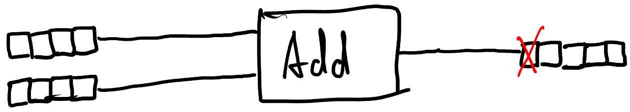
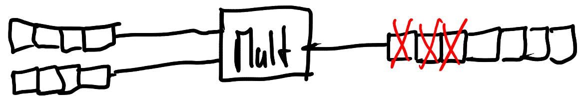
- 1 Prüfung
- 1 Projekt (Webseite)

Clock arithmetic und negative

Schriftliche Addition ⇝ 4-Bit-Addierer



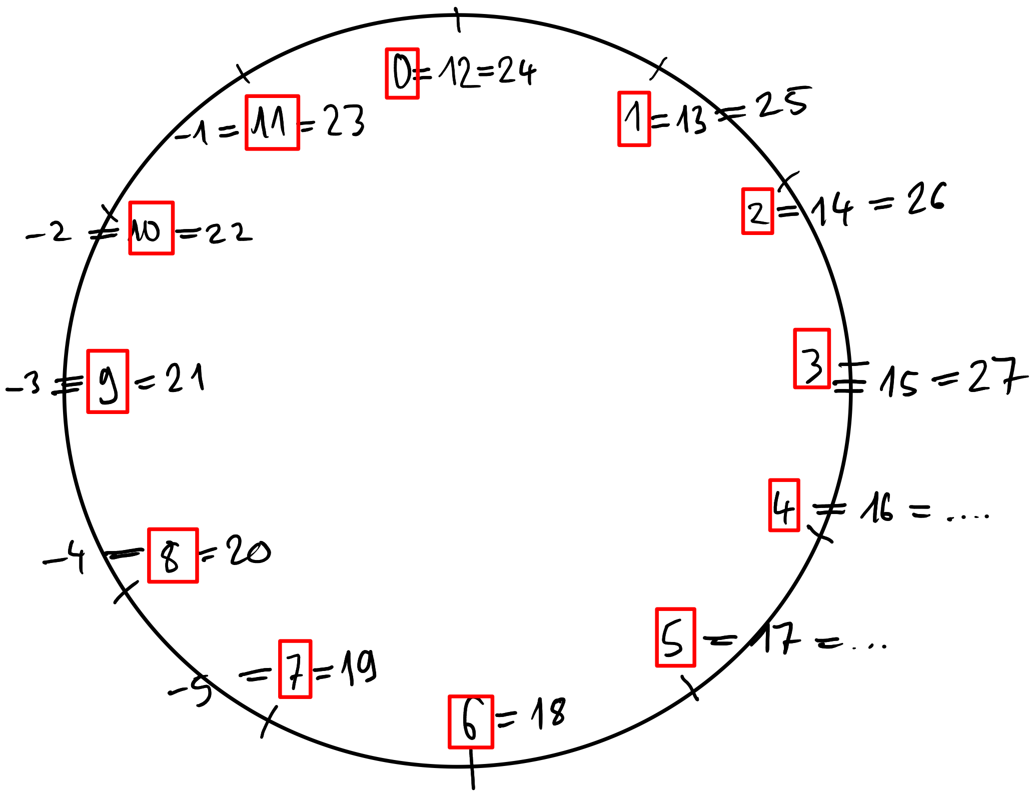
analog: Schriftliche Multiplikation ⇝ 4-Bit-Multiplizierer



Annahme: Computer hat 4 Bit für jede Zahl.

Ergebnis von $\boxed{\text{Add}}$ und $\boxed{\text{Mult}}$ stimmt nur noch bis auf Vielfache von $16 = 2^4$

Exkurs: Clock arithmetic = Rechnen mit Uhrzeiten = Rechnen mit Resten = modulare Arithmetik.



„=" bedeutet hier: unterscheidet sich um Vielfaches von 12

Rechnen mit roten Uhrzeiten:

„Rest modulo 12"

Addition: addiere wie üblich, nimm den Rest bei Division durch 12

Multiplikation: multipliziere —"— —"—

gleichbedeutend: nimm diejenige rote Uhrzeit, die sich vom Ergebnis um 12 oder Vielfaches davon unterscheidet.

Aufