ab}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ist weit verbreitet. Dann schreibt sich Obiges suggestiver als $\Gamma(\mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{B})) = \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ bzw. $\Gamma \circ \mathcal{H}om = \text{Hom}$.)¹²⁷

¹²⁶Diese Behauptung mag man alternativ zum unten angegebenen Beweis auch aus (2.6.3) folgern.

¹²⁷Soll ich statt der Notation $\mathcal{H}om$ die Notation $\mathcal{S}h$ oder $\mathcal{S}h_{\text{Ab}}$ verwenden, oder gar $\mathcal{A}b$ oder $\mathcal{M}od$?

Aufgabe 2.16.11. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ Garben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X und sei $x \in X$. Dann induzieren die Abbildungen $\text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})(U) \rightarrow \text{Ab}(\mathcal{A}_x, \mathcal{B}_x)$, $\varphi \mapsto \varphi_x$ einen Morphismus

$$\text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})_x \rightarrow \text{Ab}(\mathcal{A}_x, \mathcal{B}_x)$$

abelscher Gruppen. **Warnung:** Notiert man den Keim von φ wie oben bei x als φ_x , so wird diese Abbildung als $\varphi_x \mapsto \varphi_x$ geschrieben, scheint also die Identität zu sein. Jedoch haben φ_x links und rechts zwei verschiedene Bedeutungen! (Wie kann man diesen (in der Literatur weitverbreiteten) Notationskonflikt sinnvoll auflösen? - Da ich gerne den Halm als Funktor $(-)_x$ schreiben will, sollte man wohl die Abbildung $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$ nicht per $s \mapsto s_x$ sondern anders notieren; vielleicht als $s \mapsto s^x$ oder als $s \mapsto \text{in}_x(s)$ oder gar als $s \mapsto \text{Germ}_x(s)$? Dann wird die obige Abbildung als $\text{Germ}_x(\varphi) \mapsto \varphi_x$ notiert.)

Dieser ist im Allgemeinen weder bijektiv noch injektiv noch surjektiv. Finde Beispiele, in denen er injektiv, aber nicht surjektiv bzw. surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Hinweis: Betrachte auf $X = \mathbb{R}$ die konstante Garbe \mathbb{Z}_X , den Wolkenkraterzer $\mathbb{Z}_{(x)}$ bei $x = 0$ und die Ausdehnung durch Null $\mathbb{Z}_{U \subset X}$ für $U = X \setminus \{0\}$.

Satz 2.16.12. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ Garben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X . Dann gibt es einen kanonischen, im Beweis explizit beschriebenen Isomorphismus

$$(2.16.3) \quad \text{Sh}_{\text{Ab}}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \text{Sh}_{\text{Ab}}(\mathcal{A}, \text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C}))$$

abelscher Gruppen, der natürlich in $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})^{\text{op}}$ und $\mathcal{C} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ ist.

Tensor-Hom-Adjunktion: Insbesondere sind für fixiertes \mathcal{B} die beiden Funktoren

$$\begin{array}{ccc} & - \otimes \mathcal{B} & \\ \text{Sh}(X; \text{Ab}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} & \text{Sh}(X; \text{Ab}) \\ & \text{Hom}(\mathcal{B}, -) & \end{array}$$

vermöge der Bijektionen (2.16.3) adjungiert.

Weiter gelten:

- Der Funktor $\text{Hom}(\mathcal{B}, -): \text{Sh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Ab})$ erhält als Rechtsadjungierter alle Limiten und ist insbesondere linksexakt.¹²⁸
- Der Funktor $\text{Hom}(-, \mathcal{C}): \text{Sh}(X; \text{Ab})^{\text{op}} \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Ab})$ erhält alle Limiten und ist insbesondere links-exakt. (Kolimiten bzw. Kokerne in $\text{Sh}(X; \text{Ab})$ werden also auf Limiten bzw. Kerne abgebildet.)

Beweis. Für (2.16.3) genügt es wegen der Adjunktion (\natural, ι) alias der universellen Eigenschaft des Garbifizierung, natürliche Isomorphismen

$$(2.16.4) \quad \text{PSh}_{\text{Ab}}(\mathcal{A} \otimes^{\text{PSh}} \mathcal{B}, \mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \text{PSh}_{\text{Ab}}(\mathcal{A}, \text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C}))$$

zu etablieren, was wir sogar für alle Prägarben $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ abelscher Gruppen behaupten.

Für alle $U \Subset X$ sind die offensichtlichen Abbildungen Bijektionen (vielleicht leichter verständlich mit der Notation $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}$ statt Ab ?)

$$\text{Ab}(\mathcal{A}(U) \otimes \mathcal{B}(U), \mathcal{C}(U)) \xrightarrow{\sim} \text{Bilin}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}(U), \mathcal{B}(U); \mathcal{C}(U)) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}(\mathcal{A}(U), \text{Ab}(\mathcal{B}(U), \mathcal{C}(U))).$$

Ist f ein Element der linken Menge/abelschen Gruppe, so ist sein Bild rechts durch $a \mapsto f(a \otimes -)$ gegeben.

Sei nun $\varphi = (\varphi_U)_{U \Subset X}: \mathcal{A} \otimes^{\text{PSh}} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Morphismus von Prägarben abelscher Gruppen. Für jedes $U \Subset X$ und jedes $a \in \mathcal{A}(U)$ ist dann

$$\psi_U(a) := (\varphi_V(a|_V \otimes -))_{V \Subset U}: \mathcal{B}|_U \rightarrow \mathcal{C}|_U$$

ein (wohldefinierter!) Morphismus von Prägarben abelscher Gruppen. Weiter ist

$$\begin{aligned} \psi_U: \mathcal{A}(U) &\rightarrow \text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C})(U) = \text{PSh}_{U, \text{Ab}}(\mathcal{B}|_U, \mathcal{C}|_U), \\ a &\mapsto \psi_U(a), \end{aligned}$$

¹²⁸Dass $- \otimes_{\mathbb{B}}$ alle Kolimiten erhält und rechtsexakt ist, wie wir bereits in Proposition 2.16.4 per halmweiser Argumentation erklärt haben, folgt natürlich auch aus der obigen Adjunktion.

ein Morphismus abelscher Gruppen. Für variierendes $U \in X$ sind die ψ_U mit Restriktionen verträglich und definieren somit einen Morphismus

$$\psi := (\psi_U)_{U \in X}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{B}, \mathcal{C})$$

von Prägarben abelscher Gruppen.

Die so erhaltene Zuordnung $\varphi \mapsto \psi$ definiert (2.16.4) als Abbildung. Der Leser prüft rasch (etwa durch Angabe einer Umkehrabbildung), dass diese Abbildung bijektiv ist; sie ist offensichtlich ein Morphismus abelscher Gruppen und natürlich in den Argumenten.

Zu zeigen bleibt, dass $\mathcal{H}om(-, \mathcal{C}): \text{Sh}(X; \text{Ab})^{\text{op}} \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Ab})$ alle Limiten erhält. Sei $\text{colim } \mathcal{B}_i$ ein Kolimes in $\text{Sh}(X; \text{Ab})$ alias ein Limes in $\text{Sh}(X; \text{Ab})^{\text{op}}$. Dann wird $\mathcal{H}om(\text{colim } \mathcal{B}_i, \mathcal{C})$ vermöge der Morphismen

$$? \circ \text{in}_j: \mathcal{H}om(\text{colim } \mathcal{B}_i, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{B}_j, \mathcal{C})$$

ein Kegel über dem durch die rechten Objekte gebildeten Diagramm. Für beliebiges $\mathcal{A} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ ist nach Proposition 1.2.22 zu zeigen, dass die obere Horizontale im offensichtlich kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Sh}(\mathcal{A}, \mathcal{H}om(\text{colim } \mathcal{B}_i, \mathcal{C})) & \longrightarrow & \lim \text{Sh}(\mathcal{A}, \mathcal{H}om(\mathcal{B}_i, \mathcal{C})) \\ \sim \uparrow (2.16.3) & & \sim \uparrow \lim (2.16.3) \\ \text{Sh}(\mathcal{A} \otimes \text{colim } \mathcal{B}_i, \mathcal{C}) & \xrightarrow{\sim} & \lim \text{Sh}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_i, \mathcal{C}) \end{array}$$

bijektiv ist¹²⁹ Die untere Horizontale ist aber bijektiv nach Proposition 1.2.48, denn $\mathcal{A} \otimes -$ erhält alle Kolimiten und somit ist insbesondere $\mathcal{A} \otimes \text{colim } \mathcal{B}_i$ zusammen mit den Morphismen $\text{id}_{\mathcal{A}} \otimes \text{in}_j$ ein Kolimes des durch die $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_j$ gebildeten Diagramms. \square

2.16.13. Aus den bisher erhaltenen Morphismen kann man formal einige weitere Morphismen herleiten. Wir geben einige Beispiele:

(a) Garbenversion von (2.16.3): In $\text{Sh}(X; \text{Ab})$ gilt

$$(2.16.5) \quad \mathcal{H}om(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{H}om(\mathcal{B}, \mathcal{C}))$$

natürlich in $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ unter dem im Beweis erklärten Isomorphismus.

Formaler Beweis. Ist $\mathcal{T} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ eine beliebige Testgarbe, so liefern Satz 2.16.12 und Proposition 2.16.5 natürliche Bijektionen

$$\begin{aligned} \text{Sh}(\mathcal{T}, \mathcal{H}om(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{C})) &\cong \text{Sh}(\mathcal{T} \otimes (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}), \mathcal{C}) \\ &\cong \text{Sh}((\mathcal{T} \otimes \mathcal{A}) \otimes \mathcal{B}, \mathcal{C}) \\ &\cong \text{Sh}(\mathcal{T} \otimes \mathcal{A}, \mathcal{H}om(\mathcal{B}, \mathcal{C})) \\ &\cong \text{Sh}(\mathcal{T}, \mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{H}om(\mathcal{B}, \mathcal{C}))). \end{aligned}$$

Weil dies natürlich in \mathcal{T} ist, kommt die Komposition dieser Bijektionen nach Yoneda von einem eindeutigen Isomorphismus (2.16.5). Dieser ist offensichtlich natürlich in allen Argumenten. \square

Beweis von Hand; Skizze. Für $U \in X$ betrachte die folgende Verknüpfung,

$$\begin{aligned} \psi_U: \mathcal{H}om(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{C})(U) &= \text{Sh}_{\text{Ab}}((\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})|_U, \mathcal{C}|_U) \cong \text{Sh}_{\text{Ab}}(\mathcal{A}|_U \otimes \mathcal{B}|_U, \mathcal{C}|_U) \\ &\xrightarrow[\sim]{(2.16.3)} \text{Sh}_{\text{Ab}}(\mathcal{A}|_U, \mathcal{H}om_U(\mathcal{B}|_U, \mathcal{C}|_U)) \cong \text{Sh}_{\text{Ab}}(\mathcal{A}|_U, \mathcal{H}om(\mathcal{B}, \mathcal{C})|_U) = \mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{H}om(\mathcal{B}, \mathcal{C}))(U), \end{aligned}$$

wobei sich hinter den beiden \cong -Zeichen relativ offensichtliche Isomorphismen verbergen, die die Restriktion des Tensorprodukts¹³⁰ bzw. der Hom-Garbe auf die offene Teilmenge U beschreiben (und die man vielleicht als Gleichheit schreiben sollte).

¹²⁹Was nur bedeutet, dass jedes Element der Menge rechts oben alias jede Familie kompatibler Morphismen $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{B}_j, \mathcal{C})$ von genau einem Morphismus $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}om(\text{colim } \mathcal{B}_i, \mathcal{C})$ herkommt. Analog kann man die untere Zeile interpretieren, was den Beweis vielleicht leichter verständlich macht.

¹³⁰Was man auch als Spezialfall von (2.16.2) für $f: U \hookrightarrow X$ lesen kann.

Für variierende $U \Subset X$ sind die ψ_U verträglich mit Restriktionen und definieren so den Isomorphismus (2.16.5).¹³¹ \square

(b) Garbenversion von (2.8.2), vgl. Satz 2.8.5: Sei $f: Y \rightarrow X$ stetig. Dann gilt in $\text{Sh}(X; \text{Ab})$

$$(2.16.6) \quad f_* \text{Hom}_Y(f^* \mathcal{A}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_X(\mathcal{A}, f_* \mathcal{B})$$

natürlich in $\mathcal{A} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})^{\text{op}}$ und $\mathcal{B} \in \text{Sh}(Y; \text{Ab})$ unter dem im Beweis erklärten Isomorphismus.

Beweis. Ist $\mathcal{T} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ eine beliebige Testgarbe, so liefern die Sätze 2.8.5 und 2.16.12 und Proposition 2.16.5 natürliche Bijektionen

$$\begin{aligned} \text{Sh}_X(\mathcal{T}, f_* \text{Hom}_Y(f^* \mathcal{A}, \mathcal{B})) &\cong \text{Sh}_Y(f^* \mathcal{T}, \text{Hom}_Y(f^* \mathcal{A}, \mathcal{B})) \\ &\cong \text{Sh}_Y(f^* \mathcal{T} \otimes f^* \mathcal{A}, \mathcal{B}) \\ &\cong \text{Sh}_Y(f^*(\mathcal{T} \otimes \mathcal{A}), \mathcal{B}) \\ &\cong \text{Sh}_X(\mathcal{T} \otimes \mathcal{A}, f_* \mathcal{B}) \\ &\cong \text{Sh}_X(\mathcal{T}, \text{Hom}_X(\mathcal{A}, f_* \mathcal{B})) \end{aligned}$$

Weil dies natürlich in \mathcal{T} ist, kommt die Komposition dieser Bijektionen von einem eindeutigen Isomorphismus (2.16.6). Dieser ist offensichtlich natürlich in allen Argumenten. \square

Wie im vorigen Punkt kann man auch per Hand einen Isomorphismus (2.16.6) konstruieren.

(c) Es gilt

$$(2.16.7) \quad \text{Hom}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$$

natürlich in $\mathcal{B} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$.

Dies kann man ähnlich wie oben formal beweisen, aber der Beweis von Hand ist viel klarer.

Beweis von Hand. Für $U \Subset X$ offen gilt

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{B})(U) = \text{Sh}_U(\mathbb{Z}_X|_U, \mathcal{B}|_U) = \text{Sh}_U(\mathbb{Z}_U, \mathcal{B}|_U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(U),$$

wobei der letzte Isomorphismus aus der Adjunktion $((-)_U, \Gamma(U; -))$ (alias (c^*, c_*) für $c: U \rightarrow \{*\}$) folgt (und ein Spezialfall von (2.15.1) ist, denn $\mathbb{Z}_{U \Subset U} = \mathbb{Z}_U$). Dies ist kompatibel mit Restriktionen entlang $W \Subset U$ und der so erhaltene Isomorphismus (2.16.7) ist natürlich in \mathcal{B} . \square

Ende der 18. Vorlesung am 24.06.2021.

Hausaufgaben:

- (1) Aufgabe 2.16.9: Hom-Prägarbe von Garben ist Garbe
- (2) Aufgabe 2.16.11: Halm der Hom-Garbe versus Hom der Halme
- (3) Bonus: Finde ein Analogon von Satz 2.16.12 für Garben von Mengen! Hinweis: Ersetze \otimes durch \times .
- (4) Aufgabe 2.11.15: Test ob Funktor linksexakt auf kurzen exakten Sequenzen, Test ob exakt auf exakten Sequenzen.
- (5) Aufgabe 2.12.18: drei äquivalente Bedingungen für Additivität eines Funktors
- (6) Bonus: Aufgabe 2.12.22: rechts-/linksexakte Funktoren zwischen abelschen Kategorien automatisch additiv.

3. GARBENKOHOMOLOGIE

3.1. Injektive (und projektive) Garben.

3.1.1. Der Begriff des projektiven Moduls (siehe [Sch21, Definition 7.1.1]) läßt sich leicht in den Kontext abelscher Kategorien verallgemeinern. Man spricht dann von projektiven Objekten. Dual dazu ist der Begriff des injektiven Objekts.

Injektive Garben (:= injektive Objekte in der Kategorie der Garben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum) werden zur Berechnung rechtsderivierter Funktoren und insbesondere zur Berechnung der Garbenkohomologie verwendet.

Projektive Garben sind äußerst selten interessant: Oft ist die Nullgarbe die einzige projektive Garbe, siehe Proposition 3.1.10.

¹³¹Der hoffentlich mit dem im ersten Beweis definierten übereinstimmt - so etwas ist leider immer nervig zu checken (hier aber sicher relativ einfach möglich); in der Literatur wird so etwas leider durchaus häufig übergangen.

3.1.2. Ist I ein Objekt einer abelschen Kategorie \mathcal{A} , so ist der Funktor $\mathcal{A}(-, I): \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$ offensichtlich linksexakt, d.h. er bildet Kerne in \mathcal{A}^{op} alias Kokerne in \mathcal{A} auf Kerne in Ab ab. Dies ist klar nach der Definition eines Kokerns. Im Allgemeinen ist $\mathcal{A}(-, I)$ aber nicht exakt.

Definition 3.1.3. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie.

- (a) Ein Objekt $I \in \mathcal{A}$ heißt **injektiv**, wenn der Funktor $\mathcal{A}(-, I): \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}^{\text{op}}$ exakt ist. Äquivalent¹³²: Für jeden Monomorphismus $i: A' \hookrightarrow A$ in \mathcal{A} ist die Abbildung

$$i^* = (? \circ i): \mathcal{A}(A, I) \rightarrow \mathcal{A}(A', I)$$

surjektiv. Zur Illustration ein Bild (man nennt f' einen **Lift** von f (relativ zu i)):

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{i} & A \\ \forall f \downarrow & \swarrow \exists f' & \\ I & & \end{array}$$

- (b) Wir sagen, dass \mathcal{A} **genug Injektiv hat**, wenn es für jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$ einen Monomorphismus $A \hookrightarrow I$ in ein injektives Objekt I gibt.
(c) Ein Objekt $P \in \mathcal{A}$ heißt **projektiv**, wenn der (mehr oder weniger per Definition linksexakte) Funktor $\mathcal{A}(P, -): \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$ exakt ist. Äquivalent: Für jeden Epimorphismus $\pi: A \twoheadrightarrow A''$ ist die Abbildung

$$\pi_* = (\pi \circ ?): \text{Hom}_R(P, M) \rightarrow \text{Hom}_R(P, M'')$$

surjektiv. Zur Illustration ein Bild (man nennt f' einen **Lift** von f (relativ zu π)):

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \exists f' \swarrow & \downarrow \forall f & \\ M & \xrightarrow{\pi} & M'' \end{array}$$

- (d) Wir sagen, dass \mathcal{A} **genug Projektive hat**, wenn es für jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$ einen Epimorphismus $P \twoheadrightarrow A$ von einem projektiven Objekt P gibt.

3.1.4. Beliebige Produkte $\prod_{s \in S} I_s$ injektiver Objekte I_s sind injektiv (klar nach der Liftungsbedingung¹³³) Dual sind beliebige Koprodukte $\bigoplus P_i$ projektiver Objekte P_i projektiv.

3.1.5. Jeder Funktor mit einem exakten (äquivalent: monomorphismenerhaltenden) Linksadjungierten erhält Injektivität: Sei (L, R) ein adjungiertes Paar zweier Funktoren $\mathcal{A} \xrightleftharpoons[R]{L} \mathcal{B}$ zwischen abelschen Kategorien, wobei L Monomorphismen erhält. Ist $I \in \mathcal{B}$ injektiv, so ist auch RI injektiv (klar nach Liftungsbedingung¹³⁴).

Beispiel 3.1.6. Ist $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge eines topologischen Raums, so ist die Restriktion $\mathcal{I}|_U$ jeder injektiven Garbe $\mathcal{I} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ injektiv, denn der Restriktionsfunktor $\text{Sh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(U; \text{Ab})$ alias j^* für $j: U \hookrightarrow X$ hat den exakten Linksadjungierten Ausdehnung durch Null $j_!$, so dass wir 3.1.5 verwenden können.

3.1.7 (Injektivität vererbt sich auf direkte Summanden). Ist $A \oplus B = A \times B$ injektiv bzw. projektiv, so haben auch die direkten Summanden/direkten Faktoren A und B diese Eigenschaft.

3.1.8. Sei $\Sigma = (A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C)$ eine kurze exakte Sequenz in einer abelschen Kategorie, so gelten:

- Ist A injektiv, so spaltet Σ .
- Ist C projektiv, so spaltet Σ .

¹³²Siehe die Bemerkungen in Aufgabe 2.11.15.(a).

¹³³Alternativ ist $\mathcal{A}(-, \prod I_s) \cong \prod \mathcal{A}(-, I_s)$ exakt, wie man sofort prüft - formal ist dieser Funktor die Verknüpfung des exakten Funktors $\mathcal{A}(-, I_s)_{s \in S}: \mathcal{A} \rightarrow (\text{Ab}^{\text{op}})^S = (\text{Ab}^S)^{\text{op}}$ mit dem opponierten des exakten Produktfunktors $\prod_S: \text{Ab}^S \rightarrow \text{Ab}$.

¹³⁴Oder formaler, weil $\mathcal{A}(-, RI) \cong \mathcal{B}(L-, I)$ eine Verknüpfung zweier exakter Funktoren ist

3.1.9. Betreibt man homologischen Algebra in der Kategorie der Moduln über einem Ring, so verwendet man oft, dass diese Kategorie genug projektive und injektive Objekte hat, um gewisse derivierte Funktoren, beispielsweise Erweiterungsgruppen $\text{Ext}_R^i(A, B)$ zwischen R -Moduln, auszurechnen. Im Fall von Garben abelscher Gruppen gibt es jedoch sehr oft keine projektiven Garben außer der Nullgarbe und insbesondere nicht genügend projektive Objekte, siehe Proposition 3.1.10. Genügend injektive Garben gibt es aber stets, siehe Proposition 3.1.14.

Proposition 3.1.10 ([Bre97, Chapter I, Exercise 4]). *Sei $n \geq 1$. Die einzige projektive Garbe abelscher Gruppen auf \mathbb{R}^n und allgemeiner jeder topologischen n -Mannigfaltigkeit ist die Nullgarbe.*

Allgemeiner gilt dies für jeden lokal zusammenhängenden Hausdorffraum ohne isolierte¹³⁵ Punkte.

Beweis. Sei $x \in X$ ein Punkt. Weil x Hausdorff ist, ist $i: \{x\} \hookrightarrow X$ eine abgeschlossene Inklusion. Folglich ist nach (dem Beweis von) Proposition 2.14.5 für jede Garbe $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ die Eins $\eta_{\mathcal{F}}: \mathcal{F} \rightarrow i_*i^*\mathcal{F}$ eine Epimorphismus und

$$i^*\eta_{\mathcal{F}} = (\eta_{\mathcal{F}})_x: i^*\mathcal{F} = \mathcal{F}_x \rightarrow i^*i_*i^*\mathcal{F} = (i_*i^*\mathcal{F})_x$$

ist ein Isomorphismus alias eine bijektive Abbildung abelscher Gruppen (wir identifizieren hier und im Rest des Beweises Garben abelscher Gruppen auf $\{x\}$ mit abelschen Gruppen entlang der in 2.2.6 erklärten Äquivalenz).

Sei nun $\mathcal{P} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ projektiv. Ist \mathcal{P} nicht die Nullgarbe, so gibt es ein $x \in X$ mit $\mathcal{P}_x \neq 0$. Setze $A := i^*\mathcal{P} = \mathcal{P}_x \neq 0$, wobei $i: \{x\} \hookrightarrow X$ wie oben die Inklusion ist. Die beiden Morphismen f und p im folgenden linken Diagramm sind die Einsen von \mathcal{P} und von der konstanten Garbe A_X .

$$(3.1.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{\exists \tilde{f}} & A_X \\ & \searrow f & \downarrow p \\ & & A_{(x)} \end{array} \quad A = \mathcal{P}_x \xrightarrow{\exists \tilde{f}_x} (A_X)_x \xrightarrow{\sim} A \\ \begin{array}{ccc} & \searrow f_x & \downarrow p_x \\ & & (A_{(x)})_x \xrightarrow{\sim} A \end{array}$$

denn sowohl $i_*i^*\mathcal{P} = i_*A$ als auch $i_*i^*(A_X) = i_*(A_{\{x\}}) = i_*A$ sind der Wolkenkratzer $A_{(x)} = i_*A$ bei x zur abelschen Gruppe A . Weil \mathcal{P} projektiv ist und p ein Epimorphismus ist, existiert ein gestrichelter Morphismus \tilde{f} , der das linke Diagramm kommutativ macht. Das rechte Diagramm ist sein Bild unter dem Halm-Funktor $(-)_x$. Da f_x und p_x nach der Erinnerung am Anfang des Beweises bijektiv sind, ist auch \tilde{f}_x bijektiv; die beiden abelschen Gruppen rechts sind wie angedeutet kanonisch zu A isomorph (als Kolimiten) und wir behandeln diese Isomorphismen im Rest des Beweises als Gleichheiten. Dann gilt $f_x = p_x = \tilde{f}_x = \text{id}_A$.

Sei $a \in A \setminus \{0\}$. Weil \tilde{f}_x surjektiv ist, existieren eine offene Umgebung $U \ni x$ von x und $s \in \mathcal{P}(U)$ mit $\tilde{f}_U(s)_x = \tilde{f}_x(s_x) = a$.

Ist X eine topologische Mannigfaltigkeit, so können wir annehmen, dass U offen und zusammenhängend ist (ein „ ε -Ball um x “). Weil $\tilde{f}_U(s) \in A_X(U)$ dann eine stetige Funktion $U \rightarrow A$ ist, muss sie konstant sein (da Bilder zusammenhängender Mengen zusammenhängend und A diskret) und es muss $\tilde{f}_U(s) = a$ gelten. Sei $y \in U \setminus \{x\}$.

Im allgemeinen Fall läßt sich die offene Umgebung U von x zu einer zusammenhängenden Umgebung $V \subset U$ verkleinern, die sich wiederum zu einer in X offenen Umgebung $W \subset V$ verkleinern läßt. Dann ist die mengentheoretische Restriktion $\tilde{f}_U(s)|_V$ notwendig konstant und es folgt $\tilde{f}_W(s|_W) = \tilde{f}_U(s)|_W = a$. Da x kein isolierter Punkt von X ist, gibt es ein $y \in W \setminus \{x\}$.

Betrachte das folgende Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{\exists l} & A_X \\ f \downarrow & & \downarrow \pi := \langle p, q \rangle \\ A_{(x)} & \xrightarrow{\text{in}_1} & A_{(x)} \oplus A_{(y)} = A_{(x)} \times A_{(y)} \end{array}$$

Die beiden epimorphen Koeinsen $p: A_X \twoheadrightarrow A_{(x)}$ und $q: A_X \twoheadrightarrow A_{(y)}$ induzieren wie angedeutet den Morphismus π , welcher offensichtlich halmweise surjektiv und somit ein Epimorphismus ist. Da \mathcal{P} projektiv ist, existiert der angedeutete gestrichelte Lift von $\text{in}_1 \circ f$.

¹³⁵Ein Punkt x eines topologischen Raums heißt **isoliert**, falls $\{x\}$ offen in X ist.

Dieses Diagramm liefert auf den Halmen bei x und y die beiden folgenden Diagramme.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P}_x & \xrightarrow{l_x} & (A_X)_x = A \\
 f_x \downarrow & & \downarrow \pi_x = \langle p_x, q_x \rangle = \langle \text{id}_A, 0 \rangle \\
 (A(x))_x & \xrightarrow{(\text{in}_1)_x} & (A(x) \times A(y))_x \\
 \parallel & & \parallel \\
 A & \xrightarrow{\text{in}_1} & A \times 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{P}_y & \xrightarrow{l_y} & (A_X)_y = A \\
 f_y \downarrow & & \downarrow \pi_y = \langle p_y, q_y \rangle = \langle 0, \text{id}_A \rangle \\
 (A(x))_y & \xrightarrow{(\text{in}_1)_y} & (A(x) \times A(y))_y \\
 \parallel & & \parallel \\
 0 & \xrightarrow{\text{in}_1} & 0 \times A
 \end{array}$$

Das rechte Diagramm liefert $l_y = 0$. Der Vergleich des linken Diagramms mit dem rechten Diagramm in (3.1.1) liefert $l_x = \tilde{f}_x$, also $l_U(s)_x = l_x(s_x) = \tilde{f}_x(s_x) = a \neq 0$.

Da U zusammenhängend ist, muss die stetige Funktion $l_U(s): U \rightarrow A$ konstant sein und es folgt $l_U(s) = a$ und insbesondere $l_y(s_y) = l_U(s)_y = a \neq 0$ im Widerspruch zu $l_y = 0$.

Allgemeiner Fall: Mit $W \subset V \subset U$ wie oben folgt, dass $l_U(s)|_V$ konstant den Wert a annimmt. Somit gilt $l_W(s) = a$ und dann $l_y(s_y) = l_W(s)_y = a \neq 0$ im Widerspruch zu $l_y = 0$. \square

Proposition 3.1.11. *Sei R ein (nicht notwendig kommutativer) Ring. Dann hat $\text{Mod}(R)$ genug Injektive. Insbesondere hat Ab genug Injektive.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage zuerst für $\text{Ab} = \text{Mod}(\mathbb{Z})$.

Als bekannt wird vorausgesetzt, dass eine abelsche Gruppe A genau dann injektiv ist, wenn sie divisibel¹³⁶ ist (die Implikation \Rightarrow folgt leicht mit Hilfe der Injektion $\mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z}$, die Implikation \Leftarrow geht mit dem Zornschen Lemma (eventuell im Video erklären)).

Eine unmittelbare Konsequenz ist, dass Quotienten injektiver abelscher Gruppen injektiv sind. Beispielsweise sind \mathbb{Q} und \mathbb{Q}/\mathbb{Z} injektive abelsche Gruppen.

Wir zeigen nun, dass sich jede abelsche Gruppe A in eine injektive abelsche Gruppe einbetten lässt. Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z}A & \xrightarrow{r} & A \\
 u \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{Q}A & \xrightarrow{\quad} & P
 \end{array}$$

Hierbei ist $\mathbb{Z}A$ die freie abelsche Gruppe (= der freie \mathbb{Z} -Modul) über A und $\mathbb{Q}A$ ist der freie \mathbb{Q} -Vektorraum über A , den wir hier als abelsche Gruppe betrachten; r und u sind die offensichtlichen Gruppenmorphisme; P ist der Pushout, den man etwa konkret als Kokern der Abbildung $\mathbb{Z}A \xrightarrow{\langle u, -r \rangle} \mathbb{Q}A \times A = \mathbb{Q}A \oplus A$ beschreiben mag. Aus dieser Beschreibung folgt sofort, dass die vertikale bzw. horizontale Abbildung in den Pushout injektiv bzw. surjektiv ist (Surjektivität der Horizontale folgt auch abstrakt aus Aufgabe 2.9.9).

Somit ist P als Quotient der injektiven (= divisiblen) abelschen Gruppe $\mathbb{Q}A$ injektiv und die rechte Vertikale ist die gesuchte Einbettung von A in eine injektive abelsche Gruppe.^{137 138}

Sei nun R ein beliebiger Ring. Wie in Aufgabe 3.1.12 bezeichne $\text{Mod}(R)$ die Kategorie der R -Rechtsmoduln; diese Aufgabe zeigt, dass der exakte Vergissfaktor $\text{res}: \text{Mod}(R) \rightarrow \text{Mod}(\mathbb{Z}) = \text{Ab}$ als Rechtsadjungierten

¹³⁶Das bedeutet, dass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Abbildung $n \cdot : A \rightarrow A$ surjektiv ist.

¹³⁷Dieselbe Pushout-Konstruktion funktioniert mit $\mathbb{Z}E \hookrightarrow \mathbb{Q}E$ als linker Vertikale und offensichtlicher oberer Horizontale, wenn A von einer Teilmenge E als abelsche Gruppe erzeugt wird. Dies mag für konkrete Berechnungen nützlich sein.

¹³⁸Alternative Konstruktion: Für jedes abelsche Gruppe ist

$$\begin{aligned}
 i_A: A &\rightarrow \prod_{\varphi \in \text{Ab}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \\
 a &\mapsto (\varphi(a))_{\varphi}
 \end{aligned}$$

ein Monomorphismus in eine injektive abelsche Gruppe: Die rechte Seite ist sicherlich injektiv, etwa als Produkt injektiver (= divisibler). Um zu zeigen, dass i_A ein Monomorphismus ist, genügt es, für jedes $a \in A \setminus \{0\}$ einen Gruppenmorphismus $\varphi: A \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit $\varphi(a) \neq 0$ zu finden. Sicherlich gibt es einen Gruppenmorphismus $\mathbb{Z}a \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, der a auf ein Element $\neq 0$ abbildet, denn $\mathbb{Z}a$ ist isomorph zu \mathbb{Z} oder zu $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ für ein $m > 2$. Dieser kann wegen der Injektivität von \mathbb{Q}/\mathbb{Z} entlang der Inklusion $\mathbb{Z}a \subset A$ ausgedehnt werden.

den Funktor $\text{ind} := \text{Hom}_{-\mathbb{Z}}(R, -): \text{Ab} \rightarrow \text{Mod}(R)$ hat. Ist $M \in \text{Mod}(R)$ beliebig, so besitzt die abelsche Gruppe $\text{res } M$ wie oben erklärt eine Einbettung $i: \text{res } M \hookrightarrow I$ in eine injektive abelsche Gruppe.

Wir behaupten, dass die Verknüpfung

$$M \xrightarrow{\eta} \text{ind } \text{res } M \xrightarrow{\text{ind } i} \text{ind } I$$

von R -Modulmorphisme die gesuchte Einbettung von M in einen injektiven R -Modul ist, wobei η die Eins unserer Adjunktion ist.

Zunächst ist mit I auch $\text{ind } I$ injektiv, denn der Linksadjungierte res von ind ist exakt (siehe 3.1.5).

Da $\text{ind} = \text{Hom}_{-\mathbb{Z}}(R, -)$ offensichtlich Monomorphismen (= Injektionen) erhält, ist $\text{ind } i$ injektiv (abstrakt kann man auch Lemma 2.9.7 verwenden). Die Eins $\eta: M \rightarrow \text{Hom}_{-\mathbb{Z}}(R, M|_{\mathbb{Z}})$ bildet $m \in M$ auf $\eta(m): r \mapsto mr$ ab¹³⁹ und ist wegen $\eta(m)(1) = m$ injektiv. Die Behauptung folgt. \square

Aufgabe 3.1.12 (Allgemeine Tensor-Hom-Adjunktion). In dieser Aufgabe stehe $\text{Mod}(R)$ für die Kategorie der R -Rechtsmoduln über einem Ring R .

(a) Seien A und B Ringe und sei $X = {}_A X_B$ ein A - B -Bimodul.

Sei M ein A -Rechtsmodul und N ein B -Rechtsmodul. Die abelsche Gruppe $\text{Hom}_{-B}(X, N)$ der B -Rechtsmodulmorphisme $X \rightarrow N$ wird offensichtlich per $(g.a)(x) = g(ax)$ ein A -Rechtsmodul.

Zeige: Die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{-B}(M \otimes_A X, N) &\rightarrow \text{Hom}_{-A}(M, \text{Hom}_{-B}(X, N)), \\ f &\mapsto (m \mapsto f(m \otimes -)), \end{aligned}$$

ist eine (wohldefinierte) Bijektion.

Einfach und nicht aufzuschreiben: Sie ist natürlich in allen Argumenten und ein Morphismus abelscher Gruppen.

Insbesondere ist $- \otimes_A X: \text{Mod}(A) \rightarrow \text{Mod}(B)$ linksadjungiert zu $\text{Hom}_{-B}: \text{Mod}(B) \rightarrow \text{Mod}(A)$.

(b) Folgere: Ist $\varphi: R \rightarrow S$ ein Ringmorphismus, so hat der (exakte) Vergissfunktor $\text{Mod}(S) \rightarrow \text{Mod}(R)$

- Erweiterung der Skalare $- \otimes_R S$ als Linksadjungierten und
- $\text{Hom}_{-R}(S, -)$ als Rechtsadjungierten.

Bemerkung: Die Formulierung mit Rechtsmoduln ist für meinen Geschmack am einfachsten zu merken. Wer mag, kann sie auf Linksmoduln übertragen.

Aufgabe 3.1.13 (Einbettung abelscher Gruppen in Injektive funktoriell, aber nicht additiv). Sei $[0, 1] := (0 \rightarrow 1)$ die Kategorie mit genau zwei Objekten 0 und 1 und genau einem Morphismus $0 \rightarrow 1$ außer den beiden Identitätsmorphisme. Ist \mathcal{A} eine beliebige Kategorie, so heißt die Funktorkategorie \mathcal{A}^I auch **Kategorie der Pfeile/Morphisme in \mathcal{A}** , denn ihre Objekte sind Pfeile alias Morphisme $a: A_0 \rightarrow A_1$ und ihre Morphisme $(A_0 \xrightarrow{a} A_1) \rightarrow (B_0 \xrightarrow{b} B_1)$ sind Paare $f = (f_0, f_1)$, so dass das offensichtliche Quadrat kommutiert, also $f_1 a = b f_0$ gilt.

(a) Es gibt einen Funktor „Einbettung in injektive abelsche Gruppe“ $E: \text{Ab} \rightarrow \text{Ab}^{[0,1]}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Für jede abelsche Gruppe A gilt $E(A) = (A \xrightarrow{i_A} I_A)$, wobei i_A ein Injektion und I_A eine injektive abelsche Gruppe sind.
- Für jeden Morphismus $f: A \rightarrow B$ abelscher Gruppen gilt $E(f) = (f, g_f)$ für einen Morphismus $g_f: I_A \rightarrow I_B$.

(b) Es gibt keinen solchen Funktor, der additiv ist.

Hinweis: $2 \cdot: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Proposition 3.1.14. Die Kategorie $\text{Sh}(X; \text{Ab})$ abelscher Garben auf jedem topologischen Raum X hat genug Injektive.

Beweis. Sei $\mathcal{A} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ beliebig, für jedes $x \in X$ sei $i_x: \{x\} \hookrightarrow X$ die Einbettung. Da Ab genügend injektive Objekte hat (siehe Proposition 3.1.11), gilt dasselbe für die äquivalente Kategorie $\text{Sh}(\{x\}, \text{Ab})$ und wir finden einen Monomorphismus $m(x): i_x^* \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{I}(x)$ in eine injektive Garbe $\mathcal{I}(x)$ abelscher Gruppen. Per

¹³⁹Wer nicht nachrechnen will, dass das die Eins ist, kann auch einfach η so definieren, muss dann aber nachrechnen, dass η R -linear ist.

Adjunktion erhalten wir einen Morphismus $\tilde{m}(x): \mathcal{A} \rightarrow (i_x)_*\mathcal{I}(x)$. Die Familie dieser Morphismen liefert einen Morphismus

$$j: \mathcal{A} \rightarrow \prod_{x \in X} (i_x)_*\mathcal{I}(x)$$

ins Produkt. Es reicht zu zeigen, dass er ein Monomorphismus in eine injektive Garbe ist.

Weil der Linksadjungierte $i_x^* \cong (-)_x$ von $(i_x)_*$ exakt ist, ist mit $\mathcal{I}(x)$ auch (der Wolkenkratzer) $(i_x)_*\mathcal{I}(x)$ injektiv (siehe 3.1.5). Da Produkte injektiver Garben injektiv sind (siehe 3.1.4), ist dann auch $\prod (i_x)_*\mathcal{I}(x)$ injektiv.

Sei $y \in X$ beliebig. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_y & \xrightarrow{j_y} & \left(\prod_{x \in X} (i_x)_*\mathcal{I}(x) \right)_y \\ & \searrow \tilde{m}(y)_y & \downarrow (\text{pr}_{(i_y)_*\mathcal{I}(y)})_y \\ & & ((i_y)_*\mathcal{I}(y))_y. \end{array}$$

Können wir zeigen, dass $\tilde{m}(y)_y$ injektiv ist, so ist auch j_y injektiv und somit j ein Monomorphismus.

Unter dem Isomorphismus $(-)_y \cong i_y^*$ von Funktoren (modulo der Äquivalenz $\text{Sh}(\{y\}, \text{Ab}) \cong \text{Ab}$) entspricht aber $\tilde{m}(y)_y$ dem ersten der beiden folgenden Morphismen

$$i_y^*\mathcal{A} \xrightarrow{i_y^*\tilde{m}(y)} i_y^*(i_y)_*\mathcal{I}(y) \rightarrow \mathcal{I}(y),$$

wobei der zweite Morphismus die Koeins ist¹⁴⁰. Die Verknüpfung ist aber nach (1.1.9) genau unser zuvor gewählter Monomorphismus, weshalb dann auch der erste Morphismus ein Monomorphismus ist. \square

Ende der 19. Vorlesung am 29.06.2021.

3.2. Hauptlemma der homologischen Algebra.

Definition 3.2.1. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Sei $M \in \mathcal{A}$ ein Objekt.

- (a) Eine **Auflösung** oder genauer **Rechtsauflösung** von M ist eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow M \rightarrow A^0 \rightarrow A^1 \rightarrow A^2 \rightarrow \dots$$

in \mathcal{A} . Wir notieren eine solche Auflösung kurz als $M \hookrightarrow A$.¹⁴¹

- (b) Eine **injektive Auflösung** von M ist eine Rechtsauflösung $M \hookrightarrow I$ mit der Eigenschaft, dass alle Objekte I^n injektiv sind.

- (c) Eine **(Links-)Auflösung** von M ist eine exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow A^{-2} \rightarrow A^{-1} \rightarrow A^0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

in \mathcal{A} . Wir notieren eine solche Auflösung kurz als $A \twoheadrightarrow M$.¹⁴²

- (d) Eine **projektive Auflösung** von M ist eine Linksauflösung $P \twoheadrightarrow M$ mit der Eigenschaft, dass alle Objekte P^n projektiv sind.

3.2.2 (Genug injektive Auflösungen). Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven. Dann hat jedes Objekt $M \in \mathcal{A}$ eine injektive Auflösung. Sie kann wie folgt konstruiert werden.

$$\begin{array}{ccccccc} M \hookrightarrow & I^0 & & I^1 & & I^2 & & \dots \\ & \searrow & & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow \\ & & K^0 & & K^1 & & K^2 & & \dots \end{array}$$

Laut Annahme gibt es einen Monomorphismus $M \hookrightarrow I^0$ mit I^0 injektiv. Sei K^0 ihr Kokern. Dieser lässt sich ebenfalls in ein injektives Objekt I^1 einbetten; sei K^1 der Kokern dieser Einbettung, etcetera. Dann bildet die obere Zeile unseres Diagramms zusammen mit den Verknüpfungen $I^p \twoheadrightarrow K^p \hookrightarrow I^{p+1}$ die gesuchte injektive Auflösung von A .

¹⁴⁰Die ein Isomorphismus ist (siehe Proposition 2.14.4), was wir hier nicht einmal benötigen.

¹⁴¹Es ist also A das Diagramm $A^0 \rightarrow A^1 \rightarrow A^2 \rightarrow \dots$ und der Pfeil steht für den Monomorphismus $M \hookrightarrow A^0$.

¹⁴²Es ist also A das Diagramm $\dots \rightarrow A^{-2} \rightarrow A^{-1} \rightarrow A^0$ und der Pfeil steht für den Epimorphismus $A^0 \twoheadrightarrow M$.

Aufgabe 3.2.3. Sei X ein topologischer Raum. Wir nennen $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ **flach**, wenn der (stets rechtsexakte) Funktor $\mathcal{F} \otimes - : \text{Sh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Ab})$ exakt ist.

Zeige, dass im folgenden Sinne genügend flache Garben existieren: Für jede Garbe $\mathcal{G} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ existiert ein Epimorphismus $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ von einer flachen Garbe \mathcal{G} .

Hinweis: $\mathbb{Z}_{U \subset X}$.

Bemerkung: Die Existenz genügend vieler flacher Garben erlaubt die Definition der Linksderivierten des Tensorprodukts von Garben.

3.2.4. Die Definitionen in [Sch21, Appendix B] lassen sich leicht verallgemeinern, wenn man $\text{Mod}(R)$ durch einen beliebige abelsche Kategorie \mathcal{A} ersetzt. Manche der Definitionen sind auch bereits für eine beliebige additive Kategorie \mathcal{A} sinnvoll. Im Gegensatz zum zitierten Appendix arbeiten wir hier mit oberen Indizes bei unseren Komplexen. Ein Komplex A hat also die Gestalt $A = (\dots \rightarrow A^p \xrightarrow{d} A^{p+1} \rightarrow \dots)$.

Hier nur das wichtigste: Ist \mathcal{A} eine additive Kategorie, so bezeichnet $\text{Kom}(\mathcal{A})$ die Kategorie der Komplexe in \mathcal{A} (Morphismen kommutieren mit den Differentialen). Die zugehörige Homotopiekategorie wird als $\text{Hot}(\mathcal{A})$ notiert.

Ist \mathcal{A} abelsch, so definiert man für jeden Komplex $A \in \text{Kom}(\mathcal{A})$ die Objekte p -Kozykel $Z^p(A)$, p -Koränder $B^p(A)$ und p -te Kohomologie $H^p(A)$ in offensichtlicher Weise.

Satz 3.2.5 (Hauptsatz (oder Hauptlemma) der homologischen Algebra). *In einer abelschen Kategorie \mathcal{A} seien*

- E ein Komplex mit $H^p(E) = 0$ für alle $p > 0$ und
- I ein Komplex injektiver Objekte mit $I^p = 0$ für alle $p < 0$.

(In Worten ist I also ein in nichtnegativen Graden konzentrierter Komplex injektiver Objekte und E ist ein in positiven Graden azyklischer Komplex.)¹⁴³ Dann ist das Bilden der nullten Kohomologie ein Isomorphismus

$$(3.2.1) \quad \text{Hot}_{\mathcal{A}}(E, I) \xrightarrow[\sim]{H^0} \mathcal{A}(H^0(E), H^0(I)).$$

Beweis. Dies wird genauso bewiesen wie [Sch21, Satz 7.1.5]. □

3.2.6. Sei $M \rightarrow A$ eine Rechtsauflösung in einer abelschen Kategorie. Indem wir A in negativen Graden durch Nullen ergänzen, erhalten wir den Komplex

$$A = (\dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow A^0 \rightarrow A^1 \rightarrow \dots) \in \text{Kom}(\mathcal{A}),$$

den wir per *abuse of notation* ebenfalls als A notieren. Wenn wir M als im Grad Null konzentrierten Komplex auffassen, so liefert der Morphismus $M \rightarrow A$ im Grad Null zusammen mit den Nullmorphisms in allen anderen Graden einen Quasi-Isomorphismus $M \rightarrow A$ nach Definition einer Rechtsauflösung (denn $H^0(M) = M \xrightarrow{\sim} \ker(A^0 \rightarrow A^1) = Z^0(A) = H^0(A)$).

Wir sehen unmittelbar: Eine Rechtsauflösung eines Objektes $M \in \mathcal{A}$ ist „dasselbe“ wie ein Quasi-Isomorphismus $M \rightarrow A$ in einen in nicht-negativen Graden konzentrierten Komplex A .

Analog ist eine Linksaufösung eines Objektes $M \in \mathcal{A}$ „dasselbe“ wie ein Quasi-Isomorphismus $A \rightarrow M$ von einem in nicht-positiven Graden konzentrierten Komplex A .

Definition 3.2.7. Seien $M \hookrightarrow A$ und $N \hookrightarrow B$ Rechtsauflösungen von Objekten M, N einer abelschen Kategorie \mathcal{A} . Betrachte das kommutative Diagramm

$$(3.2.2) \quad \begin{array}{ccc} \text{Kom}_{\mathcal{A}}(A, B) & & \\ \downarrow & \searrow^{H^0} & \\ \text{Hot}_{\mathcal{A}}(A, B) & \xrightarrow{H^0} & \mathcal{A}(H^0(A), H^0(B)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(M, N) \end{array}$$

abelscher Gruppen, dessen letzter Isomorphismus von den durch die Auflösungen induzierten Isomorphismen $M \xrightarrow{\sim} H^0(A)$ und $N \xrightarrow{\sim} H^0(B)$ herrührt. Gegeben $f \in \mathcal{A}(M, N)$ nennen wir jedes Urbild von f in $\text{Kom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ einen **Lift von f** und jedes Urbild von f in $\text{Hot}_{\mathcal{A}}(A, B)$ einen **Homotopielift von f** .

¹⁴³Offensichtlich steht der Buchstabe I für *injektiv*. Der Buchstabe E steht für *exakt*, denn eine durch \mathbb{Z} indizierte exakte Sequenz ist dasselbe wie ein azyklischer Komplex.

3.2.8. Jeder Lift von f liefert sicherlich einen Homotopielift; jeder Homotopielift läßt sich durch einen Lift repräsentieren.

Korollar 3.2.9 (zum Hauptlemma 3.2.5). *Seien M und N zwei Objekte einer abelschen Kategorie \mathcal{A} . Seien $M \hookrightarrow E$ eine Auflösung von M und $N \hookrightarrow I$ eine injektive Auflösung von N . Dann gilt*

$$\text{Hot}_{\mathcal{A}}(E, I) \xrightarrow[\sim]{(3.2.2)} \mathcal{A}(M, N).$$

In Worten hat also jeder Morphismus $f: M \rightarrow N$ in \mathcal{A} einen eindeutigen Homotopielift $E \rightarrow I$.

Beweis. Klar nach dem Hauptlemma der homologischen Algebra 7.1.5. □

3.3. Rechtsderivierte Funktoren.

3.3.1. Jeder additive Funktor $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ zwischen additiven Kategorien induziert durch komponentenweises¹⁴⁴ Anwenden Funktoren $F: \text{Kom}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Kom}(\mathcal{B})$ und $F: \text{Hot}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Hot}(\mathcal{B})$, die wir mit demselben Symbol bezeichnen.

Ergänzt (oder steht das schon irgendwo? Besserer Ort? Vielleicht samt vorhergehender Bemerkung vorziehen, nach Komplexen in additiver Kategorie.):

Aufgabe 3.3.2. Ist $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein exakter Funktor zwischen abelschen Kategorien, so vertauscht der induzierte Funktor $F: \text{Kom}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Kom}(\mathcal{B})$ mit Kohomologie. Insbesondere bildet er Quasi-Isomorphismen auf Quasi-Isomorphismen ab und azyklische Komplexe auf azyklische Komplexe.

Definition 3.3.3. Sei $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein additiver Funktor von einer abelschen Kategorie \mathcal{A} mit genug Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie \mathcal{B} . Sei $q \in \mathbb{Z}$. Ein q -ter rechtsderivierter Funktor von F ist ein Paar $(R^q F, \tau)$ bestehend aus einem Funktor

$$R^q F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

und einer Familie τ von Morphismen

$$\tau_{M \hookrightarrow A} = \tau_{M \hookrightarrow A}^q: H^q(F(A)) \rightarrow (R^q F)(M)$$

für jede Auflösung $M \hookrightarrow A$ eines Objekts $M \in \mathcal{A}$ derart, dass gelten:

- (a) Für jede injektive Auflösung $M \hookrightarrow I$ eines Objekts $M \in \mathcal{A}$ ist

$$\tau_{M \hookrightarrow I}: H^q(F(I)) \xrightarrow{\sim} (R^q F)(M)$$

ein Isomorphismus.

- (b) Für jeden Morphismus $f: M \rightarrow N$ in \mathcal{A} und je zwei Auflösungen $M \hookrightarrow A_M$ und $N \hookrightarrow A_N$ und jeden Lift¹⁴⁵ $\tilde{f}: A_M \rightarrow A_N$ von f kommutiert das Diagramm

$$(3.3.1) \quad \begin{array}{ccc} H^q(F(A_M)) & \xrightarrow{\tau_{M \hookrightarrow A_M}^q} & (R^q F)(M) \\ \downarrow H^q(F(\tilde{f})) & & \downarrow (R^q F)(f) \\ H^q(F(A_N)) & \xrightarrow{\tau_{N \hookrightarrow A_N}^q} & (R^q F)(N) \end{array}$$

Bemerkung 3.3.4. Es gibt auch q -te linksderivierte Funktoren, deren Definition „dual“ ist. Ausblick: Der natürliche Lebensraum für (eine allgemeinere Version von) derivierte(n) Funktoren bilden derivierte Kategorien.

3.3.5. Es gilt $(R^q F) = 0$ für alle $q < 0$ (dies folgt sofort aus (a)); Null meint hier den Nullfunktor, der jeden Modul auf den Nullmodul (und folglich jeden Morphismus auf den Nullmorphismus) schickt.

¹⁴⁴Auf jedem Objekt alias Komplex wenden wir F auf alle Komponenten und alle Differentiale an. Bei jedem Morphismus wenden wir F auf alle Komponenten an.

¹⁴⁵Es macht keinen Unterschied, ob man hier Lifts oder Homotopielifts betrachtet. Nicht für jede Wahl von A_M und A_N hat f einen Lift.

3.3.6 (Nullter rechtsderivierter Funktor). Ist F linksexakt¹⁴⁶, so ist F zusammen mit den Inversen der offensichtlichen Isomorphismen $F(M) \xrightarrow{\sim} H^0(F(A))$ ein nullter Rechtsderivierter von F , man kann also (wegen der in 3.3.10 erklärten Eindeutigkeit) $R^0F = F$ schreiben.¹⁴⁷

3.3.7. Ist F exakt, so ist der Nullfunktor $(R^qF) := 0$ für alle $q > 0$ ein q -ter rechtsderivierter Funktor von F .

3.3.8. Ist $I \in \mathcal{A}$ ein injektives Objekt, so gilt

$$(R^qF)(I) = \begin{cases} (R^0F)(I) \xrightarrow[\sim]{\tau_{I \rightarrow I}} F(I) & \text{für } q = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 3.3.9. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven und sei $q \in \mathbb{Z}$. Dann besitzt jeder additive Funktor $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ in eine beliebige abelsche Kategorie \mathcal{B} einen q -ten rechtsderivierten Funktor R^qF bzw. genauer (R^qF, τ) .

Beweis. Fixiere für jedes Objekt $M \in \mathcal{A}$ eine injektive Auflösung $M \hookrightarrow I_M$, was nach 3.2.2 möglich ist, und definiere

$$(R^qF)(M) := H^q(F(I_M)).$$

Ist $f: M \rightarrow N$ ein Morphismus in \mathcal{A} , so hat er nach Korollar 3.2.9 des Hauptlemmas der homologischen Algebra genau einen Homotopielift $f': I_M \rightarrow I_N$ zwischen den fixierten injektiven Auflösungen. Definiere

$$(R^qF)(f) := H^q(F(f')).$$

Es gilt $(R^qF)(\text{id}_M) = \text{id}_{(R^qF)(M)}$, denn der eindeutige Homotopielift der Identität ist die Identität. Für $L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N$ gilt $(R^qF)(f) \circ (R^qF)(g) = (R^qF)(f \circ g)$, denn sind f' und g' Homotopielifts von f und g , so ist $f' \circ g'$ ein Homotopielift von $f \circ g$ und muss somit mit dessen einzigem Homotopielift $(f \circ g)'$ übereinstimmen.

Dies definiert den Funktor $(R^qF): \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Sei nun $M \hookrightarrow A$ eine Auflösung. Wieder nach Korollar 3.2.9 des Hauptlemmas gibt es einen eindeutigen Homotopielift $\alpha: A \rightarrow I_M$ von id_M . Wir definieren

$$\tau_{M \hookrightarrow A} := H^q(F(\alpha)): H^q(F(A)) \rightarrow H^q(F(I_M)) = (R^qF)(M).$$

Zu (a) in Definition 3.3.3: Im Falle, dass $M \hookrightarrow A$ eine injektive Auflösung ist, gibt es auch einen eindeutigen Homotopielift $\mu: I_M \rightarrow A$ von id_M . Die Eindeutigkeit der Homotopielifts impliziert, dass μ und α zueinander inverse Isomorphismen in $\text{Hot}(\mathcal{A})$ sind. Da jeder Funktor Isomorphismen auf Isomorphismen abbildet, ist $\tau_{M \hookrightarrow A} = H^q(F(\alpha))$ invertierbar.

Zu (b) in Definition 3.3.3: Seien $f: M \rightarrow N$, $M \hookrightarrow A_M$, $N \hookrightarrow A_N$ und \tilde{f} wie dort angegeben. Wir betrachten \tilde{f} als Morphismus in $\text{Hot}(\mathcal{A})$. Sei $\alpha_M: A_M \rightarrow I_M$ der Homotopielift von id_M und sei $\alpha_N: A_N \rightarrow I_N$ der Homotopielift von id_N . Sei $f': I_M \rightarrow I_N$ wie oben. Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A_M & \xrightarrow{\alpha_M} & I_M \\ \downarrow \tilde{f} & & \downarrow f' \\ A_N & \xrightarrow{\alpha_N} & I_N \end{array}$$

kommutativ in $\text{Hot}(\mathcal{A})$, denn sowohl $f' \circ \alpha_M$ als auch $\alpha_N \circ \tilde{f}$ sind Homotopielifts von $f \circ \text{id}_M = f = \text{id}_N \circ f: M \rightarrow N$, die somit nach dem Korollar aus dem Hauptlemma übereinstimmen müssen (das Korollar ist anwendbar, denn $M \hookrightarrow A_M$ ist eine Auflösung und $N \hookrightarrow I_N$ ist eine injektive Auflösung). Wenden wir die Verknüpfung $\text{Hot}(\mathcal{A}) \xrightarrow{F} \text{Hot}(\mathcal{B}) \xrightarrow{H^q} \mathcal{B}$ auf dieses Diagramm an, so erhalten wir das gesuchte kommutative

¹⁴⁶Mir ist keine Anwendung rechtsderivierter Funktoren bekannt, wo dies nicht der Fall ist

¹⁴⁷Wenn man nicht voraussetzt, dass F linksexakt ist, aber annimmt, dass ein nullter Rechtsderivierter R^0F existiert, so gibt es eine kanonische natürliche Transformation $F \rightarrow R^0F$. Diese ist eine Isotransformation, falls F linksexakt ist.

Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{H}^q(F(A_M)) & \xrightarrow{\tau_{M \hookrightarrow A_M} = \mathrm{H}^q(F(\alpha_M))} & \mathrm{H}^q(F(I_M)) = (\mathbf{R}^q F)(M) \\
 \downarrow \mathrm{H}^q(F(\tilde{f})) & & \mathrm{H}^q(F(f')) = (\mathbf{R}^q F)(f) \downarrow \\
 \mathrm{H}^q(F(A_N)) & \xrightarrow{\tau_{N \hookrightarrow A_N} = \mathrm{H}^q(F(\alpha_N))} & \mathrm{H}^q(F(I_N)) = (\mathbf{R}^q F)(N)
 \end{array}$$

□

3.3.10. Eindeutigkeit in Vorlesung nur erwähnen. Ein q -ter Rechtsderivierter ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus (wie in Aufgabe 3.3.11 genau erklärt). Wir verwenden deshalb den bestimmten Artikel und sprechen von *dem* q -ten rechtsderivierten Funktor.

Aufgabe 3.3.11 (Eindeutigkeit eines q -ten Rechtsderivierten bis auf eindeutigen Isomorphismus). Seien $(\mathbf{R}^q F, \tau)$ und $(\mathbf{R}'^q F, \tau')$ q -te linksderivierte Funktoren von F . Dann gibt es genau einen Isomorphismus

$$\sigma: \mathbf{R}^q F \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}'^q F$$

von Funktoren, so dass für alle Auflösungen $M \hookrightarrow A$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\tau_{M \hookrightarrow A}} & \mathbf{R}^q F(M) \\
 \mathrm{H}^q(F(A)) & \searrow \tau'_{M \hookrightarrow A} & \downarrow \sigma_M \sim \\
 & & (\mathbf{R}'^q F)(M)
 \end{array}$$

kommutiert.¹⁴⁸

3.3.12. Die Verallgemeinerung des Satzes über die lange exakte Kohomologiesequenz (siehe [Sch21, Satz B.3.4]) auf abelsche Kategorien gilt ebenfalls. Wir verwenden dies im Folgenden ohne Beweis. Im Rahmen unserer Anwendungen auf Garben abelscher Gruppen benötigen wir diese Verallgemeinerung nur für Kategorien der Form $\mathrm{Sh}(X; \mathrm{Ab})$, in denen sie leicht zu zeigen ist: Per Halm-Nehmen führt man sie auf den bekannten Fall zurück.

Satz 3.3.13 (Lange exakte Sequenz der Rechtsderivierten). *Sei $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien, wobei \mathcal{A} genug Injektive habe. Dann liefert jede kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow L \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} N \rightarrow 0$ in \mathcal{A} eine exakte Sequenz*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \delta_{q+1} & \rightarrow & \mathrm{R}^{q+1} F(L) & \longrightarrow & \dots & & \\
 \delta_q & \rightarrow & \mathrm{R}^q F(L) & \xrightarrow{\mathrm{R}^q F(\iota)} & \mathrm{R}^q F(M) & \xrightarrow{\mathrm{R}^q F(\pi)} & \mathrm{R}^q F(N) \\
 & & & & \dots & \longrightarrow & \mathrm{R}^{q-1} F(N) \\
 \delta_1 & \rightarrow & \mathrm{R}^1 F(L) & \longrightarrow & \dots & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathrm{R}^0 F(L) & \xrightarrow{\mathrm{R}^0 F(\iota)} & \mathrm{R}^0 F(M) & \xrightarrow{\mathrm{R}^0 F(\pi)} & \mathrm{R}^0 F(N)
 \end{array}$$

in \mathcal{B} für geeignete Verbindungsmorphismen δ_q .

Unser Beweis gibt eine Konstruktion der Verbindungsmorphismen. Ohne Beweis:

- Die konstruierten Verbindungsmorphismen hängen nicht von Wahlen ab (sie hängen also nur von der betrachteten kurzen exakten Sequenz ab).
- Unsere Konstruktion ist funktoriell: Jeder Morphismus kurzer exakter Sequenzen liefert einen Morphismus zwischen den zugehörigen langen exakten Sequenzen der Rechtsderivierten.

¹⁴⁸Man könnte auch zeigen, dass $(\mathbf{R}^q F, \tau)$ initial bezüglich aller Paare (G, γ) ist, wobei $G: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und die $\gamma_{M \hookrightarrow A}: \mathrm{H}^q(F(A)) \rightarrow G(M)$ eine zu (b) in Definition 3.3.3 analoge Bedingung erfüllen. Dies liefert eine Beschreibung durch eine universelle Eigenschaft und somit die Eindeutigkeit.

Beides kann man simultan von Hand beweisen, vgl. auch [Soe21, Lange exakte Sequenz der derivierten Funktoren].

3.3.14. Ist F linksexakt, so gilt $R^0F = F$ (siehe 3.3.6 und 3.3.10) und die angegebene lange exakte Sequenz ist eine unendlich lange exakte Fortsetzung der exakten Sequenz $0 \rightarrow F(L) \xrightarrow{F(\iota)} F(M) \xrightarrow{F(\pi)} F(N)$ nach rechts; daher vermutlich der Name *rechtsderivierter Funktor*.

Beispielsweise ist $R^0F(\pi)$ genau dann ein Epimorphismus, wenn der Kern von $R^1F(L) \rightarrow R^1F(M)$ verschwindet. Letzteres ist beispielsweise der Fall, wenn $R^1F(L) = 0$ gilt oder wenn $R^1F(L) \rightarrow R^1F(M)$ ein Monomorphismus ist.

Beweis. Seien $L \xrightarrow{i} I$ und $N \xrightarrow{j} J$ injektive Auflösungen. Wir konstruieren aus ihnen auf geschickte Art eine injektive Auflösung von M . (Diese Konstruktion wird Hufeisen-Lemma oder *horseshoe lemma* genannt, etwa in [Wei94, Lemma 2.2.8]. Der Grund für den Namen ist, dass die kurze exakte Sequenz $L \hookrightarrow M \rightarrow N$ zusammen mit den beiden Auflösungen I und J eine hufeisenförmige Gestalt hat; sie wird sichtbar, wenn man im Diagramm unten das Objekt $I^0 \oplus J^0$ samt adjazenter Pfeile weglässt.) Betrachte das folgende Diagramm zunächst ohne den gestrichelten Morphismus

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{\iota} & M & \xrightarrow{\pi} & N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow i & & \downarrow \begin{pmatrix} \hat{i} \\ j\pi \end{pmatrix} & & \downarrow j \\ 0 & \longrightarrow & I^0 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & I^0 \oplus J^0 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0,1 \end{pmatrix}} & J^0 \longrightarrow 0. \end{array}$$

Weil I^0 injektiv ist und ι ein Monomorphismus ist, gibt es einen Morphismus $\hat{i}: M \rightarrow I^0$ mit $\hat{i} \circ \iota = i$. Dies erklärt den gestrichelten Morphismus, und Kommutativität des Diagramms ist offensichtlich. Fasst man dieses Diagramm als kurze exakte Sequenz von Komplexen auf, indem man die Spalten durch Nullen zu Komplexen ergänzt, so liefert die lange exakte Kohomologiesequenz (siehe 3.3.12) einerseits die Monomorphie des gestrichelten Morphismus und andererseits eine kurze exakte Sequenz zwischen den Kokernen der vertikalen Abbildungen. Da die Abbildungen $I^0 \rightarrow I^1$ bzw. $J^0 \rightarrow J^1$ als $I^0 \rightarrow \text{cok}(i) \hookrightarrow I^0$ bzw. $J^0 \rightarrow \text{ker}(j) \hookrightarrow J^1$ faktorisieren, können wir den Konstruktionsschritt iterieren. Wir erhalten so eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow I \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} K \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0,1 \end{pmatrix}} J \rightarrow 0$$

in $\text{Kom}(\mathcal{A})$, wobei K ein Komplex ist, dessen p -te Komponente das injektive Objekt $I^p \oplus J^p$ ist¹⁴⁹ und deren Mitglieder die Objekte in $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ kompatibel injektiv auflösen. (Die injektive Auflösung $M \hookrightarrow K$ ist die geschickt aus I und J konstruierte Auflösung.)

Man beachte, dass diese kurze exakte Sequenz komponentenweise spaltet (damit meinen wir die Trivialität, dass jede kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow I^t \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} I^t \oplus J^t \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0,1 \end{pmatrix}} J^t \rightarrow 0$ spaltet). Dies hat zur Folge, dass alle Komponenten von

$$0 \rightarrow F(I) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} F(K) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0,1 \end{pmatrix}} F(J) \rightarrow 0$$

(in offensichtlicher Weise spaltende) kurze exakte Sequenzen sind, wir es also mit einer kurzen exakten Sequenz in $\text{Kom}(\mathcal{B})$ zu tun haben. Der Anfang der zugeordneten langen exakten Kohomologiesequenz (siehe 3.3.12) ist in der oberen Zeile des folgenden Diagramms teilweise dargestellt.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(F(I)) & \longrightarrow & H^0(F(K)) & \longrightarrow & H^0(F(J)) \longrightarrow H^1(F(I)) \xrightarrow{\delta^1} \dots \\ & & \downarrow \tau_{L \hookrightarrow I} & & \downarrow \tau_{M \hookrightarrow K} & & \downarrow \tau_{N \hookrightarrow J} & & \downarrow \tau_{L \hookrightarrow I} \\ & & (R^0F)(L) & \longrightarrow & (R^0F)(M) & \longrightarrow & (R^0F)(N) & & (R^1F)(L) \quad \dots \end{array}$$

Nach Definition der derivierten Funktoren sind die vertikalen Pfeile Isomorphismen und die Quadrate kommutieren. Nun definiert man die gesuchten Verbindungsmorphismen in offensichtlicher Weise. \square

¹⁴⁹Warnung: K ist nicht die direkte Summe $I \oplus J$ als Komplex. Die Differentiale von K haben die Gestalt $\begin{pmatrix} d_I & \delta' \\ 0 & d_J \end{pmatrix}$ für geeignete $\delta^t: J^t \rightarrow I^{t+1}$. Die Notation suggeriert und es stimmt, dass diese mit den gleich auftauchenden Verbindungsmorphismen zu tun haben. Der Leser mag sich dies überlegen.

3.4. Definition der Garbenkohomologie.

Definition 3.4.1. Sei X ein topologischer Raum und $q \in \mathbb{Z}$ (nur der Fall $q \geq 0$ ist interessant). Ist \mathcal{F} eine Garbe abelscher Gruppen auf X , so heißt die abelsche Gruppe

$$H^q(X; \mathcal{F}) := (R^q \Gamma)(\mathcal{F})$$

die q -te (**Garben-)**Kohomologie von X mit Werten in \mathcal{F} (oder mit Koeffizienten in \mathcal{F}). In Worten ist die q -Garbenkohomologie also der Wert des q -ten Rechtsderivierten des (linksexakten, vgl. 3.4.3) Globale-Schnitte-Funktors $\Gamma = \Gamma(X, -): \text{Sh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{Ab}$.

Dass dies wohldefiniert ist, folgt aus Proposition 3.1.14 und Satz 3.3.9.

3.4.2. Offensichtlich ist die q -Garbenkohomologie ein Funktor $H^q(X; -): \text{Sh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{Ab}$.

3.4.3. Nach 3.3.6 gilt $H^0(X; \mathcal{F}) = \Gamma(\mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$, da Γ linksexakt ist (denn Γ alias c_* für $c: X \rightarrow \{*\}$ (siehe 2.8.2) ist als Rechtsadjungierter linksexakt).

3.4.4. Um Verwechslungen etwa mit singulärer Kohomologie zu vermeiden, kann man Dekorationen anbringen und etwa $H_{\text{Sh}}^q(X; \mathcal{F})$ schreiben.

3.4.5. Wir verwenden die folgenden Abkürzungen:

- $H^q(Z; \mathcal{F}) := H^q(Z; \mathcal{F}|_Z)$, falls $Z \subset X$ eine Teilmenge ist.
- $H^q(X; A) := H^q(X; A_X)$, falls A eine abelsche Gruppe ist.
- $H^q(X) := H^q(X; \mathbb{Z}) = H^q(X; \mathbb{Z}_X)$.

3.4.6 (Garbenkohomologie als Erweiterungsgruppe - für diejenigen, die Erweiterungsgruppen kennen). Ist \mathcal{A} eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven, so gilt

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^q(M, N) = R^q \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) := (R^q \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, -))(N) = (R^q \mathcal{A}(M, -))(N).$$

Wegen $\text{Sh}(\mathbb{Z}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(X) = \Gamma(\mathcal{F})$ (Spezialfall etwa von (2.15.1)) natürlich in \mathcal{F} folgt

$$\text{Ext}_{\text{Sh}(X; \text{Ab})}^q(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^q(X; \mathcal{F}).$$

Ausblick: Wer Yoneda-Produkte $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^p(M, N) \times \text{Ext}^q(L, M) \rightarrow \text{Ext}^{p+q}(L, N)$ kennt¹⁵⁰, folgert beispielsweise, dass die totale Kohomologie $H(X) := \bigoplus_{q \in \mathbb{N}} H^q(X)$ ein (graduierter) Ring ist und dass die totale Kohomologie $H(X; \mathcal{F}) := \bigoplus_{q \in \mathbb{N}} H^q(X; \mathcal{F})$ ein (graduierter) Modul über $H(X)$ ist.

Auf geeigneten topologischen Räumen sind Garbenkohomologie $H(X) = H_{\text{Sh}}(X)$ und singuläre Kohomologie $H_{\text{sing}}(X) := \bigoplus H_{\text{sing}}^q(X; \mathbb{Z})$ als graduierte Ringe isomorph.

Ende der 20. Vorlesung am 01.07.2021.

Hausaufgaben:

- (1) Aufgabe 3.1.12: Tensor-Hom-Adjunktion
- (2) Aufgabe 3.1.13: Einbettung in injektive abelsche Gruppe funktoriell, aber nicht additiv
- (3) Aufgabe 3.2.3: genug flache
- (4) Berechne die Garbenkohomologie $H^q(X; A_{(x)})$ eines Wolkenkratzers! (vgl. Proposition 1.7.8)
- (5) Bonus: Beweise die roten Aussagen in Satz 3.3.13
- (6) Bonus: Aufgabe 3.3.11: Eindeutigkeit Rechtsderivierte

3.4.7 (Lange exakte Sequenz der Garbenkohomologie). Ist $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$ eine kurze exakte Sequenz abelscher Garben auf einem topologischen Raum X , so erhalten wir nach Satz 3.3.13 und 3.3.6 eine lange exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \underbrace{H^0(X; \mathcal{F}')}_{=\mathcal{F}'(X)} \hookrightarrow \underbrace{H^0(X; \mathcal{F})}_{=\mathcal{F}(X)} \rightarrow \underbrace{H^0(X; \mathcal{F}'')}_{=\mathcal{F}''(X)} \rightarrow H^1(X; \mathcal{F}') \rightarrow H^1(X; \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X; \mathcal{F}'') \rightarrow H^2(X; \mathcal{F}') \rightarrow \dots$$

¹⁵⁰Unter der Interpretation $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^p(M, N) \cong D_{\mathcal{A}}(M, N[p])$ von Erweiterungsgruppen als Morphismengruppen in der derivierten Kategorie $D(\mathcal{A})$ entspricht dies der Verknüpfung (samt Shift) von Morphismen.

Ausblick 3.4.8 (Für diejenigen, die derivierte Kategorien kennen). Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie mit genügend Injektiven. Relativ einfach zeigt man, dass es für jeden nach unten (also in Gegenpfeilrichtung) beschränkten Komplex A in \mathcal{A} einen Quasi-Isomorphismus $A \rightarrow I$ in einen nach unten beschränkten Komplex injektiver Objekte gibt, den man ebenfalls als injektive Auflösung von A bezeichnet (vgl. 3.2.6). Wir fixieren nun für jedes solche A einen solchen Quasi-Isomorphismus $A \rightarrow I_A$.

Ist $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor zwischen abelschen Kategorien, so ist der rechtsderivierte Funktor

$$RF: D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D^+(\mathcal{B})$$

auf Objekten durch $A \mapsto RF(A) := F(I_A)$ definiert.¹⁵¹ Man kann diese Definition sinnvoll auf Morphismen ausdehnen.¹⁵²

Vermutlich bekannt ist der p -te rechtsderivierte Funktor R^pF : Ist $A \in \mathcal{A}$ ein Objekt, das wir auch als im Grad Null konzentrierten Komplex und damit als Objekt der derivierten Kategorie auffassen können, so gilt

$$R^pF(A) = H^p(RF(A)).$$

Alternativ und etwas genauer ist der p -te derivierte Funktor von F die Verknüpfung

$$\mathcal{A} \rightarrow D^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{RF} D^+(\mathcal{B}) \xrightarrow{H^p} \mathcal{B}.$$

Es ist zwar technisch etwas anspruchsvoller, aber sehr vorteilhaft und immer üblicher, mit unbeschränkten derivierten Kategorien zu arbeiten. Ist \mathcal{A} eine Grothendieck-Kategorie, so hat jeder (möglicherweise) unbeschränkte Komplex A eine sogenannte *homotopie-injektive*¹⁵³ Auflösung $A \rightarrow I_A$ (wenn gewünscht mit injektiven Komponenten) und RF lässt sich per $RF(A) := F(I_A)$ auf die (unbeschränkte) derivierte Kategorie $D(\mathcal{A})$ zu einem Funktor

$$RF: D(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{B})$$

ausdehnen.

Anwendung: Ist $f: Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung, so ist erhalten wir den Funktor

$$Rf_*: D(Y) \rightarrow D(X),$$

wobei wir abkürzen $D(X) := D(\text{Sh}(X; \text{Ab}))$ und analog für $D(Y)$.

Der Funktor $f^*: \text{Sh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(Y; \text{Ab})$ ist exakt und induziert deshalb in trivialer Weise einen (mit demselben Symbol bezeichneten) Funktor

$$f^*: D(X) \rightarrow D(Y).$$

Die Adjunktion (f^*, f_*) auf dem Level abelscher Kategorien induziert eine Adjunktion (f^*, Rf_*) auf dem Level derivierter Kategorien.

Die „Bifunktoren“ \otimes und $\mathcal{H}om$ lassen sich ebenfalls derivieren und man erhält das linksderivierte Tensorprodukt

$$\otimes^L: D(X) \times D(X) \rightarrow D(X)$$

(hier verwendet man im nach oben beschränkten Fall flache Auflösungen $F \rightarrow A$ und im unbeschränkten Fall h-flache Auflösungen $F \rightarrow A$) und den rechtsderivierten Funktor

$$R\mathcal{H}om: D(X)^{\text{op}} \times D(X) \rightarrow D(X)$$

(etwas per h-injektiver Auflösungen in der zweiten Komponente).

Alle Kompatibilitäten zwischen Funktoren zwischen Garbenkategorien, die wir bewiesen haben, haben Analoga im derivierten Setting: Beispielsweise gilt

$$D_X(\mathcal{A} \otimes^L \mathcal{B}, \mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} D_X(\mathcal{A}, R\mathcal{H}om(\mathcal{B}, \mathcal{C}))$$

als Verallgemeinerung von (2.16.3) für alle $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in D(X)$. Auch die Garbenversion (2.16.5) hat auf deriviertem Level das Analogon den Isomorphismus

$$(3.4.1) \quad R\mathcal{H}om(\mathcal{A} \otimes^L \mathcal{B}, \mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om(\mathcal{A}, R\mathcal{H}om(\mathcal{B}, \mathcal{C}))$$

¹⁵¹Hier bezeichnet $D^+(\mathcal{A})$ der Einfachheit halber die derivierte Kategorie aller nach unten beschränkter Komplexe in \mathcal{A} . Sie ist äquivalent zur vollen Unterkategorie von $D(\mathcal{A})$ derjenigen Objekte mit nach unten beschränkter Kohomologie.

¹⁵²Genauer ist ein rechtsderivierter Funktor von ... ein Funktor ... zusammen mit einer natürlichen Transformation ..., so dass ...

¹⁵³In der Literatur meist *h-injektiv* oder *K-injektiv*, weil K klassisch für die Homotopiekategorie verwendet wird.

in $D(X)$. Ähnlich verallgemeinert (2.16.6) zu

$$Rf_* R\mathcal{H}om_Y(f^* \mathcal{A}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_X(\mathcal{A}, Rf_* \mathcal{B}).$$

3.5. Derivieren mit azyklischen Auflösungen.

Definition 3.5.1. Sei A ein Komplex in einer additiven Kategorie \mathcal{A} und sei $n \in \mathbb{Z}$. Der **um n verschobene Komplex** $A[n]$ ist wie folgt definiert:

- $(A[n])^q := A^{n+q}$,
- $d_{A[n]}^q := (-1)^n d_A^{n+q}$.

Ist $f: A \rightarrow B$ ein Morphismus in $\text{Kom}(\mathcal{A})$, so definiere $f[n]$ durch $(f[n])^q := f^{n+q}$. Damit wird $[n]: \text{Kom}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Kom}(\mathcal{A})$ ein additiver Funktor.

Warnung 3.5.2. Ist A im Grad Null konzentriert, so ist $A[-1]$ im Grad 1 konzentriert und $A[1]$ ist im Grad -1 konzentriert!

3.5.3. Es gilt $A[n][m] = A[n+m]$. Ich schreibe auch gerne $[n]A$ statt $A[n]$, denn Funktoren schreibt man ja meist links des Arguments.

In der Literatur ist auch die Schreibweise $\Sigma := [1]$ üblich. Dann gilt $\Sigma^n A = A[n]$.

Definition 3.5.4. Sei $f: A \rightarrow B$ ein Morphismus von Komplexen in einer additiven Kategorie \mathcal{A} . Der **Abbildungskegel von f** ist der wie folgt definierte Komplex $K(f) \in \text{Kom}(\mathcal{A})$:

- $K(f)^q := B^q \oplus A^{q+1}$
- Das Differential $d = d_{K(f)}^q: K(f)^q \rightarrow K(f)^{q+1}$ ist definiert durch

$$\begin{pmatrix} d & f \\ 0 & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_B^q & f^{q+1} \\ 0 & -d_A^{q+1} \end{pmatrix}: B^q \oplus A^{q+1} \rightarrow B^{q+1} \oplus A^{q+2}$$

Dies definiert einen Komplex $K(f)$, denn der Leser prüft leicht $d^2 = 0$.

3.5.5. Die Morphismen

$$B^q \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} K(f)^q \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} A^{q+1}$$

in \mathcal{A} definieren Morphismen

$$(3.5.1) \quad B \xrightarrow{\text{in}_B := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} K(f) \xrightarrow{\text{pr}_A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} A[1]$$

in $\text{Kom}(\mathcal{A})$, wie der Leser leicht nachrechnet.¹⁵⁴ Offensichtlich spaltet¹⁵⁵ sie gradweise.

3.5.6 (Abbildungskegel unter additiven Funktoren). Ist $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein additiver Funktor zwischen additiven Kategorien, so gilt in offensichtlicher Weise $F(K(f)) \cong K(F(f))$ und genauer so, dass das Bild von (3.5.1) unter F mit (3.5.1) für $F(f)$ kompatibel ist.

3.5.7. Ist \mathcal{A} abelsch, so ist (3.5.1) eine kurze exakte Sequenz, die man **Abbildungskegel-(kurze-exakte-)Sequenz** nennen mag. Sie spaltet im Allgemeinen nicht.¹⁵⁶ Ihre zugehörige lange exakte Kohomologie-Sequenz (siehe 3.3.12) hat die Gestalt

$$\dots \rightarrow \underbrace{H^n(A)}_{=H^{n-1}(A[1])} \xrightarrow{H^n(f)} H^n(B) \xrightarrow{H^n(\text{in}_B)} H^n(K(f)) \xrightarrow{H^n(\text{pr}_A)} H^{n+1}(A) \xrightarrow{H^{n+1}(f)} H^{n+1}(B) \rightarrow \dots$$

¹⁵⁴Warnung: Im Gegensatz dazu definieren die Morphismen

$$B^q \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}} K(f)^q \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} A^{q+1}$$

im Allgemeinen keine Morphismen von Komplexen.

¹⁵⁵Formal habe ich *spaltet* vermutlich nur für abelsche Kategorien definiert, aber es ist hoffentlich klar, was gemeint ist.

¹⁵⁶Sie spaltet offensichtlich im Fall $f = 0$ (denn dann gilt $K(f) = B \oplus A[1]$ als Komplexe) und präziser genau dann, wenn f homotop zur Nullabbildung ist, siehe Aufgabe 3.5.9!

Die hier etwas versteckte wesentliche Information ist, dass die Verbindungsmorphismen genau die von f auf den Kohomologien induzierten Morphismen sind - dies folgt sofort aus der Beschreibung der Verbindungsmorphismen. Insbesondere gilt: Genau dann ist f ein Quasi-Isomorphismus, wenn $K(f)$ azyklisch (= exakt als Sequenz = alle Kohomologien verschwinden) ist.

3.5.8. Der Abbildungskegel $K(f)$ der homologischen Algebra ist motiviert durch den topologischen Abbildungskegel (siehe [Sch21, Definition 5.3.1, Satz]). Gegeben eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ mag sich der Leser die genaue Beziehung zwischen $K^{\text{homologische Algebra}}(S(f))$ und $S(K^{\text{Topologie}}(f))$ überlegen. **sollte ich wohl selbst tun und ergänzen**

Aufgabe 3.5.9. Sei \mathcal{A} eine additive Kategorie. Sei $f: A \rightarrow B$ ein Morphismus in $\text{Kom}(\mathcal{A})$. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

- (a) $\text{in}_B: B \rightarrow K(f)$ hat ein Linksinverses $q: K(f) \rightarrow B$ (d. h. $q \circ \text{in}_B = \text{id}_B$);
- (b) f ist homotop zur Nullabbildung;
- (c) pr_A hat ein Rechtsinverses.

Sind diese Bedingungen erfüllt so gilt $K(f) \cong B \oplus A[1]$ als Komplexe kompatibel mit \in_B und pr_A .

Definition 3.5.10. Sei $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein additiver Funktor von einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven in eine abelsche Kategorie. Ein Objekt $J \in \mathcal{A}$ heißt **F -rechtsazyklisch**, wenn $(R^q F)(J) = 0$ für alle $q > 0$ gilt. Eine Rechtsauflösung eines Objekts durch F -rechtsazyklische Objekte heißt F -rechtsazyklische Auflösung.

3.5.11. Statt F -rechtsazyklisch sagt man oft nur F -azyklisch.

Beispiel 3.5.12. Alle injektiven Objekte von \mathcal{A} sind F -rechtsazyklisch (siehe 3.3.8).

3.5.13. Ist F exakt, so sind alle Objekte von \mathcal{A} F -rechtsazyklisch.

3.5.14. Jede direkte Summe $J \oplus J'$ F -rechtsazyklischer Objekte J, J' ist F -rechtsazyklisch (nach Aufgabe 3.5.15).

Aufgabe 3.5.15. Nachtrag Sei $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein additiver Funktor von einer abelschen Kategorie \mathcal{A} mit genug Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie \mathcal{B} . Dann sind alle rechtsderivierten Funktoren $R^q F$ additiv.

Bemerkung: Der Leser meditiere über das Verhältnis zu Aufgabe 3.1.13.

Satz 3.5.16 (Derivieren mit azyklischen Auflösungen). Sei $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein linksexakter (und somit additiver, siehe Aufgabe 2.12.22) Funktor von einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven in eine abelsche Kategorie. Ist $A \hookrightarrow J$ eine beliebige F -rechtsazyklische Auflösung eines beliebigen Objekts $A \in \mathcal{A}$, so ist $\tau_{A \hookrightarrow J} = \tau_{A \hookrightarrow J}^q$ ein Isomorphismus

$$\tau_{A \hookrightarrow J}^q: H^q(F(J)) \xrightarrow{\sim} (R^q F)(A).$$

In Worten kann man also Rechtsderivierte mit Hilfe von F -rechtsazyklischen Auflösungen ausrechnen.

3.5.17. Dieser Satz ist für konkrete Rechnungen oft sehr nützlich.

Beweis. Sei $A \hookrightarrow I$ eine injektive Auflösung. Sei $f: J \rightarrow I$ in $\text{Hot}(\mathcal{A})$ der eindeutige Homotopielift von id_A (siehe Korollar 3.2.9), der offensichtlich ein Quasi-Isomorphismus ist. Nach 3.5.7 ist der Abbildungskegel $K(f)$ azyklisch - weil er außerdem in Graden ≥ -1 konzentriert ist, können wir $K(f)$ wie im folgenden Diagramm angedeutet in kurze exakte Sequenzen aufspalten:

$$(3.5.2) \quad \begin{array}{ccccccc} & & K(f)^0 & & K(f)^1 & & K(f)^2 & & \dots \\ & \nearrow & & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ K(f)^{-1} & & & Z^1 & & Z^2 & & Z^3 & & \end{array}$$

Hierbei ist Z^p der Kern des Differentials $K(f)^p \rightarrow K(f)^{p+1}$ und jedes Teildiaagramm $\nearrow \searrow$ ist eine kurze exakte Sequenz. Der linke Monomorphismus und alle Verknüpfungen $\searrow \nearrow$ sind die Differentiale von $K(f)$.

Beachte, dass jedes $K(f)^p = I^p \oplus J^{p+1}$ als direkte Summe F -rechtsazyklischer Objekte F rechtsazyklisch ist (nach 3.5.12 und 3.5.14). Wir wenden nun die Satz 3.3.13 über die lange exakte Sequenz der Rechtsderivierten sukzessive auf unsere abzählbar vielen kurzen exakten $\nearrow \searrow$ Sequenzen an:

- Zunächst ist Z^1 F -rechtszyklisch.
- Dann ist Z^2 F -rechtszyklisch.
- Dann ist Z^3 F -rechtszyklisch.
- ...

Weil wegen der Linksexaktheit $F \cong R^0F$ gilt, folgt daraus auch, dass alle kurzen exakten Sequenzen in (3.5.2) unter F auf kurze exakte Sequenzen gehen. Folglich ist $F(K(f)) \cong K(F(f))$ azyklisch, was wiederum nach 3.5.7 zeigt, dass

$$F(f): F(J) \rightarrow F(I)$$

ein Quasi-Isomorphismus ist. Die Bedingungen (a) und (b) in Definition 3.3.3 liefern nun sofort, dass $\tau_{A \hookrightarrow J}$ ein Isomorphismus ist. \square

3.5.18. Nachträglich ergänzt: Ist in der Situation von Satz 3.5.16 A ebenfalls F -rechtszyklisch, so hat $F(J)$ in allen positiven Graden verschwindende Kohomologie und es gilt $A \xrightarrow{\sim} H^0(F(J))$. Mit anderen Worten ist $F(A) \hookrightarrow F(J)$ immer noch eine Auflösung.

Allgemeiner gilt (und folgt sofort aus Satz 3.5.16): Ist in der dortigen Situation $A \hookrightarrow K$ eine weitere F -rechtszyklische Auflösung und ist $J \rightarrow K$ ein Morphismus von Auflösungen (also ein Lift von id_A), so ist $F(J) \rightarrow F(K)$ ein Quasi-Isomorphismus.

Proposition 3.5.19 (Kriterium für F -Rechtszyklizität einer Menge von Objekten). *In Vorlesung im Beweis von Satz 4.1.9 erklären.* Sei $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein linksexakter (und somit additiver, siehe Aufgabe 2.12.22) Funktor von einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven in eine abelsche Kategorie. Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$ eine volle Unterkategorie (alias eine Teilmenge von $\text{Obj}(\mathcal{A})$) mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) Ist $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ eine kurze exakte Sequenz in \mathcal{A} , so gelten:
- Aus $A', A \in \mathcal{U}$ folgt $A'' \in \mathcal{U}$.¹⁵⁷
 - Aus $A' \in \mathcal{U}$ folgt, dass $F(A) \rightarrow F(A'')$ ein Epimorphismus ist.¹⁵⁸
- (b) Für jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$ gibt es einen Monomorphismus $A \hookrightarrow I$ in ein F -azyklisches (beispielsweise injektives, siehe 3.5.12) Objekt I in \mathcal{U} .

Dann besteht \mathcal{U} aus F -rechtszyklischen Objekten.

Beweis. Sei $U \in \mathcal{U}$. Laut Annahme gibt es einen Monomorphismus $i: U \hookrightarrow I$ in ein F -azyklisches Objekt $I \in \mathcal{U}$. Sei $Q := \text{cok}(i)$ sein Kokern. Weil F linksexakt ist, gilt $F \cong R^0F$ (siehe 3.3.6), so dass die lange exakte Sequenz der Rechtsderivierten zur kurzen exakten Sequenz $U \xrightarrow{i} I \rightarrow Q$ die Gestalt

$$0 \rightarrow F(U) \rightarrow F(I) \rightarrow F(Q) \rightarrow \underbrace{(R^1F)(U)}_{=0} \rightarrow \underbrace{(R^1F)(I)}_{=0} \rightarrow (R^1F)(Q) \rightarrow (R^2F)(U) \rightarrow \underbrace{(R^2F)(I)}_{=0} \rightarrow \dots$$

hat, wobei auch die F -Azyklizität von I verwendet wurde. Weil $F(I) \rightarrow F(Q)$ wegen $U \in \mathcal{U}$ ein Epimorphismus ist und $(R^1F)(I) = 0$ gilt, folgt $(R^1F)(U) = 0$.

Da $U \in \mathcal{U}$ beliebig war, verschwindet R^1F auf \mathcal{U} . Wegen $U, I \in \mathcal{U}$ folgt $Q \in \mathcal{U}$, so dass insbesondere $(R^1F)(Q) = 0$ gilt. Die obige lange exakte Sequenz liefert somit $(R^2F)(U) = 0$. Also verschwindet R^2F auf \mathcal{U} . Per Induktion folgt die Behauptung. \square

4. BERECHNUNG VON GARBENKOHOMOLOGIE

4.1. Welche Garben.

Definition 4.1.1. Sei X ein topologischer Raum. Eine Garbe \mathcal{F} von abelschen Gruppen (oder Mengen) auf X heißt **welk** (englisch *flabby*, französisch *flasque*), wenn für alle $U \Subset X$ Restriktion

$$\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

surjektiv ist. In Worten wird also verlangt, dass sich jeder Schnitt auf einer offenen Teilmenge zu einem globalen Schnitt fortsetzen lässt (= von einem globalen Schnitt herkommt).

4.1.2. Für welches \mathcal{F} ist jede Restriktionsabbildung $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ surjektiv, wobei $U \Subset V \Subset X$.

¹⁵⁷In Worten: Kokerne von Monomorphismen in \mathcal{A} zwischen Objekten von \mathcal{U} liegen wieder in \mathcal{U} .

¹⁵⁸In Worten: F erhält Epimorphismen mit Kern in \mathcal{U} .

4.1.3 (Einschränkung auf offene Teilmengen erhält Welkheit). Ist \mathcal{F} welk, so ist für jedes offene $U \subseteq X$ auch $\mathcal{F}|_U$ welk.

Beispiel 4.1.4. Jede Wolkenkratzergarbe $A_{(x)}$ zu einer abelschen Gruppe A ist welk.

4.1.5. Jedes Produkt von welken Garben ist welk, da Produkte von Garben naiv als Prägarbenprodukte gebildet werden (siehe Satz 2.7.1). Genauer ist ein Produkt genau dann welk, wenn jeder Faktor welk ist.

Beispiel 4.1.6. Die konstante Garbe \mathbb{Z}_X für $X = \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 1$ ist nicht welk.

Beispiel 4.1.7. Die Garbe $\mathcal{C}_{\mathbb{R}, X}$ der reellwertigen stetigen Funktionen für $X = \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 1$ ist nicht welk.

Proposition 4.1.8. Jede injektive Garbe $\mathcal{I} \in \text{Sh}(X, \text{Ab})$ ist welk.

Beweis. Sei $\mathcal{I} \in \text{Sh}(X, \text{Ab})$ zuerst beliebig. Offensichtlich ist für jede offene $U \subseteq X$ Teilmenge das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Sh}_{\text{Ab}}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{I}) & \longrightarrow & \text{Sh}_{\text{Ab}}(\mathbb{Z}_{U \subseteq X}, \mathcal{I}) \\ \sim \downarrow (2.15.1) & & \sim \downarrow (2.15.1) \\ \mathcal{I}(X) & \longrightarrow & \mathcal{I}(U) \end{array}$$

kommutativ, wobei die obere Horizontale von dem Monomorphismus $\mathbb{Z}_{U \subseteq X} \xrightarrow{(2.14.7)} \mathbb{Z}_X$ herkommt und die untere Horizontale die Restriktionsabbildung ist.

Ist nun \mathcal{I} injektiv, so ist die obere Horizontale surjektiv, was dann auch für die untere gilt – somit ist \mathcal{I} \square

Satz 4.1.9. Sei $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine kurze exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X .

- (a) Ist \mathcal{F}' welk, so induziert der Epimorphismus $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ Surjektionen $\mathcal{F}(U) \twoheadrightarrow \mathcal{F}''(U)$ für alle $U \subseteq X$ und insbesondere eine Surjektion $\Gamma(\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \Gamma(\mathcal{F}'')$ auf den globalen Schnitten.¹⁵⁹
- (b) Sind \mathcal{F}' und \mathcal{F} welk, so ist auch \mathcal{F}'' welk.

Beweis. (a) Da Einschränkung von abelschen Garben auf offene Teilmengen Exaktheit und Welkheit (siehe 4.1.3) erhält, genügt es, den Fall $U = X$ zu betrachten. Sei $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\pi} \mathcal{F}''$ unsere kurze exakte Sequenz. Sei $t \in \Gamma(\mathcal{F}'') = \mathcal{F}''(X)$ gegeben. Betrachte die Menge

$$\left\{ (V, s) \mid V \subseteq X, s \in \mathcal{F}(V) \text{ mit } \pi_V(s) = t|_V \right\}$$

der „lokalen Urbilder von t “. Diese Menge ist durch

$$(V, s) \leq (V', s') \stackrel{\text{def.}}{\iff} (V \subset V') \text{ und } (s'|_V = s)$$

partiell geordnet und genauer induktiv geordnet, weil \mathcal{F} und \mathcal{F}'' Garben sind. Also besitzt sie nach dem Zornschen Lemma ein maximales Element (M, m) . Im Fall $M = X$ sind wir fertig. Sonst sei $x \in X \setminus M$. Da $\mathcal{F}_x \twoheadrightarrow \mathcal{F}''_x$ surjektiv ist, gibt es eine offene Umgebung $W \subseteq X$ von x und ein Element $w \in \mathcal{F}(W)$ mit $\pi_W(w) = t|_W$. Wegen

$$\pi_{M \cap W}(m|_{M \cap W} - w|_{M \cap W}) = \pi_M(m)|_{M \cap W} - \pi_W(w)|_{M \cap W} = 0$$

gilt $m|_{M \cap W} - w|_{M \cap W} \in \mathcal{F}'(M \cap W)$, wobei wir hier ohne Einschränkung $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ annehmen¹⁶⁰.

Da \mathcal{F}' welk ist, gibt es einen globalen Schnitt $g \in \mathcal{F}'(X)$ (oder alternativ ein $g \in \mathcal{F}'(W)$) mit $g|_{M \cap W} = m|_{M \cap W} - w|_{M \cap W}$.

Da $g|_W + w \in \mathcal{F}(W)$ und $m \in \mathcal{F}(M)$ auf $M \cap W$ übereinstimmen, verkleben sie nach dem Garbenaxiom (eindeutig) zu einem Schnitt $\tilde{t} \in \mathcal{F}(M \cup W)$, welcher unter $\pi_{M \cup W}$ auf $t|_{M \cup W}$ geht (nach der Eindeutigkeit im Garbenaxiom). Dies widerspricht der Maximalität von (M, m) .

¹⁵⁹Alternative Formulierungen:

- Ist \mathcal{F}' welk, so ist $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ nicht nur ein Epimorphismus von Garben, sondern sogar ein Epimorphismus von Prägarben.
- Hat ein Epimorphismus von Garben einen welken Kern, so ist er bereits ein Epimorphismus von Prägarben.

Erinnerung: Dass jeder Epi von Prägarben zwischen Garben ein Epi von Garben ist, ist klar nach Korollar 2.9.11 und Proposition 2.9.12. Die umgekehrte Implikation ist falsch nach der „Standardlösung (mit der Exponentialfunktion)“ von Aufgabe 2.2.13.

¹⁶⁰Was $\mathcal{F}'(U) \subset \mathcal{F}(U)$ für alle $U \subseteq X$ bedeuten soll.

(b) Für jedes $U \subseteq X$ zeigt (a) wegen der Welkheit von \mathcal{F}' , dass die beiden Horizontalen im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \longrightarrow & \mathcal{F}''(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}''(U) \end{array}$$

surjektiv sind. Da \mathcal{F} welk ist, ist die linke Vertikale surjektiv. Also ist \mathcal{F}'' welk. \square

Satz 4.1.10. *Jede welke Garbe $\mathcal{W} \in \text{Sh}(X, \text{Ab})$ ist Γ -rechtszyklisch.*

Beweis. Die volle Unterkategorie $\mathcal{U} \subset \text{Sh}(X, \text{Ab})$ aller welken Garben erfüllt wegen Satz 4.1.9 und den Propositionen 3.1.14 und 4.1.8 alle Voraussetzungen von Proposition 3.5.19.

Hierbei kann man auch ohne Proposition 4.1.8 auskommen: Die im Beweis von Proposition 3.1.14 konstruierte injektive Garbe ist als Produkt von Wolkenkratzern welk (siehe Beispiel 4.1.4 und 4.1.5). \square

4.1.11 (Godement-Auflösung). Sei $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X, \text{Ab})$ eine Garbe abelscher Gruppen. Definiere die **Godement-Garbe** $\text{Gd}(\mathcal{F}) \in \text{Sh}(X, \text{Ab})$ zu \mathcal{F} durch

$$(4.1.1) \quad \text{Gd}(\mathcal{F})(U) := \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

für $U \subseteq X$ mit offensichtlichen Restriktionen. Manchmal wird $\text{Gd}(\mathcal{F})$ als *Garbe der unstetigen Schnitte von \mathcal{F}* bezeichnet, denn ein Element $s = (s(x))_{x \in X} \in \text{Gd}(\mathcal{F})(U)$ kann als mengentheoretischer, nicht notwendig stetiger Schnitt $s: U \rightarrow \text{ét}(\mathcal{F})$, $x \mapsto s(x)$, von $\text{ét}(\mathcal{F}) \rightarrow X$ aufgefasst werden. Die Godement-Garbe ist das Produkt der Wolkenkratzer aller Halme von \mathcal{F} an den jeweiligen Punkten, in Formeln $\text{Gd}(\mathcal{F}) := \prod_{x \in X} (\mathcal{F}_x)_{(x)}$.

Offensichtlich ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &: \rightarrow \text{Gd}(\mathcal{F}), \\ \mathcal{F}(U) \ni s &\mapsto (s_x)_{x \in U}, \end{aligned}$$

ein Monomorphismus in eine welke Garbe.¹⁶¹

Setze $\mathcal{G}^0(\mathcal{F}) := \text{Gd}(\mathcal{F})$ und sei $d^{-1}: \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}^0(\mathcal{F})$ die obige Einbettung. Definiere $\mathcal{G}^1 := \text{Gd}(\text{cok}(d^{-1}))$ und betrachte die Verknüpfung $d^0: \mathcal{G}^0(\mathcal{F}) \rightarrow \text{cok}(d^{-1}) \hookrightarrow \mathcal{G}^1$. Definiere $\mathcal{G}^2 := \text{Gd}(\text{cok}(d^0))$ und betrachte die Verknüpfung $d^1: \mathcal{G}^1(\mathcal{F}) \rightarrow \text{cok}(d^0) \hookrightarrow \mathcal{G}^2$. Iterieren wir dies, so erhalten wir ähnlich wie in 3.2.2 eine welke Auflösung (= Rechtsauflösung durch welke Garben)

$$\mathcal{F} \xrightarrow{d^{-1}} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{G}^2 \rightarrow \dots$$

von \mathcal{F} , die sogenannte **Godement-Auflösung**. Sie berechnet die Garbenkohomologie von \mathcal{F} nach Satz 4.1.10 und Satz 3.5.16.

Ende der 21. Vorlesung am 06.07.2021.

4.1.12 (Mayer-Vietoris-Sequenz der Garbenkohomologie). Sei $X = U \cup V$ eine offene Überdeckung eines topologischen Raums X . Für beliebiges $\mathcal{A} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ ist

$$0 \rightarrow \mathcal{A}(X) \xrightarrow{s \mapsto (s|_U, s|_V)} \mathcal{A}(U) \oplus \mathcal{A}(V) \xrightarrow{(a,b) \mapsto a|_{U \cap V} - b|_{U \cap V}} \mathcal{A}(U \cap V)$$

eine exakte Sequenz, wie sofort aus dem Garbenaxiom folgt. Ist \mathcal{A} sogar welk, so ist die rechte Abbildung surjektiv und wir erhalten eine kurze exakte Sequenz

$$\mathcal{A}(X) \hookrightarrow \mathcal{A}(U) \oplus \mathcal{A}(V) \twoheadrightarrow \mathcal{A}(U \cap V).$$

¹⁶¹Zwei alternative Sichtweisen:

- In der Notation vom Beweis von Proposition 3.1.14 gilt $\text{Gd}(\mathcal{F}) = \prod_{x \in X} (\mathcal{F}_x)_{(x)} \cong \prod_{x \in X} (i_x)_*(i_x)^*(\mathcal{F})$. Der Morphismus $\mathcal{F} \rightarrow \text{Gd}(\mathcal{F})$ wird mit dem offensichtlichen Monomorphismus $\mathcal{F} \hookrightarrow \prod_{x \in X} (i_x)_*\mathcal{I}(x)$ identifiziert. (Wenn man also im Beweis von Proposition 3.1.14 statt der dortigen Morphismus $m(x)$ in Injektive die Identitäten $\text{id}: i_x^*\mathcal{A} \rightarrow i_x^*\mathcal{A}$ verwendet, erhält man die Godement-Einbettung.)
- Sei X^{disc} die Menge X mit der diskreten Topologie und $h: X^{\text{disc}} \rightarrow X$ die offensichtliche stetige Abbildung. Dann gilt $h_*h^*\mathcal{F} \cong \text{Gd}(\mathcal{F})$ und der Adjunktionsmorphismus $\mathcal{F} \rightarrow h_*h^*\mathcal{F}$ wird mit der Einbettung $\mathcal{F} \hookrightarrow \text{Gd}(\mathcal{F})$ identifiziert.

Sei nun $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{W}$ eine (etwa injektive) Auflösung einer abelschen Garbe $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$. Wir erhalten nach dem Obigen eine kurze exakte Sequenz

$$\mathcal{W}(X) \hookrightarrow \mathcal{W}(U) \oplus \mathcal{W}(V) \twoheadrightarrow \mathcal{W}(U \cap V)$$

von Komplexen, die man auch als

$$(4.1.2) \quad \Gamma(X; \mathcal{W}) \hookrightarrow \Gamma(U; \mathcal{W}|_U) \oplus \Gamma(V; \mathcal{W}|_V) \twoheadrightarrow \Gamma(U \cap V; \mathcal{W}|_{U \cap V})$$

schreiben kann (oft schreibt man abkürzend $\Gamma(U; \mathcal{W})$ statt $\Gamma(U; \mathcal{W}|_U)$). Da Einschränken auf offene Teilmengen exakt ist und Welkheit erhält (siehe 4.1.3; es erhält übrigens auch Injektivität, siehe 3.1.6), sind auch $\mathcal{F}|_U \hookrightarrow \mathcal{W}|_U$ und $\mathcal{F}|_V \hookrightarrow \mathcal{W}|_V$ und $\mathcal{F}|_{U \cap V} \hookrightarrow \mathcal{W}|_{U \cap V}$ welche Auflösungen, die wir somit zur Berechnung der Garbenkohomologie verwenden können (Satz 4.1.10 und Satz 3.5.16). Die lange exakte Kohomologie-Sequenz zur kurzen exakten Sequenz (4.1.2) liefert eine lange exakte Sequenz

$$(4.1.3) \quad \dots \rightarrow H^q(X; \mathcal{F}) \rightarrow H^q(U; \mathcal{F}) \oplus H^q(V; \mathcal{F}) \rightarrow H^q(U \cap V; \mathcal{F}) \rightarrow H^{q+1}(X; \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

Sie heißt **Mayer-Vietoris-Sequenz der Garbenkohomologie**. Die Existenz injektiver (und damit welcher) Auflösungen zeigt, dass diese Sequenz und insbesondere die Verbindungsmorphismen nicht von der Wahl der welchen Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{W}$ abhängen. Die Mayer-Vietoris Sequenz ist natürlich in $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$.

4.2. Garbenkohomologie der reellen Zahlengeraden.

Definition 4.2.1. Sei X ein topologischer Raum. Eine Garbe \mathcal{F} von abelschen Gruppen (oder Mengen) auf X heißt **punktweich**, wenn für alle $x \in X$ die Abbildung

$$\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}_x$$

surjektiv ist.¹⁶² In Worten wird also verlangt, dass jeder Keim von \mathcal{F} von einem globalen Schnitt herkommt.

4.2.2. Jede welke Garbe ist punktweich, denn jedes Element von \mathcal{F}_x hat die Gestalt s_x für eine geeignete offene Umgebung $U \ni x$ von x und ein $s \in \mathcal{F}(U)$. Ist \mathcal{F} welk, so kommt s von einem globalen Schnitt her.

4.2.3 (Einschränkung auf beliebige Teilmengen erhält Punktweichheit). Ist \mathcal{F} punktweich, so ist für jede Teilmenge $L \subset X$ auch $\mathcal{F}|_L$ punktweich. Am einfachsten sieht man das, wenn man an die zugehörigen étalen Räume denkt. **Allgemeiner ist mit \mathcal{F} auch jeder Pullback $f^* \mathcal{F}$ entlang einer stetigen Abbildung punktweich.**

Beispiel 4.2.4. Jede konstante Garbe A_X ist punktweich.

Beispiel 4.2.5. Die Garbe $\mathcal{C}_{\mathbb{R}, X}$ der reellwertigen stetigen Funktionen für $X = \mathbb{R}^n$ ist punktweich (wieso?). Dasselbe gilt, wenn X eine beliebige topologische Mannigfaltigkeit ist (wieso?).

4.2.6 (Quotienten punktweicher Garben sind punktweich). Ist $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$ ein Epimorphismus von Garben, so ist mit \mathcal{F} auch \mathcal{Q} punktweich. Das folgt sofort aus den Surjektionen im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \twoheadrightarrow & \mathcal{Q}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_x & \twoheadrightarrow & \mathcal{Q}_x \end{array}$$

für beliebiges $x \in X$.

Satz 4.2.7. Seien $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlengeraden und $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine kurze exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen auf D .

- (a) Ist \mathcal{F}' punktweich, so induziert der Epimorphismus $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine Surjektion $\Gamma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(D) \twoheadrightarrow \mathcal{F}''(D) = \Gamma(\mathcal{F}'')$ auf den globalen Schnitten.
- (b) Ist \mathcal{F}' punktweich und ist \mathcal{F} welk, so ist auch \mathcal{F}'' welk.

¹⁶² Äquivalent: Wenn für alle $x \in X$ die Eins $\mathcal{F} \rightarrow i(x)_* i(x)^* \mathcal{F}$ der Adjunktion unter Γ auf eine surjektive Abbildung abgebildet wird, wobei $i(x): \{x\} \hookrightarrow X$ die Inklusion bezeichnet.

Beweis. (a) Sei $s'' \in \mathcal{F}''(D)$. Da $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$ ein Epimorphismus ist, gibt es ein System \mathcal{V} offener Teilmengen (oder auch offener Intervalle) $V \subseteq \mathbb{R}$ mit $D \subset \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$, so dass es für jedes $V \in \mathcal{V}$ ein $s_V \in \mathcal{F}(D \cap V)$ mit $s_V \mapsto s''|_{D \cap V}$ gibt.

Die Vereinigung $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$ ist eine offene Teilmenge von \mathbb{R} und wie jeder topologische Raum die disjunkte Vereinigung ihrer Zusammenhangskomponenten. Jede Zusammenhangskomponente (= Wegzusammenhangskomponente) ist offen in \mathbb{R} und somit ein offenes Intervall (siehe [Sch20, Satz 2.6.8, Lemma 2.6.17]). Können wir für jede Zusammenhangskomponente I zeigen, dass $s''|_{D \cap I}$ im Bild von $\mathcal{F}(D \cap I) \rightarrow \mathcal{F}''(D \cap I)$ liegt, so folgt sofort aus dem Garbenaxiom, dass auch s'' im Bild von $\mathcal{F}(D) \rightarrow \mathcal{F}''(D)$ liegt. Deswegen dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$ ein offenes Intervall ist und dann natürlich auch, dass $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = \mathbb{R}$ gilt.

Wir behaupten, dass es eine \mathbb{Z} -indizierte Überdeckung von \mathbb{R} durch offene Intervalle

$$U_i = (a_i, b_i)$$

für geeignete reelle Zahlen a_i, b_i gibt mit $a_i < b_{i-1} < a_{i+1} < b_i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ („nur benachbarte Intervalle U_i und U_{i+1} überlappen“), die die offene Überdeckung \mathcal{V} von \mathbb{R} verfeinert, d. h. für jedes U_i liegt in einer Menge aus \mathcal{V} .

In der Tat, für jedes $r \in \mathbb{Z}$ gibt es nach dem Überdeckungssatz von Lesbesgue [Sch20, Satz 2.7.18], angewandt auf das Kompaktum $[r-1, r+2]$, eine natürliche Zahl $c(r) \geq 1$, so dass für alle $x \in [r, r+1]$ das Intervall $(x - \frac{1}{c(r)}, x + \frac{1}{c(r)})$ ganz in einer Menge aus \mathcal{V} liegt. Wählt man $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ beliebig, so bilden die Intervalle

$$\begin{aligned} & \left(r - \frac{\alpha}{c(r-1)}, r + \frac{\alpha}{c(r)} \right) && \text{für } r \in \mathbb{Z} \text{ und} \\ & \left(r + \frac{\nu}{c(r)} - \frac{\alpha}{c(r)}, r + \frac{\nu}{c(r)} + \frac{\alpha}{c(r)} \right) && \text{für } r \in \mathbb{Z} \text{ und } 1 \leq \nu < c(r) \end{aligned}$$

bei geeigneter Nummerierung die gesuchte offene Überdeckung $\mathbb{R} = \bigcup U_i$.

Für jedes $i \in \mathbb{Z}$ gibt es ein Element $s_i \in \mathcal{F}(D \cap U_i)$ mit $s_i \mapsto s''|_{D \cap U_i}$: Wähle ein $V \in \mathcal{V}$ mit $U_i \subset V$ und setze $s_i := s_V|_{D \cap U_i}$.

Das Element

$$s_i - s_{i+1} = s_i|_{D \cap U_i \cap U_{i+1}} - s_{i+1}|_{D \cap U_i \cap U_{i+1}} \in \mathcal{F}(D \cap U_i \cap U_{i+1})$$

wird Null in $\mathcal{F}''(D \cap U_i \cap U_{i+1})$ und kann deswegen als Element von $\mathcal{F}'(D \cap U_i \cap U_{i+1})$ aufgefasst werden.

- Im Fall $D \cap U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ wählen wir einen Punkt x_i in dieser Menge. Da \mathcal{F}' punktweich ist, kommt $(s_i - s_{i+1})_{x_i} \in \mathcal{F}'_{x_i}$ von einem globalen Schnitt $t'_i \in \mathcal{F}'(D)$ her. Dieser muss dann schon in einer geeigneten offenen Umgebung von x_i in D mit $s_i - s_{i+1}$ übereinstimmen, d. h. es gibt eine offene Umgebung $W_i \subseteq U_i \cap U_{i+1}$ von x_i mit $t'_i|_{D \cap W_i} = (s_i - s_{i+1})|_{D \cap W_i}$. Wer will, kann annehmen, dass W_i ein offenes Intervall ist.
- Im Fall $D \cap U_i \cap U_{i+1} = \emptyset$ setzen wir $W_i := U_i \cap U_{i+1}$ und nehmen $t'_i \in \mathcal{F}'(D)$ beliebig, etwa Null.

Wähle nun für jedes $i \in \mathbb{Z}$ ein offenes Intervall $U'_i \subseteq U_i$, so dass $U'_i \cap U'_{i+1} \subset W_i$ für alle i gilt und die Familie der U'_i immer noch \mathbb{R} überdeckt. **Male Bild**

Die Schnitte

- $s_i + t'_{i-1} + \dots + t'_1 + t'_0 \in \mathcal{F}(D \cap U'_i)$ für $i > 0$;
- $s_0 \in \mathcal{F}(D \cap U'_0)$;
- $s_i - t'_i - t'_{i+1} \dots - t'_{-2} - t'_{-1} \in \mathcal{F}(D \cap U'_i)$ für $i < 0$.

sind kompatibel und verkleben nach dem Garbenaxiom für \mathcal{F} zu einem globalen Schnitt $s \in \mathcal{F}(D)$ (beachte $D = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} D \cap U'_i$). Weil alle t'_i in \mathcal{F}'' Null werden, ist s das gesuchte Urbild von s'' (verwende das Garbenaxiom für \mathcal{F}'' und die offene Überdeckung $D = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} D \cap U'_i$).

(b) Zu zeigen ist, dass für beliebiges $U \subseteq X$ die rechte Vertikale des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \longrightarrow & \mathcal{F}''(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}''(U) \end{array}$$

surjektiv ist. Da \mathcal{F} weik ist, ist die linke Vertikale surjektiv. Da \mathcal{F}' punktweich ist und dasselbe auch für die Einschränkung $\mathcal{F}'|_U$ gilt (klar oder per 4.2.3) und Einschränkungen Exaktheit erhält, sind die beiden Horizontalen nach (a) surjektiv (die Surjektivität der oberen Horizontalen brauchen wir eigentlich gar nicht). Folglich ist die rechte Vertikale ebenfalls surjektiv. \square

Satz 4.2.8. Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlengeraden und $\mathcal{F} \in \text{Sh}(D; \text{Ab})$ eine Garbe abelscher Gruppen. Dann gilt

$$H^q(D; \mathcal{F}) = 0 \quad \text{für alle } q > 1.$$

Ist $\mathcal{F} \in \text{Sh}(D; \text{Ab})$ sogar punktweich, so gilt dies sogar für alle $q > 0$; in anderen Worten sind also punktweiche abelsche Garben auf beliebigen Teilmengen $D \subset \mathbb{R}$ Γ -rechtszyklisch.

Beweis. Sei zunächst \mathcal{F} punktweich. Sei $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{W}$ ein Monomorphismus in eine weike Garbe (etwa die Godementeinbettung oder eine Einbettung in eine injektive Garbe) und sei \mathcal{Q} sein Kokern. Die kurze exakte Sequenz $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{W} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$ liefert die lange exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(D) \hookrightarrow \mathcal{W}(D) \rightarrow \mathcal{Q}(D) \rightarrow H^1(D; \mathcal{F}) \rightarrow H^1(D; \mathcal{W}) \rightarrow H^1(D; \mathcal{Q}) \rightarrow H^2(D; \mathcal{F}) \rightarrow H^2(D; \mathcal{W}) \rightarrow \dots$$

der Garbenkohomologie (siehe 3.4.7). Satz 4.2.7 zeigt einerseits, dass $\mathcal{W}(D) \rightarrow \mathcal{Q}(D)$ surjektiv ist; andererseits zeigt er, dass \mathcal{Q} weik ist – somit sind \mathcal{W} und \mathcal{Q} als weike Garben Γ -rechtszyklisch (siehe Satz 4.1.10), haben also verschwindende Garbenkohomologie in allen Graden $q > 0$. Wir folgern aus diesen Beobachtungen, dass $H^q(D; \mathcal{F})$ für alle $q > 0$ verschwindet.

Nun sei \mathcal{F} beliebig. Wieder sei $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{W}$ eine Einbettung in eine weike Garbe mit Kokern \mathcal{Q} . Als weike Garbe ist \mathcal{W} punktweich (siehe 4.2.2), was sich auf den Quotienten \mathcal{Q} überträgt (siehe 4.2.6). Nach dem ersten Teil des Beweises haben \mathcal{W} und \mathcal{Q} keine höhere Garbenkohomologie ($:=$ alle Garbenkohomologie in Graden > 0 verschwindet). Die lange exakte Sequenz der Garbenkohomologie zur kurzen exakten Sequenz $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{W} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$, die genau wie die im ersten Teil des Beweises angegebene aussieht, zeigt dann, dass die Garbenkohomologie von \mathcal{F} nur in den Graden Null und Eins von Null verschieden sein kann. \square

Beispiele 4.2.9.

- (a) Seien $D \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge und A eine abelsche Gruppe. Da A_D als konstante Garbe punktweich ist (Beispiel 4.2.4), verschwindet $H^q(D; A)$ für alle $q > 0$ nach Satz 4.2.8. Es gilt $H^0(D; A) = \Gamma(A_D)$; ist D zusammenhängend, etwa ein nichtleeres Intervall, so gilt $A \xrightarrow{\sim} \Gamma(A_D)$. Insbesondere gilt also

$$H^q(\mathbb{R}; \mathbb{Z}) \xleftarrow{\sim} \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = 0; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (b) Ist $U \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge, so ist die Garbe $\mathcal{C}_{\mathbb{R}, U}$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf U punktweich (Beispiel 4.2.5). Satz 4.2.8 liefert

$$H^q(U; \mathcal{C}_{\mathbb{R}, U}) = \begin{cases} \{s: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\} & \text{falls } q = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (c) Jede abelsche Garbe \mathcal{F} auf der Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen ist punktweich (warum?) und somit gilt $H^q(\mathbb{Q}; \mathcal{F}) = 0$ für alle $q > 0$ nach Satz 4.2.8.

Aufgabe 4.2.10. Sei $U := (0, 1) \subset X = \mathbb{R}$. Zeige $H^1(X; \mathbb{Z}_{U \subset X}) \cong \mathbb{Z}$.

Bemerkung: Offensichtlich ist $\mathbb{Z}_{U \subset X}$ nicht punktweich.

Aufgabe 4.2.11. Berechne die q -te Garbenkohomologie $H^q(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z})$ für alle $q \in \mathbb{Z}$.

Hinweis: Mayer-Vietoris 4.1.12.

4.3. Zurückholen in der Garbenkohomologie.

Satz 4.3.1 (Zurückholen in der Garbenkohomologie). Seien $f: Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung und sei $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{G}$ ein Morphismus von abelschen Garben auf X ¹⁶³, wobei $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ und $\mathcal{G} \in \text{Sh}(Y; \text{Ab})$ Garben sind. Dann gibt es für jedes $q \in \mathbb{Z}$ genau eine Abbildung

$$(4.3.1) \quad H^q(f; \varphi): H^q(X; \mathcal{F}) \rightarrow H^q(Y; \mathcal{G})$$

¹⁶³Per Adjunktion ist das dasselbe wie ein Morphismus $f^*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$.

mit der Eigenschaft, dass für alle Auflösungen $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}$ und $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{B}$ und jeden Lift $\tilde{\varphi}: \mathcal{A} \rightarrow f_*\mathcal{B}$ von φ das Diagramm

$$(4.3.2) \quad \begin{array}{ccc} H^q(\Gamma(\mathcal{A})) & \xrightarrow{H^q(\Gamma(\tilde{\varphi}))} & H^q(\Gamma(\mathcal{B})) \\ \tau_{\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}}^q \downarrow & & \tau_{\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{B}}^q \downarrow \\ H^q(X; \mathcal{F}) & \xrightarrow{H^q(f; \varphi)} & H^q(Y; \mathcal{G}) \end{array}$$

kommutiert (die Vertikalen sind Teil der q -ten Garbenkohomologie als rechtsderivierter Funktor, siehe Definition 3.3.3).

Weiter ist diese Konstruktion im folgenden Sinne funktoriell¹⁶⁴: Es gelten

- $H^q(\text{id}_X; \text{id}_{\mathcal{F}}) = \text{id}_{H^q(X; \mathcal{F})}$ und
- $H^q(f \circ g; f_*\psi \circ \varphi) = H^q(g; \psi) \circ H^q(f; \varphi): H^q(X; \mathcal{F}) \rightarrow H^q(Z; \mathcal{H})$ für alle stetigen Abbildungen $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ und Garbenmorphismen $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{G}$ und $\psi: \mathcal{G} \rightarrow g_*\mathcal{H}$.

Beweis. Wie in den Diagrammen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\tilde{\text{id}}_{\mathcal{F}}} & \mathcal{I} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{F}}} & \mathcal{F} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{\tilde{\text{id}}_{\mathcal{G}}} & \mathcal{J} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{G}}} & \mathcal{G} \end{array}$$

in $\text{Kom}(\text{Sh}(X; \text{Ab}))$ bzw. $\text{Kom}(\text{Sh}(Y; \text{Ab}))$ angedeutet, seien \mathcal{B} und \mathcal{A} Auflösungen und \mathcal{I} und \mathcal{J} injektive Auflösungen. Die oberen Horizontalen seien die Lifts der jeweiligen Identitäten, die nach dem Hauptlemma bzw. dessen Korollar 3.2.9 existieren. Die beiden Diagramme werden in der jeweiligen Homotopiekategorie kommutativ (dort sind die Lifts eindeutig).

Betrachte

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{\varphi} & \exists! \tilde{\varphi} & \\ & & \curvearrowright & \curvearrowleft & \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{\tilde{\text{id}}_{\mathcal{F}}} & \mathcal{I} & & f_*\mathcal{B} \xrightarrow{f_*\tilde{\text{id}}_{\mathcal{G}}} f_*\mathcal{J} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{F}}} & \mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi} & f_*\mathcal{G} & \xrightarrow{\text{id}_{f_*\mathcal{G}}} & f_*\mathcal{G} \end{array}$$

zunächst als Diagramm in $\text{Kom}(\text{Sh}(X; \text{Ab}))$, wobei zuerst der blaue Pfeil zu ignorieren ist. Da der Linksadjungierte f^* von f_* exakt ist (nach Korollar 2.8.9 samt 2.8.14) erhält f_* injektive Objekte (siehe 3.1.5). Also besteht $f_*\mathcal{J}$ aus injektiven Garben (ist aber im Allgemeinen keine Auflösung von $f_*\mathcal{G}$). Folglich existiert nach Korollar 3.2.9 genau ein Homotopielift $\tilde{\varphi}$ von φ ; mit anderen Worten ist unser Diagramm kommutativ in $\text{Hot}(\text{Sh}(X; \text{Ab}))$. Falls ein blauer Lift $\tilde{\varphi}$ von φ existiert, so ist das gesamte Diagramm nach dem zitierten Korollar kommutativ in $\text{Hot}(\text{Sh}(X; \text{Ab}))$.

¹⁶⁴Der geeignete Leser mag dies präzisieren und sich überlegen, wie die Kategorie \mathcal{C} der Paare (X, \mathcal{F}) zu definieren ist, so dass

$$\begin{aligned} H^q(-; -): \mathcal{C} &\rightarrow \text{Ab}, \\ (X, \mathcal{F}) &\mapsto H^q(X; \mathcal{F}), \\ (f, \varphi) &\mapsto H^q(f; \varphi), \end{aligned}$$

ein Funktor wird.

Wir wenden $H^q \circ \Gamma(X; -)$ auf den oberen Teil dieses Diagramms an und erhalten mit $\Gamma(X; f_* -) = \Gamma(Y; -)$ den oberen Teil des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^q \Gamma \tilde{\varphi} & & H^q \Gamma \hat{\varphi} \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 H^q \Gamma \mathcal{A} & \xrightarrow{H^q \Gamma \tilde{\text{id}}_{\mathcal{F}}} & H^q \Gamma \mathcal{I} & & H^q \Gamma \mathcal{B} \xrightarrow{H^q \Gamma \tilde{\text{id}}_{\mathcal{G}}} & H^q \Gamma \mathcal{J} \\
 \tau \downarrow & & \tau \downarrow \sim & & \tau \downarrow & \tau \downarrow \sim \\
 H^q(X; \mathcal{F}) & \xrightarrow{\text{id}} & H^q(X; \mathcal{F}) & \xrightarrow{H^q(f; \varphi)} & H^q(Y; \mathcal{G}) & \xrightarrow{\text{id}} & H^q(Y; \mathcal{G}).
 \end{array}$$

Die beiden Quadrate sind kommutativ nach als Instanzen von (3.3.1). Der rote Morphismus ist per $H^q(f; \varphi) := \tau \circ H^q \Gamma \hat{\varphi} \circ \tau^{-1}$ definiert. Das gesamte Diagramm abelscher Gruppen ist somit kommutativ. Wir folgern:

- Existiert der blaue Lift $\tilde{\varphi}$, so kommutiert das Diagramm (4.3.2). Dies zeigt die Existenz des gesuchten $H^q(f; \varphi)$. Die Eindeutigkeit ist klar.
- Die Definition von $H^q(f; \varphi)$ hängt nicht von den Wahlen der injektiven Auflösungen \mathcal{I} und \mathcal{J} ab: Nimm dazu an, dass auch \mathcal{A} und \mathcal{B} injektive Auflösungen sind.

Der Leser folgert leicht die behauptete „Funktorialität“. □

4.3.2. Ein wichtiger Spezialfall ist, dass φ die Eins $\mathcal{F} \rightarrow f_* f^* \mathcal{F}$ der Adjunktion (f^*, f_*) ist. In diesem Fall spezialisiert (4.3.1) zu der schlicht als $H^q(f)$ notierten Abbildung

$$(4.3.3) \quad H^q(f): H^q(X; \mathcal{F}) \rightarrow H^q(Y; f^* \mathcal{F}).$$

Für $\mathcal{F} = \mathbb{Z}_X$ gilt $f^* \mathcal{F} \cong \mathbb{Z}_Y$ und wir erhalten somit eine Abbildung

$$H^q(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^q(Y; \mathbb{Z}),$$

wie man das erwartet, wenn man singuläre Kohomologie kennt und vermutet, dass sie oft mit Garbenkohomologie übereinstimmt. Hier kann man auch \mathbb{Z} durch eine beliebige abelsche Gruppe A ersetzen.

Ende der 22. Vorlesung am 08.07.2021.

Hausaufgaben:

- (1) Aufgabe 3.5.9: Wann spaltet die Abbildungskegelsequenz?
- (2) Aufgabe 3.5.15: Rechtsderivierte additiv.
- (3) Aufgabe 4.2.10: Garbenkohomologie von $\mathbb{Z}_{U \subset X}$.
- (4) Aufgabe 4.2.11: Garbenkohomologie von \mathbb{S}^1 .

Aufgabe 4.3.3. Betrachte den Gruppenautomorphismus $g := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^2$. Sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}(g)$ die zugehörige lokal konstante Garbe abelscher Gruppen auf \mathbb{S}^1 mit Monodromie g : Unter der üblichen Identifikation $\frac{[0,1]}{0=1} \xrightarrow[t \mapsto \exp(2\pi i t)]{\sim} \mathbb{S}^1$ ist sie per Definition die Garbe der stetigen Schnitte der étalen Abbildung

$$\frac{[0,1] \times \mathbb{Z}^2}{(0,v) = (1,g(v)) \quad \forall v \in \mathbb{Z}^2} \xrightarrow{(t,v) \mapsto t} \frac{[0,1]}{0=1}.$$

¹⁶⁵ Berechne die (totale) Garbenkohomologie $H(\mathbb{S}^1; \mathcal{L})$.

Hinweis: Spontan würde ich es mit der offensichtlichen kurzen exakten Sequenz $\mathbb{Z}_{\mathbb{S}^1} \hookrightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}_{\mathbb{S}^1}$ versuchen. Vermutlich besser geht es mit der Mayer-Vietoris-Sequenz.

Bonus: Seien nun $g: A \rightarrow A$ ein beliebiger Automorphismus einer abelschen Gruppe und $\mathcal{L} = \mathcal{L}(g)$ die zugehörige lokal konstante Garbe auf \mathbb{S}^1 mit Monodromie g . Berechne die (totale) Garbenkohomologie $H(\mathbb{S}^1; \mathcal{L})$.

¹⁶⁵ Etwas abstrakter: Die Projektion $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Überlagerung. Auf beiden Seiten definieren wir eine (topologisch freie) Operation der Gruppe \mathbb{Z} : Links per $n \cdot (t, v) := (n+t, g^n(v))$, rechts per $n \cdot t := n+t$. Dann ist die Projektion \mathbb{Z} -äquivariant. Die induzierte Abbildung auf den Bahnräume $\frac{\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^2}{\mathbb{Z}} \rightarrow \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ ist eine Überlagerung und insbesondere étale. Sie ist kanonisch isomorph zur oben angegebenen étalen Abbildung.

4.4. Homotopie-Invarianz der Garbenkohomologie.

4.4.1. Unser Ziel ist Satz 4.4.17. Wir bereiten ihn mit einigen Propositionen vor und benötigen dafür etwas mengentheoretische Topologie.

4.4.2. Sinnvoller Platz wäre wohl nach 2.4.19. Seien $s, t \in \mathcal{F}(X)$ zwei globale Schnitte einer Garbe (von Mengen oder abelschen Gruppen) auf einem topologischen Raum X , die auf einer Teilmenge $A \subset X$ übereinstimmen, d. h. es gilt $\bar{s}|_A = \bar{t}|_A$ oder äquivalent $s_a = t_a$ in \mathcal{F}_a für alle $a \in A$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von A in X mit $s|_U = t|_U$.

Beweis. Jedes $a \in A$ besitzt eine offene Umgebung $U_a \subset X$ mit $s|_{U_a} = t|_{U_a}$. Dann hat $U := \bigcup_{a \in A} U_a$ die gesuchte Eigenschaft. \square

4.4.3. Erinnerung: **wohin?** Jeder kompakte Raum (= ¹⁶⁶ quasi-kompakte Hausdorff-Raum) ist lokal ¹⁶⁷ kompakt.

Beweis. (Wiederholung des Beweises von [Sch20, Aufgabe 2.7.20]) Sei K kompakt und sei $U \subset K$ eine ohne Einschränkung offene Umgebung eines beliebigen Punktes $x \in K$. Für jeden Punkt $y \in K \setminus U$ gibt es wegen der Hausdorff-Eigenschaft disjunkte offene Umgebungen U_y von x und V_y von y in X . Da K quasi-kompakt ist, gilt $K = U \cup V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$ für endlich viele Punkte $y_1, \dots, y_n \in K \setminus U$. Die abgeschlossene Teilmenge $A := K \setminus (V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n})$ ist dann die gesuchte kompakte Umgebung von x : Sie enthält x , ist als abgeschlossene Teilmenge eines Hausdorffraums kompakt und ist wegen $x \in U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n} \subset A$ in der Tat eine Umgebung von x . \square

Definition 4.4.4. Eine Teilmenge T eines topologischen Raums X heißt **relativ hausdorffsch (bezüglich X)**, wenn je zwei verschiedene Punkte von T disjunkte Umgebungen in X besitzen: Für alle $t, u \in T$ mit $t \neq u$ existiert eine Umgebung U von t in X und eine Umgebung V von u in X mit $U \cap V = \emptyset$.

4.4.5. Ist T relativ hausdorffsch in X , so ist T ein Hausdorffraum und jede Teilmenge von T ist ebenfalls relativ hausdorffsch in X .

4.4.6. Genau dann ist X ein Hausdorffraum, wenn X relativ hausdorffsch bezüglich X ist.

4.4.7. Die übliche Beweis der Aussage von [Sch20, Aufgabe 2.7.19] zeigt etwas allgemeiner: Seien A und B disjunkte (quasi-)kompakte Teilmengen eines topologischen Raums X , deren Vereinigung $A \cup B$ relativ Hausdorff ¹⁶⁸ in X ist. Dann gibt es disjunkte offene Teilmengen $U, V \subseteq X$ mit $A \subset U$ und $B \subset V$.

Beispiele 4.4.8.

- (a) Jede Teilmenge eines Hausdorff-Raums ist relativ hausdorffsch.
- (b) Sei $X = \{a, b, u\}$ mit derjenigen Topologie versehen, deren abgeschlossene Teilmengen genau die Mengen $X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset$ sind. Dann ist die (kompakte) Teilmenge $K := \{a, b\}$ mit der induzierten Topologie Hausdorff, aber nicht relativ hausdorffsch als Teilmenge von X .
- (c) Ähnlich ist die (kompakte) Teilmenge K der beiden Nullpunkte in der reellen Geraden X mit verdoppeltem Nullpunkt Hausdorff, aber nicht relativ hausdorffsch bezüglich X .

4.4.9. Ist x ein Punkt eines topologischen Raums X , so ist $\{x\}$ trivialerweise (quasi-)kompakt und relativ Hausdorff in X . Ist \mathcal{F} eine Garbe von Mengen auf X , so gilt per Definition

$$\operatorname{colim}_{U: \{x\} \subset U \subseteq X} \mathcal{F}(U) = \mathcal{F}_x \stackrel{(2.4.8)}{\sim} \mathcal{F}(\{x\}).$$

Diese Aussage wird durch die folgende Proposition 4.4.10 verallgemeinert.

Proposition 4.4.10 (Fortsetzen von Schnitten über quasi-kompakten, relativ hausdorffschen Teilmengen). *Sei K eine (quasi-)kompakte, relativ hausdorffsche Teilmenge eines topologischen Raums X und sei*

¹⁶⁶siehe [Sch20, Definition 2.7.3]

¹⁶⁷siehe [Sch20, Definition 5.2.2]

¹⁶⁸Stattdesbeß genügt noch etwas schwächer: Beliebige Punkte $a \in A$ und $b \in B$ haben disjunkte Umgebungen in X .

$\mathcal{F} \in \text{Sh}(X; \text{Set})$ eine Garbe von Mengen auf X . Dann induzieren die Restriktionsabbildungen $t \mapsto \bar{t}|_K$ eine Bijektion

$$(4.4.1) \quad \text{colim}_{U: K \subset U \subset X} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(K) \stackrel{(2.4.7)}{=} \{s: K \rightarrow \text{ét}(\mathcal{F}) \text{ stetiger Schnitt von } \text{ét}(\mathcal{F}) \rightarrow X\}.$$

In Worten gelten also (denn der Kolimes ist offensichtlich filtrierend):

- **Surjektivität:** Jeder stetige Schnitt $s: K \rightarrow \text{ét}(\mathcal{F})$ von $\text{ét}(\mathcal{F}) \rightarrow X$ lässt sich auf eine offene Umgebung U von K in X fortsetzen.
- **Injektivität:** Für stetige Schnitte $s: U \rightarrow \text{ét}(\mathcal{F})$ und $t: V \rightarrow \text{ét}(\mathcal{F})$ auf offenen Umgebungen U und V von K gilt genau dann $s|_K = t|_K$, wenn $s|_W = t|_W$ für eine offene Umgebung $W \subset U \cap V$ von K gilt.

Beweis. Injektivität: Dies folgt sofort aus 4.4.2.

Surjektivität: Sei $s \in \mathcal{F}(K)$ alias ein stetiger Schnitt $s: K \rightarrow \text{ét}(\mathcal{F})$ gegeben. Für jedes $x \in K$ gibt es eine offene Umgebung $U_x \Subset X$ und einen Schnitt $s^x \in \mathcal{F}(U_x)$ mit $\overline{s^x}|_{K \cap U_x} = s|_{K \cap U_x}$ (verwende Proposition 2.4.10.(a)). Da K als quasi-kompakter Hausdorff-Raum lokal kompakt ist (siehe 4.4.3), enthält die offene Umgebung $K \cap U_x$ von x eine kompakte Umgebung $K_x \subset K$ von x . Da K quasi-kompakt ist, wird K von endlich vielen der K_x überdeckt. Wir erhalten so eine Überdeckung von K durch endlich viele kompakte $K_1, \dots, K_n \subset K$ und für jedes $i = 1, \dots, n$ eine offene Umgebung $U_i \Subset X$ von K und einen Schnitt $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $\overline{s_i}|_{K_i} = s|_{K_i}$. Im Fall $i \leq 1$ sind wir fertig.

Weil $\overline{s_1}|_{K_1 \cap K_2} = \overline{s_2}|_{K_1 \cap K_2}$ gilt, gibt es nach 4.4.2 eine offene Umgebung W von $K_1 \cap K_2$ in $U_1 \cap U_2$ mit $s_1|_W = s_2|_W$. Die beiden disjunkten Teilmengen $K_1 \setminus W$ und $K_2 \setminus W$ sind (quasi-)kompakt als abgeschlossene Teilmengen des quasi-kompakten Hausdorff-Raums K und haben wegen unserer Relativ-Hausdorff-Annahme disjunkte offene Umgebungen (siehe 4.4.7). Schneiden dieser Umgebungen mit U_1 bzw. U_2 liefert offene disjunkte Umgebungen $U'_1 \Subset U_1$ von $K_1 \setminus W$ und $U'_2 \Subset U_2$ von $K_2 \setminus W$. Dann verkleben $s_1|_{U'_1}$ und $s_2|_{U'_2}$ und $s_1|_W = s_2|_W$ zu einem Element von $t \in \mathcal{F}(U'_1 \cup U'_2 \cup W)$ mit $\bar{t}|_{K_1 \cup K_2} = s|_{K_1 \cup K_2}$.

Eine offensichtliche Induktion beendet den Beweis (arbeite mit $K_1 \cup K_2$ und $U'_1 \cup U'_2 \cup W$ und t statt mit K_1, K_2 und U_1, U_2 und s_1, s_2). \square

Beispiel 4.4.11. Proposition 4.4.10 wird falsch, wenn man die Bedingung, dass K relativ hausdorffsch in X ist, streicht: In den beiden Beispielen (b) und (c) in 4.4.8 ist (4.4.1) nicht bijektiv für $\mathcal{F} = \mathbb{Z}_X$.

Gutes Gegenbeispiel für K relativ hausdorffsch, aber nicht kompakt? Am besten X Hausdorff. Vgl. Soergel Prop. 5.4.1 (Fortsetzbarkeit von Schnitten, parakompakter Raum)

Aufgabe 4.4.12. Seien X ein topologischer Raum, $D \subset X$ eine Teilmenge und M eine Menge. Sei M_X die zugehörige konstante Garbe. Dann ist die kanonische Abbildung

$$\text{colim}_{U: D \subset U \subset X} M_X(U) \xrightarrow{\sim} M_X(D)$$

bijektiv, falls D in X dicht ist. (Es gilt kanonisch $M_X(D) \cong M_D(D)$ und ich bin versucht, dies als Gleichheit zu schreiben...)

Beispiel: $D = \mathbb{Q} \subset X = \mathbb{R}$ und $M = \mathbb{Z}$.

Proposition 4.4.13. Seien X ein topologischer Raum, K ein kompakter Raum und $\pi: X \times K \rightarrow X$ die Projektion. Seien $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X \times K; \text{Set})$ eine Garbe von Mengen auf dem Produkt und $x \in X$ ein Punkt. Dann gilt

$$(\pi_* \mathcal{F})_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(\underbrace{\pi^{-1}(x)}_{=\{x\} \times K})$$

unter der Abbildung, die von den Abbildungen $\mathcal{F}(\pi^{-1}(U)) \rightarrow \Gamma(\pi^{-1}(x); \mathcal{F})$, $s \mapsto \bar{s}|_{\pi^{-1}(x)}$, für $x \in U \Subset X$, induziert wird.

Beweis. Nach Proposition 4.4.10 gilt

$$\text{colim}_{U: \{x\} \times K \subset U \subset X \times K} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(\{x\} \times K),$$

denn $\{x\} \times K \cong K$ ist kompakt und relativ hausdorffsch in $X \times K$. Jede offene Umgebung $U \Subset X \times K$ von $\{x\} \times K$ enthält aber auf Grund der Kompaktheit von K (und der Definition der Produkttopologie (Produkte

offener Mengen bilden Basis)) eine offene Umgebung der Form $V \times K = \pi^{-1}(V)$ für eine geeignete offene Umgebung $V \Subset X$ von x . Die Mengen der Form $\pi^{-1}(V)$ für $x \in V \Subset X$ sind also konfinal in der filtrierenden Indexmenge/-kategorie des obigen Kolimes. Die Behauptung folgt somit aus Proposition 1.2.66 und der Definition des Halms. \square

Beispiel 4.4.14. Proposition 4.4.13 wird falsch, wenn K nur als Hausdorffraum und nicht als kompakt vorausgesetzt wird. Man betrachte etwa $X = K = \mathbb{R}$ und die Garbe $\mathcal{F} = \mathbb{Z}_{U \Subset X}$ zur offenen Teilmenge

$$U := \{(x, y) \in X \times K = \mathbb{R}^2 \mid |x| < \frac{1}{y} \text{ falls } y > 0\}.$$

Lemma 4.4.15. *Sinnvolle Position wohl nach Satz 2.8.15.* Sei $f: Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung und sei \mathcal{F} eine Garbe von Mengen oder abelschen Gruppen auf X . Dann ist die Eins

$$\mathcal{F} \rightarrow f_* f^* \mathcal{F}$$

- ein Monomorphismus, wenn f surjektiv ist;
- ein Isomorphismus, wenn f eine finale¹⁶⁹ Surjektion mit zusammenhängende Fasern ist.

Beweis. Wegen 2.8.14 genügt es, die Aussage für Garben von Mengen zu zeigen. Das Argument scheint mir aus Sicht der étalen Räume am durchsichtigsten. Dazu müssen wir zuerst etwas (lästige) Übersetzungsarbeit leisten (und empfehlen dem Leser, die folgende ohnehin plausible Behauptung zu glauben). Wir behaupten, dass das Diagramm

$$(4.4.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & f_* f^* \mathcal{F} \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \mathcal{S}_{\text{ét}(\mathcal{F})} & \xrightarrow{\psi} & f_* \mathcal{S}_{Y \times_X \text{ét}(\mathcal{F})} \end{array}$$

kommutativ ist, wobei gelten:

- Die obere Horizontale ist die Eins der Adjunktion (f^*, f_*) .
- Die linke Vertikale ist die Eins der Adjunktion $(\text{ét}, \mathcal{S})$; sie ist ein Isomorphismus, da \mathcal{F} eine Garbe ist (siehe Lemma 2.4.13).
- Die rechte Vertikale ist der angegebene Isomorphismus aus Satz 2.8.15.
- Die untere Horizontale ψ ist implizit im Beweis von Satz 2.8.15 beschrieben (man setze dort $V = f^{-1}(U)$): Für $U \Subset X$ offen bildet ψ_U einen stetigen Schnitt $s: U \rightarrow \text{ét}(\mathcal{F})$ auf die eindeutige stetige Abbildung \tilde{s} im folgenden Diagramm ab, die dieses kommutativ macht.

$$(4.4.3) \quad \begin{array}{ccc} Y \times_X \text{ét} \mathcal{F} & \xrightarrow{\text{pr}_{\text{ét}(\mathcal{F})}} & \text{ét} \mathcal{F} \\ \downarrow \text{pr}_Y & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \\ \cup & & \cup \\ f^{-1}(U) & \xrightarrow{f|} & U \end{array}$$

(Note: Dotted arrows \tilde{s} and s connect $f^{-1}(U)$ to $Y \times_X \text{ét} \mathcal{F}$ and U to $\text{ét} \mathcal{F}$ respectively.)

Der Beweis folgt aus einer genauen Inspektion der Beweise von Satz 2.8.5 (für die explizite Beschreibung der Koeins) und Satz 2.8.15, die wir dem Leser überlassen.

Da die Vertikalen des Diagramms (4.4.2) Isomorphismen sind, ist unsere Eins genau dann ein Mono- bzw. Isomorphismus, wenn ψ diese Eigenschaft hat.

Sei nun f surjektiv. Dann ist auch die induzierte Abbildung $f|: f^{-1}(U) \rightarrow U$ für alle $U \Subset X$ surjektiv. Somit ist $s \in \mathcal{S}_{\text{ét}(\mathcal{F})}(U)$ eindeutig durch $\tilde{s} = \psi_U(s)$ bestimmt. Also sind alle ψ_U injektiv und somit ist ψ ein Monomorphismus.

Sei nun f eine finale Surjektion mit zusammenhängenden Fasern. Für jedes offene $U \Subset X$ hat dann $f|: f^{-1}(U) \rightarrow U$ offensichtlich dieselbe Eigenschaft. Es genügt zu zeigen (nach Proposition 2.9.12.(b).(ii)), dass ψ_U surjektiv ist. Sei $\tilde{s} \in \mathcal{S}_{Y \times_X \text{ét}(\mathcal{F})}(f^{-1}(U))$ beliebig. Zu zeigen ist, dass es ein $s: U \rightarrow \text{ét}(\mathcal{F})$ gibt, so dass das Diagramm (4.4.3) kommutativ ist, dass also $\alpha := \text{pr}_{\text{ét}(\mathcal{F})} \circ \tilde{s}$ über $f|$ faktorisiert. Weil U die

¹⁶⁹Dies bedeutet, dass X die Quotiententopologie bezüglich f trägt, siehe [Sch20, Definition 2.8.77]

Quotiententopologie bezüglich $f|$ trägt, genügt es zu zeigen, dass α auf allen Fasern von $f|$ konstant ist, dass also für alle $u \in U$ die von α induzierte stetige Abbildung

$$\alpha|: f^{-1}(u) \rightarrow p^{-1}(u) = \mathcal{F}_u$$

konstant ist. Dies ist aber der Fall, denn $p^{-1}(u)$ trägt die diskrete Topologie und $f^{-1}(u)$ ist laut Annahme zusammenhängend.¹⁷⁰ \square

Proposition 4.4.16. *Seien X ein topologischer Raum und $\pi: X \times [0, 1] \rightarrow X$ die Projektion. Dann gelten:*

(a) *Für jede Garbe \mathcal{F} abelschen Gruppen (oder Mengen) auf X ist die Eins ein Isomorphismus*

$$(4.4.4) \quad \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \pi_* \pi^* \mathcal{F}.$$

(b) *Der Funktor $\pi^*: \text{Sh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(X \times [0, 1]; \text{Ab})$ bildet $\Gamma(X; -)$ -rechtszyklische Garben auf $\Gamma(X \times [0, 1]; -)$ -rechtszyklische Garben ab.*

(c) *Für jede Garbe $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ und alle $q \in \mathbb{Z}$ ist das Zurückholen $H^q(\pi)$ auf der q -ten Garbenkohomologie (siehe (4.3.3)) ein Isomorphismus*

$$H^q(\pi): H^q(X; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^q(X \times [0, 1]; \pi^* \mathcal{F}).$$

Für alle abelschen Gruppen A gilt insbesondere $H^q(\pi): H^q(X; A) \xrightarrow{\sim} H^q(X \times [0, 1]; A)$.

Beweis. (a) Dies ist ein Spezialfall von Lemma 4.4.15, denn π ist eine finale Surjektion mit zusammenhängenden Fasern (dass X die Finaltopologie trägt, folgt daraus, dass π offen ist).

(b) Sei $\mathcal{A} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ zunächst beliebig. Sei $\pi^* \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{W}$ eine welke Auflösung. Betrachte für $x \in X$ das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(x) & = & \{x\} \times [0, 1] \xrightarrow{j=j_x} X \times [0, 1] \\ & & \downarrow c \qquad \qquad \qquad \downarrow \pi \\ & & \{x\} \xrightarrow{i=i_x} X \end{array}$$

Da welche Garben punktweiche sind 4.2.2 und Punktweicheit beim Einschränken auf Teilmengen erhalten bleibt 4.2.3 und Einschränken exakt ist, ist $j^* \pi^* \mathcal{A} \hookrightarrow j^* \mathcal{W}$ eine punktweiche Auflösung von $j^* \pi^* \mathcal{A} \cong c^* i^* \mathcal{A}$, was als konstante Garbe ebenfalls punktweiche ist. Da punktweiche Garben auf $[0, 1] \cong \{x\} \times [0, 1]$ nach Satz 4.2.8 Γ -rechtszyklisch sind, ist $\Gamma j^* \pi^* \mathcal{A} \hookrightarrow \Gamma j^* \mathcal{W}$ immer noch eine Auflösung (siehe 3.5.18). Diese Auflösung kann man auch als $(j^* \pi^* \mathcal{A})(\pi^{-1}(x)) \hookrightarrow (j^* \mathcal{W})(\pi^{-1}(x))$ oder als $(\pi^* \mathcal{A})(\pi^{-1}(x)) \hookrightarrow \mathcal{W}(\pi^{-1}(x))$ schreiben und mit Proposition 4.4.13 auch als

$$(\pi_* \pi^* \mathcal{A})_x \hookrightarrow (\pi_* \mathcal{W})_x.$$

Da $x \in X$ beliebig war, ist die Horizontale

$$\begin{array}{ccc} \pi_* \pi^* \mathcal{A} & \hookrightarrow & \pi_* \mathcal{W} \\ \uparrow \sim & \nearrow & \\ \mathcal{A} & & \end{array}$$

eine Auflösung; genauer handelt es sich um eine welche Auflösung, da der Pushforward f_* entlang jeder stetigen Abbildung f offensichtlich Welcheit erhält. Wie durch die Diagonale angedeutet, können wir sie auch als welche Auflösung von \mathcal{A} auffassen. Ist nun \mathcal{A} $\Gamma(X; -)$ -rechtszyklisch, so ist nach 3.5.18 (und weil welche Garben $\Gamma(X; -)$ -rechtszyklisch sind) die Diagonale des folgenden Diagramms ebenfalls eine Auflösung.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \pi^* \mathcal{A} & = & \Gamma \pi_* \pi^* \mathcal{A} \hookrightarrow \Gamma \pi_* \mathcal{W} = \Gamma \mathcal{W} \\ \uparrow \sim & \nearrow & \\ \Gamma \mathcal{A} & & \end{array}$$

¹⁷⁰Dieses Argument zeigt doch auch(?): Ist f final mit zusammenhängenden oder leeren Fasern, so ist jedes ψ_U surjektiv, d. h. ψ ist ein Epimorphismus von Prägarben und erst recht ein Epimorphismus von Garben.

Dies stimmt dann natürlich auch für die obere Horizontale. Da $\Gamma\mathcal{W} = \Gamma(X \times [0, 1]; \mathcal{W})$ die Garbenkohomologie von $\pi^*\mathcal{A}$ ausrechnet, verschwindet letztere in positiven Graden; mit anderen Worten ist $\pi^*\mathcal{A}$ Γ -rechtszyklisch.

(c) Sei $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}$ eine Γ -rechtszyklische Auflösung. Die Exaktheit des Pullbacks und (b) zeigen, dass $\pi^*\mathcal{F} \hookrightarrow \pi^*\mathcal{A}$ ebenfalls eine Γ -rechtszyklische Auflösung ist. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\sim} & \pi_*\pi^*(\mathcal{A}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\sim} & \pi_*\pi^*(\mathcal{F}) \end{array} \quad \begin{array}{c} (4.4.4) \\ (4.4.4) \end{array}$$

Das kommutative Diagramm (4.3.2) spezialisiert in unserer Situation zu

$$(4.4.5) \quad \begin{array}{ccc} H^q(\Gamma(\mathcal{A})) & \xrightarrow{\sim} & H^q(\Gamma(\pi^*\mathcal{A})) \\ \tau_{\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}}^q \downarrow \sim & & \tau_{\pi^*\mathcal{F} \hookrightarrow \pi^*\mathcal{A}}^q \downarrow \sim \\ H^q(X; \mathcal{F}) & \xrightarrow{H^q(\pi)} & H^q(X \times [0, 1]; f^*\mathcal{F}) \end{array}$$

Die Vertikalen sind Isomorphismen, denn Γ -azyklische Auflösungen berechnen die Garbenkohomologie. Die obere Horizontale ist der von $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \pi_*\pi^*\mathcal{A}$ induzierte Isomorphismus. Folglich ist $H^q(\pi)$ ein Isomorphismus. \square

Satz 4.4.17 (Homotopie-Invarianz der Garbenkohomologie). *Homotope stetige Abbildungen induzieren dieselbe Abbildung auf der Garbenkohomologie mit konstanten Koeffizienten (:= Werten in konstanten Garben abelscher Gruppen):*

Seien $f, g: X \rightarrow Y$ homotope stetige Abbildungen und sei $A \in \text{Ab}$ eine abelsche Gruppe. Dann gilt $H^q(f) = H^q(g)$ als Abbildungen $H^q(Y; A) \rightarrow H^q(X; A)$.

Beweis. Sei h eine Homotopie von f nach g . Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_t} & X \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & Y \\ \text{id} \downarrow & & \swarrow \pi & & \\ X & & & & \end{array}$$

für π die Projektion und i_t die abgeschlossene Einbettung mit $i_t(x) = (x, t)$; dabei ist $t \in [0, 1]$ beliebig.

Auf der q -ten Garbenkohomologie mit Werten in A erhalten wir das kommutative Diagramm.

$$\begin{array}{ccccc} H^q(X; A) & \xleftarrow{H^q(i_t)} & H^q(X \times [0, 1]; A) & \xleftarrow{H^q(h)} & H^q(Y; A) \\ \uparrow \text{id} & & \nearrow \sim & & \\ H^q(X; A) & & & & \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ H^q(\pi) \end{array}$$

Die Abbildung $H^q(\pi)$ ist nach Proposition 4.4.16.(c) bijektiv. Wir folgern $H^q(i_t) = H^q(i_s)$ für alle $s, t \in [0, 1]$ und damit

$$H^q(f) = H^q(h \circ i_0) = H^q(h) \circ H^q(i_0) = H^q(h) \circ H^q(i_1) = H^q(h \circ i_1) = H^q(g)$$

wie gewünscht. \square

Satz 4.4.18 (Garbenkohomologie der Sphären). *Die Garbenkohomologiegruppen der n -dimensionalen Sphäre $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ sind wie folgt gegeben: Im Fall $n \geq 1$ gilt*

$$(4.4.6) \quad H^q(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = n, \\ \mathbb{Z} & \text{falls } q = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im Fall $n = 0$ hat $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ als einzige nichtverschwindende Garbenkohomologie $H^0(\mathbb{S}^0) = \mathbb{Z}[-1] \oplus \mathbb{Z}[1] \cong \mathbb{Z}^2$. Im Fall $n = -1$ verschwinden alle Garbenkohomologien von $\mathbb{S}^0 = \emptyset$.

Beweis. Der Beweis geht im Wesentlichen analog zu dem von [Sch21, Satz 4.5.1]. Man beachte jedoch, dass wir mit Kohomologie (obere Indizes) arbeiten und die Mayer-Vietoris-Sequenz (4.1.12) „in die andere Richtung“ geht. \square

4.4.19. Ähnlich wie im Beweis von [Sch21, Satz 4.15.5] kann man für $n \geq 1$ zeigen, dass

- die Antipodenabbildung $a: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ auf der n -ten Garbenkohomologie Multiplikation mit $(-1)^{n+1}$ induziert und dass
- die Spiegelung $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ an einer Koordinatenebene auf der n -ten Garbenkohomologie Multiplikation mit -1 induziert.

Aufgabe 4.4.20. Vervollständige die skizzierten Beweise von Satz 4.4.18 und 4.4.19.

Ausblick 4.4.21. Es gibt auch

- lokale Garbenkohomologie (die oft der relativen singulären Kohomologie entspricht),
- ein lange exakte Sequenz der lokalen Garbenkohomologie (die oft der langen exakten Sequenz der relativen singulären Kohomologie entspricht),
- Ausschneidungsisomorphismen für lokale Garbenkohomologie (die oft den entsprechenden Isomorphismen für singuläre Kohomologie entspricht)
- reduzierte Garbenkohomologie (die oft der reduzierten singulären Kohomologie entspricht).

Das Wort *oft* meint hier relativ geringe Anforderungen an die beteiligten topologischen Räume. Viele der Resultate und Beweise aus [Sch21] lassen sich damit leicht in die Sprache der Garbenkohomologie. Die nicht eingeklammerten Konstruktionen und Resultate sind mit dem aktuellen Kenntnisstand leicht zu erhalten, werden aber aus Zeitgründen hier nicht erklärt. Für Details siehe [Soe21].

Ende der 23. Vorlesung am 13.07.2021.

4.5. Ein Spektralsequenzargument.

4.5.1. Wir verwenden einige Definitionen (Doppelkomplex, Morphismus von Doppelkomplexen, Totalkomplex (in ungeraden Spalten negative Differentiale nehmen)) aus [Sch21, Abschnitt 6.6], mit dem einzigen Unterschied, dass wir nun mit oberen Indizes arbeiten. Statt mit Doppelkomplexen abelscher Gruppen arbeiten wir mit Doppelkomplexen mit Einträgen in einer beliebigen abelschen Kategorie (manches geht auch für additive Kategorien). Das folgende Bild eines Doppelkomplexes (A, d', d'') erklärt einerseits unsere Notation und andererseits unsere geometrische Anschauung für Doppelkomplexe (diese ermöglichen Aussagen wie „der Doppelkomplex lebt nur im rechten oberen (alias ersten) Quadranten“):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \cdots & & \cdots & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & A^{p,q+1} & \xrightarrow{d' = d'^{p,q+1}} & A^{p+1,q+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & d'' = d''^{p,q} & & d'' = d''^{p+1,q} & & \\
 \cdots & \longrightarrow & A^{p,q} & \xrightarrow{d' = d'^{p,q}} & A^{p+1,q} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \cdots & & \cdots & &
 \end{array}$$

Alle Quadrate sind hier als kommutativ vorausgesetzt, die Verknüpfung zweier konsekutiver horizontaler Pfeile (=: Differentiale) ist Null, ebenso die Verknüpfung zweier konsekutiver vertikaler Pfeile.

Spaltenkomplexe $A^{p,*}$; die offensichtlichen Horizontalen bilden Morphismen $A^{p,*} \rightarrow A^{p+1,*}$ von Komplexen.

Den Kern des Morphismus $A^{0,*} \rightarrow A^{1,*}$ schreiben wir als K_{\uparrow} . Wir stellen uns diesen Komplex auf der q -Achse vor.

Zeilenkomplexe $A^{*,q}$; Morphismen dazwischen

Doppelkomplex in rechter Halbebene, falls $A^{p,q} = 0$ für alle $p < 0$
Doppelkomplex in oberer Halbebene, falls $A^{p,q} = 0$ für alle $q < 0$
Doppelkomplex im rechten oberen Quadranten, falls $A^{p,q} \neq 0$ impliziert $p, q \in \mathbb{N}$.

Lebt A in der rechten Halbebene, so haben wir einen offensichtlichen Morphismus $K_{\uparrow} \hookrightarrow A$ von Doppelkomplexen, wenn wir uns K_{\uparrow} durch Nullen außerhalb der q -Achse fortgesetzt denken. Insbesondere erhalten wir auf den Totalkomplexen einen Morphismus $K_{\uparrow} = \text{Tot}(K_{\uparrow}) \hookrightarrow \text{Tot}(A)$ (die erste Gleichheit ist klar (auch mit unserer Vorzeichenkonvention beim Bilden des Totalkomplexes)).

Satz 4.5.2 (Eine ausgeartete Spektralsequenz). *Sei (A, d', d'') ein Doppelkomplex in einer abelschen Kategorie im ersten Quadranten, dessen Zeilen $A^{*,q}$ exakt sind an allen Stellen $A^{p,q}$ mit $p \neq 0$. Dann ist $K_{\uparrow} \hookrightarrow \text{Tot}(A)$ ein Quasi-Isomorphismus.*

In der Vorlesung genügt es, dies für Doppelkomplexe abelscher Gruppen zu wissen.

Beweis. Von Hand mit Bild oder zuerst per Induktion, falls A nur endlich viele von Null verschiedene Zeilen hat, was genügt. \square

4.6. Garbenkohomologie und Čech-Kohomologie bezüglich offener Überdeckung.

4.6.1. Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ eine Garbe abelscher Gruppen und \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X . Wir erinnern an den Komplex $\check{C}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ der Čech-Koketten für \mathcal{U} mit Koeffizienten in X (Definition 1.7.1, Proposition 1.7.2), einen Komplex abelscher Gruppen. Wir definieren nun einen Komplex $\check{C}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ von abelschen Garben, dessen globale Schnitte $\check{C}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ sein werden, siehe (4.6.3) (unterscheide \check{C} und \check{C}).

Für $V \in \mathcal{O}_X$ definiere

$$(4.6.1) \quad \check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})(V) = \prod_{(U_0, \dots, U_q) \in \mathcal{U}^{q+1}} \mathcal{F}(V \cap U_0 \cap \dots \cap U_q).$$

In offensichtlicher Weise definiert dies eine Prägarbe und sogar eine Garbe $\check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ abelscher Gruppen auf X . Mit naheliegenderem, auf $V \in \mathcal{O}_X$ durch

$$(4.6.2) \quad (d_V \psi)(U_0, \dots, U_{q+1}) := \sum_{0 \leq i \leq q+1} (-1)^i \psi(U_0, \dots, U_{i-1}, \widehat{U}_i, U_{i+1}, \dots, U_{q+1})|_{V \cap U_0 \cap \dots \cap U_{q+1}}$$

definierten Differential (vgl. (4.6.2)) erhalten wir einen in nichtnegativen Graden konzentrierten Komplex

$$\check{C}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = (\check{C}(\mathcal{U}, \mathcal{F}), d) = \left(\dots \xrightarrow{d} \check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d} \check{C}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \dots \right)$$

von Garben abelscher Gruppen auf X (Beweis analog zu dem von Proposition 1.7.2¹⁷¹). Wir nennen ihn den **vergarbten Čech-Komplex für \mathcal{U} mit Koeffizienten in \mathcal{F}** . Nach Konstruktion sind seine globalen Schnitte genau der übliche Čech-Komplex, in Formeln

$$(4.6.3) \quad \Gamma(\check{C}(\mathcal{U}, \mathcal{F})) = \check{C}(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Lemma 4.6.2. *Unter den Voraussetzungen in 4.6.1 ist der vergarbte Čech-Komplex $\check{C}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ eine Auflö-*

$$\mathcal{F} \hookrightarrow \check{C}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$$

von \mathcal{F} vermöge des offensichtlichen Monomorphismus $\mathcal{F} \hookrightarrow \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ (vgl. 3.2.6).

Insbesondere erhalten wir aus der Definition der Garbenkohomologie als rechtsderiviertem Funktor (Definition 3.3.3) wegen (4.6.3) (und nach Definition der Čech-Kohomologie 1.7.4) für jedes $q \in \mathbb{Z}$ einen kanonischen (Vergleichs-)Morphismus

$$(4.6.4) \quad \tau = \tau_{\mathcal{F} \hookrightarrow \check{C}(\mathcal{U}; \mathcal{F})}^q : \check{H}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow H^q(X; \mathcal{F}).$$

¹⁷¹Man arbeite hier aber mit einer durch \mathcal{U} indizierten Überdeckung; ich schreibe dies, weil ich zuerst irrtümlich dachte, dass

$$\left(\check{C}(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \right)(V) := \check{C}(\mathcal{U}|_V, \mathcal{F}|_V)$$

gilt, wobei $\mathcal{U}|_V := \{V \cap U \mid U \in \mathcal{U}\}$ die durch \mathcal{U} induzierte offene Überdeckung von V ist.

Beweis. Für jedes $V \in \mathcal{X}$ ist $\mathcal{F}(V) \rightarrow \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F})(V) = \prod_{U_0 \in \mathcal{U}} \mathcal{F}(V \cap U_0)$ injektiv, da \mathcal{F} eine Garbe ist und die Schnitte der Elemente von \mathcal{U} mit V eine offene Überdeckung von V bilden. Also ist $\mathcal{F} \rightarrow \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ ein Monomorphismus (von Prägarben) und Garben. Die Auswertung unserer Auflösung in spe bei $V \in \mathcal{X}$ ist die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(V) \rightarrow \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F})(V) \rightarrow \check{C}^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})(V) \rightarrow \dots$$

abelscher Gruppen. Gibt es ein $\tilde{U} \in \mathcal{U}$ mit $V \subset \tilde{U}$, so ist diese Sequenz azyklisch nach Lemma 1.9.6.(c) (denn $\mathcal{F}(V \cap U_1 \cap \dots \cap U_n) \rightarrow \mathcal{F}(V \cap U_1 \cap \dots \cap U_n \cap \tilde{U})$ ist dann die Identität). Daraus folgt sofort, dass $\mathcal{F} \hookrightarrow \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ eine Auflösung ist: Alle induzierten Morphismen auf die (naiv in der Prägarbenkategorie gebildeten) Kerne sind nach Proposition 2.9.12.(b).(ii) Epimorphismen, es gilt also jeweils Kern = Bild.

Die letzte Behauptung ist klar. \square

4.6.3. Die Morphismen (4.6.4) für gesättigte offene Überdeckungen \mathcal{U} sind in offensichtlicher Weise kompatibel und liefern im Kolimes einen (Vergleichs-)Morphismus

$$\check{H}^q(X; \mathcal{F}) \rightarrow H^q(X; \mathcal{F}).$$

Dieser ist für $q = 0, 1$ stets ein Isomorphismus; für parakompaktes X ist er für alle $q \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus, siehe [Soe21].

Definition 4.6.4. Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ eine Garbe abelscher Gruppen und \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X . Wir nennen \mathcal{F} **azyklisch für \mathcal{U}** oder \mathcal{U} **azyklisch für \mathcal{F}** , wenn

$$H^q(U_0 \cap \dots \cap U_n; \mathcal{F}) = 0$$

für alle $q > 0$, alle $n \geq 0$ und alle $U_0, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ gilt.

4.6.5. Die Zuordnungen $\mathcal{F} \mapsto \check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ für jedes $q \in \mathbb{Z}$ bzw. $\mathcal{F} \mapsto \check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ bzw. $\mathcal{F} \mapsto (\mathcal{F} \hookrightarrow \check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}))$ sind offensichtlich funktoriell.

4.6.6. Ist \mathcal{F} welk, so sind alle Restriktionsabbildungen von \mathcal{F} surjektiv (siehe 4.1.2). Dies hat zur Folge, dass jedes $\check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ welk ist (denn Produkte von Surjektionen abelscher Gruppen sind surjektiv).

Satz 4.6.7 (Garbenkohomologie für azyklische offene Überdeckungen). *Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X; \text{Ab})$ eine Garbe abelscher Gruppen und \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X . Ist \mathcal{F} azyklisch für \mathcal{U} , so ist für alle $q \in \mathbb{Z}$ der Vergleichsmorphismus zwischen Čech- und Garbenkohomologie ein Isomorphismus*

$$(4.6.5) \quad \check{H}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow[\sim]{(4.6.4)} H^q(X; \mathcal{F}).$$

Beweis. Sei $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{W}$ eine welke Auflösung. Wir schreiben diese im folgenden Diagramm von Garben in die untere Zeile. Die Einträge dieser Zeile werden vertikal durch die vergarbteten Čech-Komplexe aufgelöst (siehe Lemma 4.6.2). Das gesamte Diagramm ist wegen 4.6.5 kommutativ. Die horizontalen Abbildungen ganz links sind offensichtlich Monomorphismen (von Prägarben und Garben), da $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{W}^0$ ein Monomorphismus ist.

(4.6.6)

$$\begin{array}{ccccccc} & \dots & & \dots & & \dots & \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & \check{C}^1(\mathcal{F}; \mathcal{U}) & \hookrightarrow & \check{C}^1(\mathcal{W}^0; \mathcal{U}) & \longrightarrow & \check{C}^1(\mathcal{W}^1; \mathcal{U}) & \longrightarrow \dots \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & \check{C}^0(\mathcal{F}; \mathcal{U}) & \hookrightarrow & \check{C}^0(\mathcal{W}^0; \mathcal{U}) & \longrightarrow & \check{C}^0(\mathcal{W}^1; \mathcal{U}) & \longrightarrow \dots \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & \mathcal{F} & \hookrightarrow & \mathcal{W}^0 & \longrightarrow & \mathcal{W}^1 & \longrightarrow \dots \end{array}$$

Wir können dieses Diagramm als kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \check{\mathcal{C}}(\mathcal{F}; \mathcal{U}) & \xrightarrow{\ell} & \check{\mathcal{C}}(\mathcal{W}; \mathcal{U}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{W} \end{array}$$

von Doppelkomplexen ansehen (dabei ist \mathcal{F} ein im Ursprung (= im Bigrad $(0, 0)$) konzentrierter Doppelkomplex, \mathcal{W} ist auf der horizontalen Achse konzentriert und $\check{\mathcal{C}}(\mathcal{F}; \mathcal{U})$ ist auf der vertikalen Achse konzentriert). Alle Morphismen sind Monomorphismen (= Monomorphismen in jedem Bigrad). Übergang zu den Totalkomplexen liefert das kommutative Diagramm

$$(4.6.7) \quad \begin{array}{ccc} \check{\mathcal{C}}(\mathcal{F}; \mathcal{U}) & \xrightarrow{\text{Tot}(\ell)} & \text{Tot}(\check{\mathcal{C}}(\mathcal{W}; \mathcal{U})) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{W} \end{array}$$

von Komplexen (alle Morphismen sind Monomorphismen). Nach Satz 4.5.2¹⁷² bzw. genauer dessen Analogon für Doppelkomplexe im ersten Quadranten mit exakten Spalten ist die rechte Vertikale $\mathcal{W} \hookrightarrow \text{Tot}(\check{\mathcal{C}}(\mathcal{W}; \mathcal{U}))$ ein Quasi-Isomorphismus. Da linker (siehe Lemma 4.6.2) und unterer Pfeil als Auflösungen ebenfalls Quasi-Isomorphismen sind, sind alle vier Pfeile Quasi-Isomorphismen.

Da alle \mathcal{W}^p welk sind, sind alle $\check{\mathcal{C}}^q(\mathcal{W}^p; \mathcal{U})$ nach 4.6.6 welk. Da Welkheit nach 4.1.5 stabil unter endlichen direkten Summen (= endlichen Produkten) ist, ist $\text{Tot}(\check{\mathcal{C}}(\mathcal{W}; \mathcal{U}))$ ein Komplex welcher Garben.

Neben \mathcal{W} ist also auch der Komplex rechts oben im Diagramm (4.6.7) eine welke Auflösung von \mathcal{F} und die obere Zeile $\text{Tot}(\ell)$ dieses Diagramms ist ein Lift von $\text{id}_{\mathcal{F}}$ zu einem Morphismus von Auflösungen. Nach Definition 3.3.3 erhalten wir für jedes $q \in \mathbb{Z}$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & H^q(X; \mathcal{F}) & \\ \begin{array}{c} \nearrow \\ (4.6.4) \\ \tau \end{array} & & \begin{array}{c} \nwarrow \\ \sim \\ \tau \end{array} \\ \check{H}^q(\mathcal{F}; \mathcal{U}) & \xrightarrow{H^q(\Gamma(\text{Tot}(\ell)))} & H^q(\Gamma(\text{Tot}(\check{\mathcal{C}}(\mathcal{W}; \mathcal{U}))) \end{array}$$

Der Pfeil nach links oben ist bijektiv, denn welche Auflösungen berechnen die Garbenkohomologie (siehe Satz 4.1.10 und Satz 3.5.16). Der Pfeil nach rechts oben ist unser Vergleichsmorphismus. Um zu zeigen, dass er bijektiv ist, genügt es zu zeigen, dass

$$\underbrace{\Gamma(\text{Tot}(\ell))}_{\cong \text{Tot}(\Gamma(\ell))}: \Gamma(\check{\mathcal{C}}(\mathcal{F}; \mathcal{U})) \hookrightarrow \underbrace{\Gamma(\text{Tot}(\check{\mathcal{C}}(\mathcal{W}; \mathcal{U})))}_{\cong \text{Tot}(\Gamma(\check{\mathcal{C}}(\mathcal{W}; \mathcal{U})))}$$

ein Quasi-Isomorphismus ist – die per Unterklammerung angegebenen Isomorphismen verwenden, dass unsere Doppelkomplexe im ersten Quadranten leben und Γ als Rechtsadjungierter mit beliebigen Produkten, also insbesondere mit endlichen direkten Summen (= endlichen Produkten) vertauscht). Dazu genügt es nach Satz 4.5.2 zu zeigen, dass alle blau-rotten Zeilen des Diagramms (4.6.6) unter Γ auf Auflösungen abgebildet werden.

Für jedes $V \Subset X$ ist $\mathcal{F}|_V \hookrightarrow \mathcal{W}|_V$ eine welke Auflösung (da Einschränken auf offene Teilmengen exakt ist und Welkheit erhält), die somit $H^i(V; \mathcal{F})$ berechnet. Ist speziell $V = U_0 \cap \dots \cap U_q$ ein Schnitt endlich vieler Elemente von \mathcal{U} , so zeigt die Azyklizität von \mathcal{F} bezüglich \mathcal{U} , dass

$$\mathcal{F}(U_0 \cap \dots \cap U_q) \hookrightarrow \mathcal{W}^0(U_0 \cap \dots \cap U_q) \rightarrow \mathcal{W}^1(U_0 \cap \dots \cap U_q) \rightarrow \dots$$

¹⁷²Wer diesen Satz nur für Doppelkomplexe abelscher Gruppen kennt, muss verwenden, dass ein Morphismus von Komplexen genau dann ein Quasi-Isomorphismus ist, wenn er halmweise ein Quasi-Isomorphismus ist: Verwende Satz 2.3.1.(b) und die Exaktheit des Halm-Nehmens, was deswegen mit dem Kohomologie-Nehmen eines Komplexes von Garben vertauscht. Achtung: Mit der Kohomologie eines Komplexes ist hier nicht die Garbenkohomologie gemeint, sondern die allgemein definierte Kohomologie eines Komplexes in einer abelschen Kategorie!

eine Auflösung durch abelsche Gruppen ist. Dann ist für fixiertes $q \geq 0$ auch

$$\underbrace{\prod_{(U_0, \dots, U_q) \in \mathcal{U}^{q+1}} \mathcal{F}(U_0 \cap \dots \cap U_q)}_{\stackrel{(4.6.1)}{=} \Gamma \check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})} \hookrightarrow \underbrace{\prod_{(U_0, \dots, U_q) \in \mathcal{U}^{q+1}} \mathcal{W}^0(U_0 \cap \dots \cap U_q)}_{= \Gamma \check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{W}^0)} \rightarrow \underbrace{\prod_{(U_0, \dots, U_q) \in \mathcal{U}^{q+1}} \mathcal{W}^1(U_0 \cap \dots \cap U_q)}_{= \Gamma \check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{W}^1)} \rightarrow \dots$$

eine Auflösung (da Produkte exakter Sequenzen abelscher Gruppen exakt sind). Nach den angegebenen Gleichheiten ist diese aber das Bild der q -ten rot-blauen Zeile unter Γ , von dem zu zeigen war, dass es eine Auflösung ist. Dies beendet den Beweis. \square

Aufgabe 4.6.8. Berechne alle Garbenkohomologien $H^q(\mathbb{S}^2; \mathbb{Z})$ mit Hilfe von Satz 4.6.7.

Hinweis: Aufgabe 1.9.13

Ende der 24. Vorlesung am 15.07.2021.

Hausaufgaben:

- (1) Aufgabe 4.4.12: Fortsetzen von Schnitten konstanter Garben über dichter Teilmenge
- (2) Aufgabe 4.6.8: Garbenkohomologie der 2-Sphäre per Vergleichsisomorphismus und früherer Aufgabe
- (3) Ein Teil von Aufgabe 4.4.20, der andere ist Bonus:
 - Garbenkohomologie der Sphären
 - Effekt von Antipodenabbildung, Spiegelung an Koordinatenebene auf Top-Garbenkohomologie
- (4) Aufgabe 4.3.3: Garbenkohomologie von Monodromiegarben auf \mathbb{S}^1 .

5. VERGLEICHSSÄTZE

Schiebe die beiden vorherigen Abschnitte in dieses Kapitel!

5.1. Hom-Komplex und Dualität.

Definition 5.1.1. Seien $A, B \in \text{Kom}(\text{Ab})$ Komplexe abelscher Gruppen (statt Ab könnte man auch eine beliebige additive Kategorie nehmen). Der **Hom-Komplex** $\text{Hom}(A, B) \in \text{Kom}(\text{Ab})$ ist wie folgt definiert:

- Seine n -te Komponente ist

$$\text{Hom}^n(A, B) := \text{Hom}(A, B)^n := \prod_{p \in \mathbb{Z}} \text{Ab}(A^p, B^{p+n}) = \prod_{\substack{a, b \in \mathbb{Z}; \\ a+n=b}} \text{Ab}(A^a, B^b).$$

- Sein n -tes Differential $d = d^n: \text{Hom}(A, B)^n \rightarrow \text{Hom}(A, B)^{n+1}$ ist durch

$$d(f) := d \circ f - (-1)^n f \circ d = d_B \circ f - (-1)^n f \circ d_A$$

bzw. präziser durch

$$d(f)^p := d_B^{p+n} \circ f^p - (-1)^n f^{p+1} \circ d_A^p$$

gegeben, wobei $f = (f^p)_{p \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}(A, B)^n$.

Der Leser prüft leicht, dass dies einen Komplex definiert.

In offensichtlicher Weise erweitern wir diese Zuordnung auf Objekten zu einem Funktor

$$\text{Hom}(-, -): \text{Kom}(\text{Ab})^{\text{op}} \times \text{Kom}(\text{Ab}) \rightarrow \text{Kom}(\text{Ab}).$$

5.1.2. Die Vorzeichen sind so gewählt, so dass die naheliegende Abbildung eine Bijektion

$$\text{Kom}_{\text{Ab}}(A \otimes B, C) \cong \text{Kom}_{\text{Ab}}(A, \text{Hom}(B, C))$$

definiert.

5.1.3. Man kann $\text{Hom}(A, B)$ als den „Produkt-Totalkomplex“ eines „Doppelkomplexes“ $(\text{Ab}(A^p, B^q))_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2}$ auffassen (wobei hier die horizontalen Differentiale nach links gehen; ich bin zu faul, mir zu überlegen, wie genau die Vorzeichen zu wählen sind – eventuell ist es auch sinnvoll, den Doppelkomplex $(\text{Ab}(A^{-q}, B^p))_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2}$ zu betrachten und alle vertikalen Differential mit -1 zu multiplizieren).

5.1.4 (Kozykel und Kohomologie des Hom-Komplexes). Die 0-Kozykel des Hom-Komplexes sind genau die Morphismen in der Kategorie der Komplexe, in Formeln

$$(5.1.1) \quad Z^0(\text{Hom}(A, B)) = \text{Kom}_{\text{Ab}}(A, B).$$

Warnung, die rechte Seite mag man auch als $\text{Hom}_{\text{Kom}(\text{Ab})}(A, B)$ schreiben, jedoch sollte man dann den Index nicht weglassen.

Zwei 0-Kozykel sind genau dann kohomolog (= unterscheiden sich um einen 0-Korand), wenn die entsprechende Morphismen in $\text{Kom}(\text{Ab})$ homotop sind, in Formeln

$$(5.1.2) \quad H^0(\text{Hom}(A, B)) = \text{Hot}_{\text{Ab}}(A, B).$$

Offensichtlich gelten $\text{Hom}(A, B[1]) = \text{Hom}(A, B)[1] = \text{Hom}(A[-1], B)$ oder allgemeiner $\text{Hom}(A[m], B[n]) = \text{Hom}(A, B)[n - m]$. **besser \cong schreiben?** Damit (und wegen $Z^p(C[n]) = Z^{p+n}(C)$ und $H^p(C[n]) = H^{p+n}(C)$) liefern die obigen Formeln

$$(5.1.3) \quad \text{Kom}_{\text{Ab}}(A[m], B[n]) = Z^{n-m}(\text{Hom}(A, B)),$$

$$(5.1.4) \quad \text{Hot}_{\text{Ab}}(A[m], B[n]) = H^{n-m}(\text{Hom}(A, B)).$$

5.1.5 (Hom erhält Abbildungskegel in beiden Argumenten). Sei $C \in \text{Kom}(\text{Ab})$ ein Komplex. Wir behaupten, dass $\text{Hom}(C, -)$ im folgenden Sinne Abbildungskegel erhält:

Sei $f: A \rightarrow B$ ein Morphismus in $\text{Kom}(\text{Ab})$. Dann können wir

- einerseits den Abbildungskegel von f samt Abbildungskegelsequenz

$$B \hookrightarrow K(f) \rightarrow A[1]$$

bilden und darauf den Funktor $\text{Hom}(C, -)$ anwenden – das Ergebnis ist die obere Zeile im Diagramm (5.1.5);

- andererseits den Funktor $\text{Hom}(C, -)$ auf f anwenden, das Ergebnis als $f_* := \text{Hom}(C, f): \text{Hom}(C, A) \rightarrow \text{Hom}(C, B)$ notieren und dann Abbildungskegel $K(f_*)$ samt Abbildungskegelsequenz bilden – das Ergebnis ist die untere Zeile im Diagramm (5.1.5).

$$(5.1.5) \quad \begin{array}{ccccc} \text{Hom}(C, B) & \hookrightarrow & \text{Hom}(C, K(f)) & \twoheadrightarrow & \text{Hom}(C, A[1]) \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow \sim & & \downarrow \text{id} \\ \text{Hom}(C, B) & \hookrightarrow & K(f_*) & \twoheadrightarrow & \text{Hom}(C, A)[1] \end{array}$$

Die rechte Identität wurde vor (5.1.3) erklärt. Der Leser prüft leicht, dass der offensichtliche Kandidat für den gestrichelten Pfeil ein Isomorphismus in $\text{Kom}(\text{Ab})$ ist, der das Diagramm zum Kommutieren bringt. Dies zeigt, dass $\text{Hom}(C, -)$ mit dem Bilden des Abbildungskegels samt Abbildungskegelsequenz kommutiert (vgl. 3.5.6).

Analog kommutiert $\text{Hom}(-, C)$ mit dem Bilden von Abbildungskegeln; das folgende kommutative Diagramm illustriert dies, wobei $f^* := \text{Hom}(f, C): \text{Hom}(B, C) \rightarrow \text{Hom}(A, C)$; man beachte, dass in der Mitte der unteren Zeile der $[-1]$ -Shift des Abbildungskegels von f^* steht.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}(B, C) & \longleftarrow & \text{Hom}(K(f), C) & \longleftarrow & \text{Hom}(A[1], C) \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow \sim & & \downarrow \text{id} \\ \text{Hom}(B, C) & \longleftarrow & K(f^*)[-1] & \longleftarrow & \text{Hom}(A, C)[-1] \end{array}$$

Ausblick 5.1.6. Der im Folgenden erklärte Funktor \mathbb{D} ist (ein Lift) des rechtsderivierten Hom-Funktors $R\text{Hom}(-, \mathbb{Z}[0]): \text{D}(\text{Ab}) \rightarrow \text{D}(\text{Ab})$, denn $\mathbb{Z} \hookrightarrow \underbrace{\mathbb{Q} \twoheadrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0 \dots \rightarrow}_{=: I_{\mathbb{Z}}}$ ist eine injektive Auflösung von \mathbb{Z} . (Als beschränkte injektive Auflösung ist sie h-injektiv.)

Proposition 5.1.7 (Explizite derivierte Dualität). Setze $I_{\mathbb{Z}} := (\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Q} \twoheadrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \dots) \in \text{Kom}(\text{Ab})$ (mit \mathbb{Q} in Grad Null) und betrachte den Funktor

$$\mathbb{D} := \text{Hom}(-, I_{\mathbb{Z}}): \text{Kom}(\text{Ab})^{\text{op}} \rightarrow \text{Kom}(\text{Ab})$$

zwischen abelschen Kategorien. Dann gelten:

- (a) Der Funktor \mathbb{D} ist exakt.
 (b) Ist $F \in \text{Kom}(\text{Ab})$ ein Komplex aus freien abelschen Gruppen, so induziert der Morphismus $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}[0] \hookrightarrow I_{\mathbb{Z}}$ von Komplexen (alias die zuvor erwähnte injektive Auflösung $\mathbb{Z} \hookrightarrow I_{\mathbb{Z}}$) einen Quasi-Isomorphismus

$$\text{Hom}(F, \mathbb{Z}) \hookrightarrow \text{Hom}(F, I_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{D}(F).$$

- (c) Der Funktor \mathbb{D} erhält Quasi-Isomorphismen.

Beweis. (a) Allgemeiner gilt: Ist I ein beliebiger Komplex aus injektiven abelschen Gruppen, so ist $\text{Hom}(-, I)$ exakt: Sei $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ eine kurze exakte Sequenz in $\text{Kom}(\text{Ab})$. Gradweise haben wir kurze exakte Sequenzen $A'^p \hookrightarrow A^p \twoheadrightarrow A''^p$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. Da jedes I^q injektiv ist, erhalten wir kurze exakte Sequenzen $\text{Ab}(A''^p, I^q) \hookrightarrow \text{Ab}(A^p, I^q) \twoheadrightarrow \text{Ab}(A'^p, I^q)$. Für fixiertes $n \in \mathbb{Z}$ ist das Produkt über all diese kurzen exakten Sequenzen für $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $q = p+n$ eine kurze exakte Sequenz, nämlich $\text{Hom}(A'', I)^n \hookrightarrow \text{Hom}(A, I)^n \twoheadrightarrow \text{Hom}(A', I)^n$. Da n beliebig war, ist $\text{Hom}(A'', I) \hookrightarrow \text{Hom}(A, I) \twoheadrightarrow \text{Hom}(A', I)$ eine kurze exakte Sequenz.

Bemerkung: Der Leser wird bemerkt haben, dass die Differentiale der beteiligten Komplexe keine Rolle gespielt haben - es genügt zu zeigen, dass der Funktor $\text{Hom}(-, I): (\text{Ab}^{\mathbb{Z}})^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}^{\mathbb{Z}}$ zwischen Kategorien \mathbb{Z} -graduierter Gruppen exakt ist.

- (c) Wegen 5.1.5 und 3.5.7 ist äquivalent zu zeigen, dass \mathbb{D} azyklische Komplexe auf azyklische Komplexe abbildet.

Wir zeigen allgemeiner dass $\text{Hom}(-, I)$ für jeden beschränkten Komplex I injektiver abelscher Gruppen azyklische Komplexe auf azyklische Komplexe abbildet.

- Erster Beweis: Ist I in einem Grad konzentriert, so ist dies offensichtlich, denn $\text{Ab}(-, J)$ ist für jede injektive abelsche Gruppe J exakt.

Sonst kann man I durch brutales Abschneiden (siehe Aufgabe 1.9.9) für geeignetes $n \in \mathbb{Z}$ in eine gradweise spaltende kurze exakte Sequenz

$$\sigma_{>n}I \hookrightarrow I \twoheadrightarrow \sigma_{\leq n}I$$

packen, deren Randterme beschränkte Komplexe von Injektiven sind, die „echt kleinere Amplitude“ haben – *Amplitude* eines Komplexes meint hier das kleinste Intervall in \mathbb{Z} , in dem der Komplex konzentriert ist, und *klein* meint einfach die Länge dieses Intervalls. Sei $A \in \text{Kom}(\text{Ab})$ beliebig. Dann ist auch

$$\text{Hom}(A, \sigma_{>n}I) \twoheadrightarrow \text{Hom}(A, I) \hookrightarrow \text{Hom}(A, \sigma_{\leq n}I)$$

eine (gradweise spaltende) kurze exakte Sequenz (Beweis wie in (a), nur diesmal ist das andere Argument variabel). Ist A azyklisch, so sind die beiden Randterme dieser Sequenz per Induktion azyklisch, was sich dann nach der langen exakten Kohomologiesequenz auf $\text{Hom}(A, I)$ überträgt.

Bemerkung: Diese Beweistechnik (oft mit intelligentem statt brutalem Abschneiden) heißt *dévisage*. Beim brutalen Abschneiden wie hier verringert man die Amplitude eines Komplexes, beim intelligenten Abschneiden die Amplitude der totalen Kohomologie eines Komplexes.

- Zweiter Beweis (hier kann I ein beliebiger, nach unten ($:=$ gegen die Richtung der Pfeile) beschränkter Komplex von Injektiven sein):

Sei $E \in \text{Kom}(\text{Ab})$ azyklisch. Zu zeigen ist, dass $\text{Hom}(E, I)$ azyklisch ist, dass also $H^q(\text{Hom}(E, I))$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ verschwindet. Sei $q \in \mathbb{Z}$ fixiert. Für geeignetes $n \in \mathbb{Z}$ ist $I[q+n]$ in nichtnegativen Graden konzentriert (n muss genügend klein sein, vgl. Warnung 3.5.2). Der Hauptsatz der homologischen Algebra 3.2.5 ist deshalb wie folgt anwendbar:

$$H^q(\text{Hom}(E, I)) \stackrel{(5.1.4)}{=} \text{Hot}_{\text{Ab}}(E, I[q]) \xrightarrow{\sim} \text{Hot}_{\text{Ab}}(E[n], I[q+n]) \xrightarrow{H^0} \text{Ab}(\underbrace{H^0(E[n]), H^0(I[q+n])}_{=0}) = 0.$$

- (b) Der Abbildungskegel von $i: \mathbb{Z}[0] \rightarrow I_{\mathbb{Z}}$ ist der azyklische Komplex

$$K(i) = (\rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0 \dots \rightarrow)$$

mit \mathbb{Q} im Grad Null. Wegen 5.1.5 und 3.5.7 genügt es zu zeigen, dass $\text{Hom}(F, K(i))$ azyklisch ist.

Wir zeigen allgemeiner, dass $\text{Hom}(F, I)$ für jeden beschränkten azyklischen Komplex azyklisch ist.

Da I beschränkt ist, gilt: Ist $q \in \mathbb{Z}$ fixiert, so spielt nur ein endlicher Abschnitt des Komplexes F eine Rolle bei der Berechnung von $H^q(\text{Hom}(F, I))$. Wir können deswegen ohne Einschränkung annehmen, dass F ein beschränkter Komplex freier abelscher Gruppen ist.

Sei n so gewählt, dass $F[n]$ in nichtpositiven Graden konzentriert ist. Nach dem Hauptlemma [Sch21, Satz 7.1.5] (Achtung, dort untere Indizes, hier obere; außerdem projektive links) erhalten wir

$$H^q(\text{Hom}(F, I)) \stackrel{(5.1.4)}{=} \text{Hot}_{\text{Ab}}(F, I[q]) \xrightarrow[\sim]{[n]} \text{Hot}_{\text{Ab}}(F[n], I[q+n]) \xrightarrow[\sim]{H^0} \text{Ab}(H^0(F[n]), \underbrace{H^0(I[q+n])}_{=0}) = 0.$$

Alternativbeweis: Bilde $\text{Hom}(F, I)$ wie in 5.1.3 angedeutet über einen Doppelkomplex und verwende eine Variante von Satz 4.5.2. \square

5.2. Garbenkohomologie und singuläre Kohomologie.

5.2.1. Erinnerung: Sei X ein topologischer Raum. Wir nehmen an, dass der Leser den Komplex der singulären Ketten $S_\bullet X := SX = S(X; \mathbb{Z})$ kennt (untere Indizes, Differentiale senken den Grad), siehe [Sch21, Proposition 3.1.14], dessen Homologie die singuläre Homologie von X ist, in Formeln $H_q^{\text{sing}}(X; \mathbb{Z}) = H_q(S_\bullet X)$.

Jede stetige Abbildung $f: Y \rightarrow X$ induziert Morphismen $S_\bullet f: S_\bullet Y \rightarrow S_\bullet X$ von Komplexen abelscher Gruppen, welche wiederum Morphismen $H_q^{\text{sing}}(Y; \mathbb{Z}) \rightarrow H_q^{\text{sing}}(X; \mathbb{Z})$ abelscher Gruppen induzieren. Genauer sind $S_\bullet: \text{Top} \rightarrow \text{Kom}(\text{Ab})$ und alle $H_q^{\text{sing}}(-; \mathbb{Z}): \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$ Funktoren.

5.2.2. Der **Komplex $S^\bullet X = S^\bullet(X; \mathbb{Z})$ der singulären Koketten** ist per Definition das Bild von $S_\bullet X$ unter „Dualisieren“ $\text{Ab}(-, \mathbb{Z})$. Es gilt also schlicht $S^p X := \text{Ab}(S_p X, \mathbb{Z})$ mit Differentialen

$$S^p X = \text{Ab}(S_p X, \mathbb{Z}) \rightarrow S^{p+1} X = \text{Ab}(S_{p+1} X, \mathbb{Z})$$

induziert von den Differentialen $S_{p+1} X \rightarrow S_p X$. Die Kohomologie von $S^\bullet X$ ist per Definition die **singuläre Kohomologie von X** , in Formeln $H_{\text{sing}}^q(X; \mathbb{Z}) = H^q(S^\bullet X)$.

Jede stetige Abbildung $f: Y \rightarrow X$ induziert Morphismen $S^\bullet f: S^\bullet Y \rightarrow S^\bullet X$ (dual zu $S_\bullet f$), welche wiederum Morphismen $H_{\text{sing}}^q(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{\text{sing}}^q(Y; \mathbb{Z})$ induzieren. Genauer sind $S^\bullet: \text{Top}^{\text{op}} \rightarrow \text{Kom}(\text{Ab})$ und alle $H_{\text{sing}}^q(-; \mathbb{Z}): \text{Top}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$ Funktoren.

5.2.3. Jeder Komplex $((A_p), (d_p))$ kann via $A^p := A_{-p}$ und $d^p := d_{-p}: A^p = A_{-p} \rightarrow A_{-p-1} = A^{p+1}$ als Komplex (oder genauer Kokomplex) $((A^p), (d^p))$ aufgefasst werden. Ähnlich fassen wir Morphismen $f = (f_p)_p$ von Komplexen als Morphismen $(f^p)_p := (f_{-p})_p$ von Kokomplexen auf, erhalten also insgesamt einen Isomorphismus von Kategorien $\text{Kom}_\bullet(\text{Ab}) \xrightarrow{\sim} \text{Kom}^\bullet(\text{Ab})$ zwischen der Kategorie der Komplexe und der der Kokomplexe.¹⁷³

5.2.4. Angewandt auf $S_\bullet X$ gilt nach Definition 5.1.1 des Hom-Komplexes

$$(5.2.1) \quad S^\bullet X = \text{Hom}(S_\bullet X, \mathbb{Z}[0]),$$

wobei hier $\mathbb{Z}[0]$ denjenigen Komplex meint, der in Grad Null \mathbb{Z} ist und in allen anderen Graden verschwindet.

5.2.5. Sei X ein topologischer Raum. Dann ist für jede Inklusion $i: V \subseteq U$ offener Teilmengen von X das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^{q+1}(V) & \xleftarrow{S^{q+1}(i)} & S^{q+1}(U) \\ \uparrow d & & \uparrow d \\ S^q(V) & \xleftarrow{S^q(i)} & S^q(U) \end{array}$$

kommutativ, das man sich nach oben und unten unendlich fortgesetzt denken mag. Wir können somit jedes S^q als Prägarbe S_X^q abelscher Gruppen auf X auffassen¹⁷⁴ und erhalten Morphismen $d: S_X^q \rightarrow S_X^{q+1}$ zwischen diesen Prägarben. Insgesamt erhalten wir den Komplex S_X^\bullet von abelschen Prägarben auf X .

¹⁷³Die Notation $\text{Kom}_\bullet(\text{Ab})$ bzw. $\text{Kom}^\bullet(\text{Ab})$ fiel mir gerade ein und soll das offensichtliche andeuten.

¹⁷⁴Formal restringieren wir den Funktor $S^q: \text{Top}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$ auf die (nicht volle) Unterkategorie $\text{Open}(X)^{\text{op}}$ und notieren diese Einschränkung mit dem Symbol S_X^q . Damit ist sofort klar, dass die Restriktionsabbildungen kompatibel sind, falls $W \subseteq V \subseteq U$ gegeben sind.

Leicht sieht man, dass S_X^q im Allgemeinen keine Garbe ist. Wir nennen die Garbifizierung $\mathcal{S}_X^q = \mathfrak{b}S_X^q$ die **Garbe der lokalen singulären q -Koketten auf X** . Indem wir auch die Differentiale garbifizieren, erhalten wir den Komplex

$$(5.2.2) \quad \mathcal{S}_X^\bullet := \mathfrak{b}S_X^\bullet$$

der Garben der lokalen singulären Koketten mit Komponenten \mathcal{S}_X^q . Wenden wir den Globale-Schnitte-Funktor Γ auf den kanonischen Morphismus $S_X^\bullet \rightarrow \mathcal{S}_X^\bullet$ in die Garbifizierung an und dann den Funktor q -te Kohomologie H^q , so erhalten wir einen Morphismus

$$(5.2.3) \quad H_{\text{sing}}^q(X; \mathbb{Z}) = H^q(\underbrace{\Gamma(S_X^\bullet)}_{=S^\bullet(X)}) \rightarrow H^q(\Gamma(\mathcal{S}_X^\bullet)).$$

5.2.6. Der offensichtliche (Koaugmentations-Mono)-Morphismus $\mathbb{Z}_X \rightarrow \mathcal{S}_X^0$ (dessen Verknüpfung mit $\mathcal{S}_X^0 \rightarrow \mathcal{S}_X^1$ Null ist) definiert eine Sequenz

$$(5.2.4) \quad \mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{S}_X^\bullet$$

alias einen Kandidaten für eine Auflösung der konstanten Garbe \mathbb{Z}_X .

Wer den Koaugmentationsmorphismus explizit konstruieren möchte, kann die Konstruktion in 5.2.5 variieren: Statt $U \mapsto S^\bullet(U)$ garbifiziere man die koaugmentierte Version $U \mapsto (\mathbb{Z} \rightarrow S^\bullet(U)) = \tilde{S}^\bullet(U) := \text{Hom}(\tilde{S}_\bullet(U), \mathbb{Z}[0])$, vgl. [Sch21, (3.1.9)].

5.2.7 (Natürlichkeit von (5.2.3) in topologischen Räumen). Sei $f: Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Sei $q \in \mathbb{Z}$. Für jedes offene $U \subseteq X$ liefert die Restriktion $f|: f^{-1}(U) \rightarrow U$ einen Gruppenmorphismus

$$S_X^q(U) = S^q(U) \xrightarrow{S^q(f)} S^q(f^{-1}(U)) = S_Y^q(f^{-1}(U)) = (f_* S_Y^q)(U).$$

Für variables U sind diese kompatibel und definieren einen Morphismus

$$S_X^q \rightarrow f_* S_Y^q$$

in $\text{PSh}(X; \text{Ab})$. Für variables q sind diese Morphismen kompatibel mit den Differentialen und definieren einen Morphismus

$$S_X^\bullet \rightarrow f_* S_Y^\bullet$$

in $\text{Kom}(\text{PSh}(X; \text{Ab}))$. Die universelle Eigenschaft der Garbifizierung (komponentenweise angewandt) liefert den gestrichelten Morphismus in $\text{Kom}(\text{Sh}(X; \text{Ab}))$ eindeutig so, dass das Diagramm

$$(5.2.5) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_X^\bullet & \dashrightarrow & f_* \mathcal{S}_Y^\bullet \\ \uparrow & & \uparrow \\ S_X^\bullet & \longrightarrow & f_* S_Y^\bullet \end{array}$$

kommutativ wird; die linke Vertikale ist der kanonische Morphismus in die Garbifizierung, die rechte das Bild unter f_* des entsprechenden Morphismus. Anwenden von $\Gamma = \Gamma(X; -)$ liefert (wegen $\Gamma(X; -) \circ f_* = \Gamma(Y; -)$) das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathcal{S}_X^\bullet) & \longrightarrow & \Gamma(f_* \mathcal{S}_Y^\bullet) \\ \uparrow & & \uparrow \\ S^\bullet(X) & \longrightarrow & S^\bullet(Y) \end{array}$$

Genauer definieren die Vertikalen eine natürliche Transformation $S^\bullet \Rightarrow \Gamma S^\bullet: \text{Top}^{\text{op}} \rightarrow \text{Kom}(\text{Ab})$. Dahinterschalten von H^q liefert eine natürliche Transformation

$$(5.2.6) \quad H_{\text{sing}}^q(-; \mathbb{Z}) \Rightarrow H^q \Gamma S^\bullet: \text{Top}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab},$$

deren Auswertung auf $X \in \text{Top}$ nach Konstruktion (5.2.3) ist.

Definition 5.2.8. Ein topologischer Raum X heißt **singulär-azyklisch**, wenn seine singuläre Homologie \mathbb{Z} im Grad Null ist und in allen anderen Graden verschwindet, in Formeln $H_\bullet^{\text{sing}}(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[0]$.

5.2.9. Ist X singular-azyklisch, so lebt auch die singuläre Kohomologie nur im Grad Null und ist dort \mathbb{Z} , in Formeln $H_{\text{sing}}^{\bullet}(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[0]$. Dies sieht man so:

- Abstrakt mit dem universellen Koeffiziententheorem der Kohomologie (siehe [Soe20, Korollar 5.7.2]) oder leichter mit [Soe20, Lemma 5.2.6, Kohomologie bei freien Homologiegruppen].
- Elementarer wie folgt (ist aber im wesentlichen das gerade zitierte Lemma): Für jeden Punkt $x \in X$ induziert die Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow S_0 X$, $n \mapsto nx$, einen Quasi-Isomorphismus $\mathbb{Z}[0] \rightarrow S_{\bullet}(X)$, der bereits eine Homotopieäquivalenz sein muss, denn beide Komplexe bestehen aus freien abelschen Gruppen und sind in Richtung der Pfeile beschränkt (siehe [Soe20, Satz 5.2.4, Kriterium für Homotopieäquivalenzen]). Da $\text{Hom}(-, \mathbb{Z}[0])$ zur Homotopiekategorie absteigt, ist auch $S^{\bullet}(X) = \text{Hom}(S_{\bullet}(X), \mathbb{Z}[0]) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}[0], \mathbb{Z}[0]) \cong \mathbb{Z}[0]$ eine Homotopieäquivalenz. Daraus folgt die Behauptung.
- Wer den Quasi-Isomorphismus im vorigen Punkt nicht von Hand konstruieren will, kann auch abstrakt [Soe20, Übung 5.2.9] verwenden.

Beispiele 5.2.10. Der \mathbb{R}^n ist singular-azyklisch. Folglich ist jede topologische Mannigfaltigkeit lokal¹⁷⁵ singular-azyklisch. Allgemeiner ist jeder lokal zusammenziehbare topologische Raum lokal singular-azyklisch.

Proposition 5.2.11. Sei X ein lokal singular-azyklischer topologischer Raum. Dann ist die Koaugmentierung

$$\mathbb{Z}_X \xrightarrow{(5.2.4)} S_X^{\bullet}$$

eine Auflösung der konstanten Garbe \mathbb{Z}_X .

Beweis. Da Exaktheit halmweise getestet werden kann, genügt es zu zeigen, dass die Sequenz $(\mathbb{Z}_X)_x \rightarrow (S_X^{\bullet})_x$ abelscher Gruppen für alle $x \in X$ eine Auflösung ist. Da die Halme sich beim Garbifizieren nicht ändern, genügt es zu zeigen, dass $(\tilde{\mathbb{Z}}_X)_x \rightarrow (S_X^{\bullet})_x$ eine Auflösung ist, wobei $\tilde{\mathbb{Z}}_X$ per Definition die konstante Prägarbe mit $U \mapsto \mathbb{Z}$ für alle $U \subseteq X$ ist (ihre Garbifizierung ist \mathbb{Z}_X).

Ist \mathcal{F} eine beliebige abelsche Prägarbe auf X , so gilt (alle Kolimiten filtrierend)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x &= \text{colim}_{U: x \in U \subseteq X} \mathcal{F}(U) = \text{colim}_{U: U \text{ offene Umgebung von } x \text{ in } X} \mathcal{F}(U) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{colim}_{U: U \text{ Umgebung von } x \text{ in } X} \mathcal{F}(U) \xleftarrow{\sim} \text{colim}_{U: U \text{ singular-azyklische Umgebung von } x \text{ in } X} \mathcal{F}(U), \end{aligned}$$

denn die offenen Umgebungen von x sind konfinal in allen Umgebungen von x und auf Grund unserer Annahme an X sind die singular-azyklischen (nicht notwendig offenen) Umgebungen von x konfinal in allen Umgebungen von x .

Da filtrierende Kolimiten exakt sind (siehe Proposition 1.2.61), genügt es also zu zeigen, dass für jede singular-azyklische Umgebung U von x die Sequenz $\mathbb{Z} \rightarrow S_X^{\bullet}(U)$ alias $\mathbb{Z} \rightarrow S^{\bullet}(U)$ exakt ist; dies ist aber eine direkte Konsequenz aus 5.2.9. \square

5.2.12. Ist X ein topologischer Raum, für den (5.2.4) eine Auflösung ist (etwa ein lokal singular-azyklischer Raum, siehe Proposition 5.2.11), so liefert die Definition der Garbenkohomologie als rechtsderivierter Funktor Gruppenmorphisamen

$$(5.2.7) \quad H^q(\Gamma(S_X^{\bullet})) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{Z}_X \hookrightarrow S_X^{\bullet}}} H_{\text{Sh}}^q(X; \mathbb{Z})$$

für alle $q \in \mathbb{Z}$.

Ist $f: Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung, so dass die Koaugmentierung $\mathbb{Z}_Y \hookrightarrow S_Y^{\bullet}$ auf Y ebenfalls eine Auflösung ist, so ist der Morphismus $S_X^{\bullet} \rightarrow f_* S_Y^{\bullet}$ (siehe (5.2.5)) ein Lift des offensichtlichen Morphismus

¹⁷⁵siehe [Sch20, Definition 5.2.2]

$\mathbb{Z}_X \rightarrow f_*\mathbb{Z}_Y$ ^{176 177}. Das Diagramm (4.3.2) spezialisiert in unserer Situation zu

$$(5.2.8) \quad \begin{array}{ccc} H^q(\Gamma(\mathcal{S}_X)) & \longrightarrow & H^q(\Gamma(\mathcal{S}_Y)) \\ (5.2.7) \downarrow & & \downarrow (5.2.7) \\ H_{\text{Sh}}^q(X; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{H^q(f)} & H_{\text{Sh}}^q(Y; \mathbb{Z}) \end{array}$$

Dies zeigt, dass die Morphismen (5.2.7) eine natürliche Transformation

$$(5.2.9) \quad H^q(\Gamma(\mathcal{S}_?^\bullet)) \Rightarrow H^q(-; \mathbb{Z}): \text{Top}_{\text{koaug}}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$$

definieren, wobei $\text{Top}_{\text{koaug}}^{\text{op}}$ in ad hoc Notation die volle Unterkategorie von Top bezeichne, deren Objekte diejenigen topologischen Räume X sind, für die die Koaugmentierung eine Auflösung $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{S}_X^\bullet$ ist.

5.2.13. Nun kann der Leser die Aussage von Satz 5.2.19, dem Ziel des aktuellen Abschnitts, verstehen. Zum Beweis benötigen wir weitere Vorbereitungen.

Ende der 25. Vorlesung am 20.07.2021.

5.2.14. Wir arbeiten nun mit singulären Ketten und unteren Indizes!

Sei X ein topologischer Raum. Sei $\text{UT} = \text{UT}_X: \mathbf{S}_\bullet X \rightarrow \mathbf{S}_\bullet X$ der (baryzentrische) Unterteilungsoperator, der bekanntlich zur Identität $\text{id}_{\mathbf{S}_\bullet X}$ homotop ist und somit die Identität auf der singulären Homologie induziert, siehe [Sch21, Definition 4.3.5, Lemma 4.3.8]. Der Kolimes über das (durch die total geordnete Menge (\mathbb{N}, \leq) indizierte) filtrierende Diagramm

$$\mathbf{S}_\bullet X \xrightarrow{\text{UT}} \mathbf{S}_\bullet X \xrightarrow{\text{UT}} \mathbf{S}_\bullet X \rightarrow \dots$$

von Komplexen heißt **Komplex der Grenzketten**

$$(5.2.10) \quad \begin{aligned} G_\bullet X &:= \text{colim} \left(\mathbf{S}_\bullet X \xrightarrow{\text{UT}} \mathbf{S}_\bullet X \xrightarrow{\text{UT}} \mathbf{S}_\bullet X \rightarrow \dots \right) \\ &=: \text{colim}_{n \in \mathbb{N}} (\mathbf{S}_\bullet X, \text{UT}) \end{aligned}$$

(Der Kolimes kann gradweise gebildet werden. Die platzsparende Notation in der zweiten Zeile wird später nützlich sein.) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ (welches die n -te Kopie von $\mathbf{S}_\bullet X$ indiziert) sei

$$(5.2.11) \quad \text{in}_n: \mathbf{S}_\bullet X \rightarrow G_\bullet X$$

die kanonische Abbildung in den Kolimes. All diese Abbildungen induzieren DIESELBE Abbildung auf der Homologie, denn

$$H_q(\text{in}_n) = H_q(\text{in}_{n+1} \circ \text{UT}) \underset{H_q(\text{UT})=\text{id}}{=} H_q(\text{in}_{n+1}): H_q(\mathbf{S}_\bullet X) = H_q^{\text{sing}}(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_q(G_\bullet X).$$

Da filtrierende Kolimiten abelscher Gruppen exakt sind (mit anderen Worten der Funktor $\text{colim}: \text{Ab}^{(\mathbb{N}, \leq)} \rightarrow \text{Ab}$ ein exakter Funktor ist, siehe Proposition 1.2.61, und deswegen der induzierte Funktor $\text{colim}: \text{Kom}(\text{Ab}^{(\mathbb{N}, \leq)}) = \text{Kom}(\text{Ab})^{(\mathbb{N}, \leq)} \rightarrow \text{Kom}(\text{Ab})$ auf Kategorien von Komplexen mit Homologie vertauscht, siehe Aufgabe 3.3.2), folgt

$$\begin{aligned} H_q(G_\bullet X) &= H_q \left(\text{colim} \left(\mathbf{S}_\bullet X \xrightarrow{\text{UT}} \mathbf{S}_\bullet X \xrightarrow{\text{UT}} \mathbf{S}_\bullet X \rightarrow \dots \right) \right) \\ &\cong \text{colim} \left(H_q(\mathbf{S}_\bullet X) \xrightarrow{H_q(\text{UT})=\text{id}} H_q(\mathbf{S}_\bullet X) \xrightarrow{H_q(\text{UT})=\text{id}} H_q(\mathbf{S}_\bullet X) \rightarrow \dots \right) \\ &= H_q(\mathbf{S}_\bullet X) \\ &= H_q(X; \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

und insbesondere sind alle $H_q(\text{in}_n)$ (dieselben) Isomorphismen.

Wir erinnern daran, dass $\text{UT} = (\text{UT}_X)_{X \in \text{Top}}: \mathbf{S}_\bullet \rightarrow \mathbf{S}_\bullet: \text{Top} \rightarrow \text{Kom}(\text{Ab})$ eine natürliche Transformation ist.

¹⁷⁶Dies sieht man formal am leichtesten, wenn man die Koaugmentationsmorphisme wie am Ende von 5.2.6 erklärt definiert und dann in 5.2.7 analog vorgeht

¹⁷⁷Dieser Morphismus ist modulo des offensichtliche Isomorphismu $\mathbb{Z}_Y \cong f^*\mathbb{Z}_X$ die Eins der Adjunktion (f^*, f_*) .

Sei X nun fixiert. Wir gehen nun ähnlich wie in 5.2.5 vor, jedoch gehen die Pfeile in die „falsche“ Richtung, weswegen wir keine (Komplexe von) Prägarben in Ab , sondern Prägarben in Ab^{op} bekommen.

Sei $i: V \Subset U$ eine Inklusion offener Teilmengen von X . Dann ist das Diagramm

$$(5.2.12) \quad \begin{array}{ccccccc} S_{\bullet}U & \xrightarrow{UT_U} & S_{\bullet}U & \xrightarrow{UT_U} & S_{\bullet}U & \longrightarrow & \dots \\ \uparrow S_{\bullet}(i) & & \uparrow S_{\bullet}(i) & & \uparrow S_{\bullet}(i) & & \\ S_{\bullet}V & \xrightarrow{UT_V} & S_{\bullet}V & \xrightarrow{UT_V} & S_{\bullet}V & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

kommutativ. Die Vertikalen induzieren durch Übergang zum Kolimes in beiden Zeilen einen Morphismus

$$(5.2.13) \quad G_{\bullet}V \rightarrow G_{\bullet}U \quad \text{in } \text{Kom}_{\bullet}(\text{Ab}).$$

Betrachten wir diesen nur in Grad q , so ist es ein Morphismus

$$G_qV \rightarrow G_qU \quad \text{in } \text{Ab}$$

oder äquivalent einen Morphismus

$$G_qV \leftarrow G_qU \quad \text{in } \text{Ab}^{\text{op}}.$$

¹⁷⁸ Wir können so jedes G_q als Prägarbe in Ab^{op} auffassen (es ist klar, dass für alle Inklusionen $W \Subset V \Subset U$ die gerade definierten Restriktionsabbildungen kompatibel sind).

Wir nennen G_q die q -te **Grenzketten- Ab^{op} -(Prä-)Garbe**, denn wir werden in Satz 5.2.16 sehen, dass es sich in der Tat um eine Ab^{op} -Garbe handelt.

Man nennt Objekte von $\text{PSh}(X; \text{Ab}^{\text{op}})$ **Koprägarben abelscher Gruppen**.

Man nennt Objekte von $\text{Sh}(X; \text{Ab}^{\text{op}})$ **Kogarben abelscher Gruppen**. In diesem Sinne ist G_q eine Ko(prä)garbe abelscher Gruppen.

Ich habe bisher nicht darüber nachgedacht, aber laut [Soe21, 4.10.4] ist $\text{Sh}(X; \text{Ab}^{\text{op}})$ KEINE abelsche Kategorie.

5.2.15. Sei X ein topologischer Raum und \mathcal{V} eine offene Überdeckung von X .¹⁷⁹ Da Unterteilung $UT: S_{\bullet}X \rightarrow S_{\bullet}X$ den Unterkomplex $S_{\bullet}^{\mathcal{V}}$ der \mathcal{V} -feinen Ketten in sich selbst abbildet, ist $UT: \frac{S_{\bullet}X}{S_{\bullet}^{\mathcal{V}}X} \rightarrow \frac{S_{\bullet}X}{S_{\bullet}^{\mathcal{V}}X}$ wohldefiniert. Betrachte das Diagramm

$$\frac{S_{\bullet}X}{S_{\bullet}^{\mathcal{V}}X} \xrightarrow{UT} \frac{S_{\bullet}X}{S_{\bullet}^{\mathcal{V}}X} \xrightarrow{UT} \frac{S_{\bullet}X}{S_{\bullet}^{\mathcal{V}}X} \rightarrow \dots$$

von Komplexen abelscher Gruppen. Sein (ohne Einschränkung gradweise gebildeter) (filtrierender) Kolimes ist der Nullkomplex, in Formeln (mit platzsparender Notation wie in (5.2.10))

$$(5.2.14) \quad \text{colim}_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{S_{\bullet}X}{S_{\bullet}^{\mathcal{V}}X}, UT \right) = 0,$$

denn jeder singuläre q -Simplex/jede singuläre q -Kette wird unter einer hinreichend hohen Potenz des Unterteilungsoperators \mathcal{V} -fein (siehe Behauptung A im Beweis von [Sch21, Satz 4.3.10]) und damit im obigen Diagramm Null.

Satz 5.2.16 (q -te Grenzketten- Ab^{op} -Prägarbe G_q ist eine welke und „Čech-azyklische“ Ab^{op} -Garbe). *Seien X ein topologischer Raum und $q \in \mathbb{Z}$.*

Definition 1.7.1 und Proposition 1.7.2 sind mutatis mutandis auch für Prägarben $\mathcal{F} \in \text{PSh}(X; \mathcal{A})$ in einer beliebigen abelschen Kategorie \mathcal{A} sinnvoll bzw. gültig. (Man muss dann die Differentiale abstrakt definieren und nicht mit Hilfe von Gruppenelementen.) Wir verwenden dies nun für $\mathcal{A} = \text{Ab}^{\text{op}}$ und $G_q \in \text{PSh}(X; \text{Ab}^{\text{op}})$.

¹⁷⁸Ich stelle mir $G_{\bullet}V \rightarrow G_{\bullet}U$ als zweidimensionales kommutatives Diagramm in Ab vor. Ersetzt man alle Pfeile durch ihre opponierten (alias dreht man alle Pfeile um), so ist das ein zweidimensionales kommutatives Diagramm in Ab^{op} , das man als Morphismus

$$G_{\bullet}V \leftarrow G_{\bullet}U$$

in $\text{Kom}_{\bullet}(\text{Ab}^{\text{op}})$ auffassen kann. Wichtig dabei ist aber, dass wir auch die Pfeile in den beiden Komplexen umgedreht haben, wir nun also nach der üblichen Konvention eigentlich obere Indizes verwenden sollten.

¹⁷⁹Es genügt auch anzunehmen, dass \mathcal{V} eine Überdeckung von X ist, so dass auch $\{V^{\circ} \mid V \in \mathcal{V}\}$ eine Überdeckung von X ist.

(a) G_q ist „Čech-azyklisch“, d. h. die höheren Čech-Kohomologien verschwinden bezüglich jeder offenen Überdeckung:

Sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X . Dann ist

$$G_q(X) \hookrightarrow \check{C}(\mathcal{U}, G_q)$$

bzw. ausgeschrieben

$$G_q(X) \hookrightarrow \prod_{U_0 \in \mathcal{U}} G_q(U_0) \rightarrow \prod_{(U_0, U_1) \in \mathcal{U}^2} G_q(U_0 \cap U_1) \rightarrow \dots$$

eine Auflösung von $G_q(X)$ in Ab^{op} .

Wenn man dies umschreibt in Ab , so wird dies die Behauptung, dass

$$(5.2.15) \quad 0 \leftarrow G_q(X) \leftarrow \bigoplus_{U_0 \in \mathcal{U}} G_q(U_0) \leftarrow \bigoplus_{(U_0, U_1) \in \mathcal{U}^2} G_q(U_0 \cap U_1) \leftarrow \dots$$

eine exakte Sequenz in Ab ist.

(b) Die Ab^{op} -Prägarbe G_q ist sogar eine Ab^{op} -Garbe (= eine Kogarbe abelscher Gruppen), in Formeln $G_q \in \text{Sh}(X; \text{Ab}^{\text{op}}) \subset \text{PSh}(X; \text{Ab}^{\text{op}})$.

(c) G_q ist welk: Ist $U \in \mathcal{U}$ beliebig, so ist Restriktion ein Epimorphismus

$$G_q(X) \twoheadrightarrow G_q(U)$$

in Ab^{op} .

Umgeschrieben nach Ab ist dies die Behauptung, dass der Gruppenmorphismus

$$G_q(X) \leftarrow G_q(U)$$

injektiv ist.¹⁸⁰

Beweis. (a) Wir arbeiten in Ab , beweisen also die rote Behauptung.

Wir behaupten zunächst, dass

$$(5.2.16) \quad 0 \leftarrow S_q^{\mathcal{U}}(X) \leftarrow \bigoplus_{U_0 \in \mathcal{U}} S_q(U_0) \leftarrow \bigoplus_{(U_0, U_1) \in \mathcal{U}^2} S_q(U_0 \cap U_1) \leftarrow \dots$$

exakt ist (beachte die \mathcal{U} -feinen Ketten links). Klar ist, dass jede Verknüpfung zweier konsekutiver Pfeile Null ist.

Sei $\sigma: \Delta_q \rightarrow X$ ein singulärer q -Simplex, dessen Bild in einem Element von \mathcal{U} enthalten ist. Dann ist

$$(5.2.17) \quad 0 \leftarrow \mathbb{Z}\sigma \leftarrow \bigoplus_{\substack{U_0 \in \mathcal{U} \\ \text{im}(\sigma) \subset U_0}} \mathbb{Z}\sigma \leftarrow \bigoplus_{\substack{(U_0, U_1) \in \mathcal{U}^2 \\ \text{im}(\sigma) \subset U_0 \cap U_1}} \mathbb{Z}\sigma \leftarrow \dots$$

offensichtlich eine Untersequenz von (5.2.16), wobei hier σ jeweils als singulärer Simplex mit Bild in dem entsprechenden Schnitt aufzufassen ist; „Untersequenz“ ist so zu verstehen, dass die Einschränkungen der Abbildungen in (5.2.16) die Abbildungen in (5.2.17) induzieren.¹⁸¹

Genauer ist (5.2.16) die direkte Summe aller Sequenzen (5.2.17) für variierende singuläre Simplexe σ wie oben. Deswegen genügt es zu zeigen, dass die Sequenz (5.2.17) für fixiertes σ exakt ist. Die Sequenz (5.2.17) ist aber in offensichtlicher Weise isomorph (samt der Differentiale!) zu der azyklischen Sequenz in [Sch21, 2.4.30.(a)], wenn wir als Eckenmenge

$$E := \{U \in \mathcal{U} \mid \text{im}(\sigma) \subset U\}$$

wählen.

¹⁸⁰Allgemeiner gilt mit „demselben“ Beweis: Ist $A \hookrightarrow X$ eine beliebige injektive stetige Abbildung, so gilt $G_q A \hookrightarrow G_q X$ für die in offensichtlicher Weise definierte Abbildung (ersetze $V \xrightarrow{i} U$ durch $A \hookrightarrow X$ in (5.2.12)).

¹⁸¹Versuch einer Erklärung: Alle auftretenden abelschen Gruppen $S_q^{\mathcal{U}}(X)$ und $S_q(U_0 \cap \dots \cap U_n)$ sind frei über den offensichtlichen singulären Simplexe. Die Einschränkung jedes Differentials auf jeden Summanden ist eine alternierende Summe von „trivialen“ Abbildungen (samt Inklusion in das Ziel des Differentials) wie etwa $S_q(U_0 \cap U_1 \cap U_2) \rightarrow S_q(U_0 \cap U_2)$, die von der Inklusion $U_0 \cap U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_0 \cap U_2$ induziert wird, und somit σ (als Simplex in $U_0 \cap U_1 \cap U_2$) auf σ (als Simplex in $U_0 \cap U_2$) abbildet.

Dies zeigt, dass (5.2.16) exakt ist. Nun fassen wir 5.2.16 als nullte Zeile auf, schreiben darüber noch einmal 5.2.16 als erste Zeile etc. und ergänzen überall als vertikale Pfeile die jeweiligen Unterteilungsoperatoren UT. Dann bilden wir die Kolimiten über die Spalten, notieren den Kolimes über die erste Spalte als $G_q^{\mathcal{U}}(X)$ und erhalten wegen der Exaktheit filtrierender Kolimiten die exakte Sequenz

$$0 \leftarrow G_q^{\mathcal{U}}(X) \leftarrow \bigoplus_{U_0 \in \mathcal{U}} G_q(U_0) \leftarrow \bigoplus_{(U_0, U_1) \in \mathcal{U}^2} G_q(U_0 \cap U_1) \leftarrow \dots$$

Zu zeigen bleibt noch, dass die offensichtliche (aber auch sofort erklärte) Abbildung $G_q^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow G_q(X)$ bijektiv ist.

Schreibe die kurze exakte Sequenz

$$S_q^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow S_q(X) \rightarrow \frac{S_q(X)}{S_q^{\mathcal{U}}(X)}$$

ähnlich wie oben abzählbar oft übereinander, verbinde vertikal durch Unterteilungsoperatoren und gehe zum filtrierenden Kolimes über. Da filtrierende Kolimiten exakt sind, erhalten wir wieder eine kurze exakte Sequenz

$$G_q^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow G_q(X) \rightarrow \underbrace{\operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{S_q(X)}{S_q^{\mathcal{U}}(X)}, \text{UT} \right)}_{\stackrel{(5.2.14)}{=} 0}.$$

Da der rechte Term verschwindet, ist die linke Abbildung wie gewünscht bijektiv.

(b) Weil die q -te Grenzketten- Ab^{op} -(Prä-)Garbe auf W die Restriktion auf W der q -ten Grenzketten- Ab^{op} -(Prä-)Garbe auf X ist, liefert Aussage (a) unmittelbar: Ist $W \Subset X$ eine beliebige offene Teilmenge $W \Subset X$ und \mathcal{U} eine beliebige offene Überdeckung von W , so ist $G_q(W) \hookrightarrow \check{C}(\mathcal{U}, G_q|_W)$ eine Auflösung. Der „Anfang“

$$G_q(W) \hookrightarrow \prod_{U_0 \in \mathcal{U}} G_q(U_0) \rightarrow \prod_{(U_0, U_1) \in \mathcal{U}^2} G_q(U_0 \cap U_1)$$

dieser Auflösung in Ab^{op} besagt gerade, dass kompatible Schnitte über den Elementen von \mathcal{U} eindeutig zu einem Schnitt über W verkleben. Also erfüllt G_q das Garbenaxiom.

Für spätere Referenz schreiben wir diesen Auflösungsanfang nach Ab um und erhalten dort die exakte Sequenz

$$(5.2.18) \quad 0 \leftarrow G_q(W) \leftarrow \bigoplus_{U_0 \in \mathcal{U}} G_q(U_0) \leftarrow \bigoplus_{(U_0, U_1) \in \mathcal{U}^2} G_q(U_0 \cap U_1).$$

(c) In (5.2.12) sind alle Vertikalen injektiv, wenn man \bullet durch q ersetzt. Dann ist offensichtlich auch die induzierte Abbildung $G_q(V) \rightarrow G_q(U)$ auf den filtrierenden Kolimiten injektiv (dies folgt sofort aus unserer Beschreibung filtrierender Kolimiten, aber auch aus der Exaktheit solcher, denn jeder Monomorphismus ist der Kern seines Kokerns). \square

5.2.17. Sei X ein topologischer Raum. Wir verwenden nun den in Proposition 5.1.7 definierten Funktor \mathbb{D} . Für $U \Subset X$ betrachte den Komplex

$$\mathcal{G}_X^\bullet(U) := \mathbb{D}(G_\bullet U)$$

abelscher Gruppen, wobei wir hier den Komplex $G_\bullet U$ wie in 5.2.3 erklärt als Kokomplex auffassen; explizit ist seine q -te Komponente durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_X^q(U) &:= (\mathcal{G}_X^\bullet(U))^q = \mathbb{D}(G_\bullet U)^q \\
&= \text{Hom}(G_\bullet(U), I_{\mathbb{Z}}^q) \\
&= \prod_{b \in \mathbb{Z}} \text{Ab}(G_\bullet(U)^{b-q}, I_{\mathbb{Z}}^b) \\
&= \prod_{b \in \mathbb{Z}} \text{Ab}(G_{q-b}(U), I_{\mathbb{Z}}^b) \\
&= \text{Ab}(G_{q-0}(U), I_{\mathbb{Z}}^0) \times \text{Ab}(G_{q-1}(U), I_{\mathbb{Z}}^1) \\
(5.2.19) \quad &= \text{Ab}(G_q(U), \mathbb{Q}) \times \text{Ab}(G_{q-1}(U), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

gegeben, hängt also nicht nur von $G_q(U)$, sondern auch von $G_{q-1}(U)$ ab.

Für $V \subseteq U$ liefern die Morphismen (5.2.13) einen Morphismus

$$\mathcal{G}_X^\bullet(U) = \mathbb{D}(G_\bullet U) \rightarrow \mathcal{G}_X^\bullet(V) = \mathbb{D}(G_\bullet V)$$

und insbesondere in Grad q Morphismen

$$\mathcal{G}_X^q(U) \rightarrow \mathcal{G}_X^q(V).$$

Offensichtlich macht dies jedes \mathcal{G}_X^q zu einer Prägarbe abelscher Gruppen und \mathcal{G}_X^\bullet zu einem Komplex solcher Prägarben.

Proposition 5.2.18. *Der Komplex \mathcal{G}_X^\bullet besteht aus welken Garben und ist in nicht-negativen Graden konzentriert. Wir nennen ihn den **Komplex der Kogrenzketten-Garben**.¹⁸²*

Beweis. In [Soe21] werden Garbeneigenschaft und Welkheit aus der exaktheit von \mathbb{D} gefolgert. Unser Beweis ist nur eine explizite (gradweise) Expansion dieses Beweises - in gewisser Weise wiederholen wir das Argument aus dem Beweis von Proposition 5.1.7.(a)).

Dass jedes \mathcal{G}_X^q eine Garbe abelscher Gruppen ist, folgt aus Satz 5.2.16.(b): Der Funktor $\text{Ab}(-, \mathbb{Q})$ verwandelt Kokerne in Ab in Kerne in Ab (genauer ist er sogar exakt, da \mathbb{Q} injektiv ist). Deswegen verwandelt er die exakte Sequenz (5.2.18) (unter den dortigen Voraussetzungen) in eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Ab}(G_q(W), \mathbb{Q}) \hookrightarrow \prod_{U_0 \in \mathcal{U}} \text{Ab}(G_q(U_0), \mathbb{Q}) \rightarrow \prod_{(U_0, U_1) \in \mathcal{U}^2} \text{Ab}(G_q(U_0 \cap U_1), \mathbb{Q})$$

abelscher Gruppen. Analog können wir den (ebenfalls exakten) Funktor $\text{Ab}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ auf (5.2.18) für G_{q-1} anwenden. Das Produkt der so erhaltenen exakten Sequenzen ist exakt und ist wegen (5.2.19) durch

$$0 \rightarrow \mathcal{G}_X^q(W) \hookrightarrow \prod_{U_0 \in \mathcal{U}} \mathcal{G}_X^q(U_0) \rightarrow \prod_{(U_0, U_1) \in \mathcal{U}^2} \mathcal{G}_X^q(U_0 \cap U_1)$$

gegeben. (Die Morphismen sind die Restriktionsabbildungen unserer Prägarbe.) Dies zeigt, dass \mathcal{G}_X^q eine Garbe ist.

(Führt man dasselbe Argument mit (5.2.15) statt dessen „Ende“ (5.2.18) (für $W = X$) durch, zeigt dies sogar, dass \mathcal{G}_X^q Čech-azyklisch ist; hierbei wird aber benötigt, dass \mathbb{Q} und \mathbb{Q}/\mathbb{Z} injektiv sind.)

Dass jedes \mathcal{G}_X^q welk ist, folgt aus Satz 5.2.16.(c): Die dort (in rot) gezeigten Monomorphismen $G_q(U) \hookrightarrow G_q(X)$ bzw. $G_{q-1}(U) \hookrightarrow G_{q-1}(X)$ abelscher Gruppen werden unter den EXAKTEN Funktoren $\text{Ab}(-, \mathbb{Q})$ bzw. $\text{Ab}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ zu Epimorphismen, deren Produkt die gesuchte Surjektion

$$\mathcal{G}_X^q(X) \twoheadrightarrow \mathcal{G}_X^q(U)$$

ist. Also ist \mathcal{G}_X^q welk.

Das \mathcal{G}_X^\bullet in Graden ≥ 0 konzentriert ist, folgt aus (5.2.19), denn $G_q(U) \neq 0$ impliziert $q \geq 0$. \square

¹⁸²Der Name ist wohl dadurch motiviert, da er mit Hilfe von Komplexen von singulären Ketten gebildet wurde, dann war da noch ein Kolimes alias (Ko?)Grenzwert dabei; vielleicht bezieht sich die Vorsilbe *Ko* auch darauf, dass mit \mathbb{D} „dualisiert“ wurde.

Satz 5.2.19 (Vergleichsisomorphismus zwischen singulärer Kohomologie und Garbenkohomologie). *Sei X ein topologischer Raum, für den $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{S}_X^\bullet$ eine Auflösung ist (etwa ein lokal singulär-azyklischer Raum, siehe Proposition 5.2.11). Sei $q \in \mathbb{Z}$. Dann ist die Verknüpfung der beiden¹⁸³ Morphismen*

$$H_{\text{sing}}^q(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{(5.2.3)} H^q(\Gamma(\mathcal{S}_X^\bullet)) \xrightarrow{(5.2.7)} H_{\text{Sh}}^q(X; \mathbb{Z})$$

ein Isomorphismus

$$H_{\text{sing}}^q(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_{\text{Sh}}^q(X; \mathbb{Z}).$$

Er heißt **Vergleichsisomorphismus zwischen singulärer Kohomologie und Garbenkohomologie** und ist natürlich in topologischen Räumen X wie oben (nach (5.2.6) und (5.2.9)).

Dieselbe Aussage gilt für eine beliebige abelsche Gruppe A statt \mathbb{Z} , d. h. $H_{\text{sing}}^q(X; A) \xrightarrow{\sim} H_{\text{Sh}}^q(X; A)$ für alle $q \in \mathbb{Z}$, mit „demselben“ (notationell aber schlimmeren) Beweis (Details noch nicht gecheckt). Statt der injektiven Auflösung $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \twoheadrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ nimmt man eine Zwei-Term-Auflösung von A , welche existiert, da Quotienten injektiver (= divisibler) abelscher Gruppen injektiv sind. Vermutlich braucht man (wohl etwas schwächer) nur, dass $A_X \hookrightarrow \mathcal{S}_{(X;A)}^\bullet$ eine Auflösung ist.

Beweis. Für jedes $U \in X$ haben wir den kanonischen Morphismus

$$S_\bullet(U) \xrightarrow[\text{(5.2.11)}]{\text{ino}} G_\bullet(U)$$

von Komplexen abelscher Gruppen, von dem wir bereits wissen, dass er ein Quasi-Isomorphismus ist. Da der Funktor \mathbb{D} nach Proposition 5.1.7.(c) Quasi-Isomorphismen erhält, ist der rechte Pfeil im folgenden Diagramm ein Quasi-Isomorphismus

$$S_X^\bullet(U) = S^\bullet(U) \xrightarrow[\text{=: } T_X^\bullet(U)]{(5.2.1)} \text{Hom}(S_\bullet(U), \mathbb{Z}[0]) \rightarrow \underbrace{\mathbb{D}(S_\bullet(U))}_{\text{=: } T_X^\bullet(U)} \xleftarrow{\mathbb{D}(\text{ino})} \mathbb{D}(G_\bullet(U)) = \mathcal{G}_X^\bullet(U).$$

Der linke Pfeil ist nach Teil (b) der zitierten Proposition ebenfalls ein Quasi-Isomorphismus, denn $S_\bullet(U)$ besteht aus freien abelschen Gruppen.

Offensichtlich definiert $U \mapsto T_X^\bullet(U)$ für variables $U \in X$ einen Komplex T_X^\bullet von Prägarben auf X (das geht (einfacher als und) vollkommen analog, wie wir das in 5.2.17 für \mathcal{G}_X^\bullet erklärt haben). Wie \mathcal{G}_X^\bullet und S_X^\bullet ist auch T_X^\bullet in nicht-negativen Graden konzentriert.

Die beiden obigen Quasi-Isomorphismen für variables $U \in X$ definieren Morphismen

$$(5.2.20) \quad S_X^\bullet \rightarrow T_X^\bullet \leftarrow \mathcal{G}_X^\bullet$$

von Komplexen abelscher Prägarben – beide sind Quasi-Isomorphismen in der Kategorie $\text{Kom}(\text{PSh}(X; \text{Ab}))$ sind (denn in $\text{PSh}(X; \text{Ab})$ werden alle Kerne und Kokerne naiv ausgerechnet, was dann natürlich auch für Kozykel, Koränder und Kohomologien eines Komplexes gilt; Quasi-Isomorphismus zu sein, bedeutet also schlicht, auf jeder offenen Menge zu einem Quasi-Isomorphismus auszuwerten).

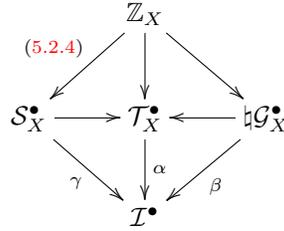
Wir garbifizieren (5.2.20) (wenden also \natural auf alle Komponenten und Pfeile an), verwenden die Notation $\mathcal{T}_X^\bullet := \natural T_X^\bullet$, erinnern an die Definition $S_X^\bullet \xrightarrow{(5.2.2)} \natural S_X^\bullet$ und erhalten so das folgende kommutative Diagramm, dessen Vertikalen (komponentenweise) die kanonischen Abbildungen in die Garbifizierungen sind.

$$\begin{array}{ccccc} S_X^\bullet & \longrightarrow & T_X^\bullet & \longleftarrow & \mathcal{G}_X^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \sim \\ S_X^\bullet & \longrightarrow & \mathcal{T}_X^\bullet & \longleftarrow & \natural \mathcal{G}_X^\bullet \end{array}$$

Die rechte Vertikale ist ein Isomorphismus, denn alle Komponenten von \mathcal{G}_X^\bullet sind bereits Garben nach Proposition 5.2.18. Die beiden Morphismen in der unteren Zeile, aufgefasst als Morphismen in $\text{Kom}(\text{Sh}(X; \text{Ab}))$ (auch wenn das gesamte Diagramm in $\text{Kom}(\text{PSh}(X; \text{Ab}))$ lebt), sind Quasi-Isomorphismen, denn Garbifizierung $\natural: \text{PSh}(X; \text{Ab}) \rightarrow \text{Sh}(X; \text{Ab})$ ist exakt (siehe Beispiel 2.11.13.(d)) und der induzierte Morphismus $\natural: \text{Kom}(\text{PSh}(X; \text{Ab})) \rightarrow \text{Kom}(\text{Sh}(X; \text{Ab}))$ erhält somit Quasi-Isomorphismen (siehe Aufgabe 3.3.2).

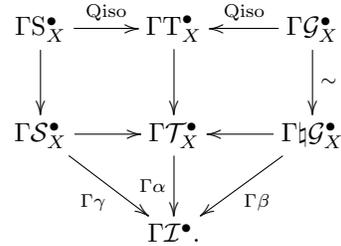
¹⁸³Warnung: Wir behaupten nicht, dass diese beiden Morphismen Isomorphismen sind. Für parakompakte Räume gilt dies, siehe [Soe21].

Die drei Morphismen von der konstanten Garbe \mathbb{Z}_X (als Komplex in Grad Null) im folgenden Diagramm sind die offensichtlichen (der linke ist in 5.2.6 erklärt, die anderen konstruiere man analog; Kommutativität des oberen Teils des Diagramms ist klar).

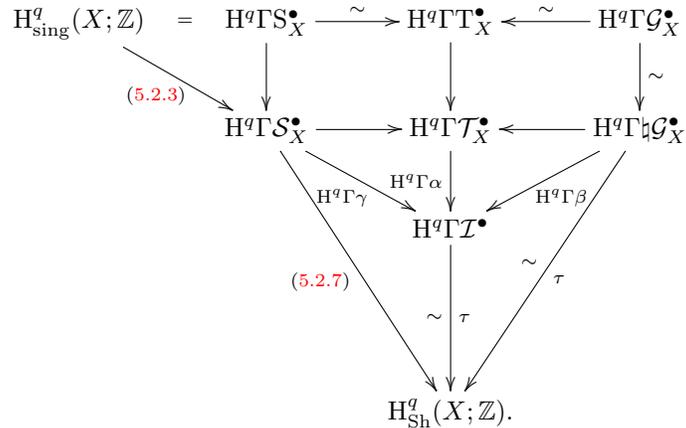


Wir erklären nun den unteren Teil des Diagramms. Sei $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{I}^\bullet$ eine injektive (und somit welke) Auflösung. Laut Annahme ist der Pfeil (5.2.4) eine Auflösung der konstanten Garbe. Dann sind aber auch die anderen beiden bei \mathbb{Z}_X startenden Morphismen Auflösungen (weil die Horizontalen Quasi-Isomorphismen sind). Folglich hat $\text{id}_{\mathbb{Z}_X}$ nach Korollar 3.2.9 aus dem Hauptsatz der homologischen Algebra einen Lift $\alpha: \mathcal{T}_X^\bullet \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$ wie im Diagramm eingetragen – dies bedeutet, dass die vertikale Komposition $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{T}_X^\bullet \xrightarrow{\alpha} \mathcal{I}^\bullet$ die zuvor gewählte injektive Auflösung ist. Die beiden Morphismen β und γ sind per Definition die offensichtlichen Verknüpfungen, die das Diagramm kommutativ machen. Alle Morphismen α, β, γ sind Morphismen von Auflösungen der konstanten Garbe \mathbb{Z}_X .

Der Globale-Schnitte-Funktor $\Gamma: \text{Kom}(\text{PSh}(X; \text{Ab})) \rightarrow \text{Kom}(\text{Ab})$ liefert das kommutative Diagramm



Die mit *Qiso* beschrifteten Pfeile sind Quasi-Isomorphismen, wie zuvor erklärt. Nehmen wir die q -te Kohomologie dieses Diagramms und verwenden die Definition der Garbenkohomologie als rechtsderiviertem von Γ , so erhalten wir das kommutative Diagramm



(Alle bei $H_{\text{Sh}}^q(X; \mathbb{Z})$ endenden Morphismen sind τ 's, weswegen der untere Teil des Diagramms kommutiert.) Da \mathcal{I} eine injektive und \mathcal{G}_X^\bullet eine welke Auflösung der konstanten Garbe sind, berechnen diese jeweils die Garbenkohomologie in dem Sinne, dass die zugehörigen τ 's wie im Diagramm angedeutet Isomorphismen sind (Satz 4.1.10 und Satz 3.5.16).¹⁸⁴

¹⁸⁴Dies bedeutet, dass $\Gamma \beta$ ein Quasi-Isomorphismus ist, was ein Spezialfall von 3.5.18 ist.

Da der „Weg rechtsherum“ in unserem Diagramm aus Isomorphismen besteht, ist auch die vertikale Verknüpfung $H^q\Gamma_X^\bullet \rightarrow H_{\text{Sh}}^q(X; \mathbb{Z})$ bijektiv, woraus dann sofort folgt, dass die linke Verknüpfung, unser Vergleichsisomorphismus in spe , in der Tat ein Isomorphismus ist. \square

Ende der 26. Vorlesung am 22.07.2021 (letzte Vorlesung).

LITERATUR

- [Bre97] Glen E. Bredon. *Sheaf theory*, volume 170 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.
- [For77] Otto Forster. *Riemannsche Flächen*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. Heidelberger Taschenbücher, Band 184.
- [Ive86] Birger Iversen. *Cohomology of sheaves*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [KS06] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Categories and sheaves*, volume 332 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.
- [nLa21] nLab authors. HomePage. <http://ncatlab.org/nlab/show/HomePage>, February 2021. [Revision 281](#).
- [Sch20] Olaf M. Schnürer. Algebraische Topologie: Fundamentalgruppen und Überlagerungstheorie. https://math.uni-paderborn.de/fileadmin/mathematik/AG-Algebra/Algebraische_Topologie/algebraische-topologie-fundamentalgruppen-und-ueberlagerungen-paderborn-2019.pdf, 2020.
- [Sch21] Olaf M. Schnürer. Algebraische Topologie: Singuläre homologie, 2021.
- [Soe20] Wolfgang Soergel. Singuläre Homologie. <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/Skripten/XXTS.pdf>, 2020.
- [Soe21] Wolfgang Soergel. Garbenkohomologie. <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/Skripten/XXTG.pdf>, 2021.
- [SS15] Olaf M. Schnürer and Wolfgang Soergel. Proper base change for separated locally proper maps. *to appear in Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 2015. [arXiv:1404.7630](#).
- [Sta18] The Stacks Project Authors. Stacks project. <http://stacks.math.columbia.edu>, 2018.
- [Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [Wik20] Contributors Wikipedia. Wikipedia, 2020. www.wikipedia.org.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK, UNIVERSITÄT PADERBORN, WARBURGER STRASSE 100, 33098 PADERBORN, GERMANY
Email address: olaf.schnuerer@math.uni-paderborn.de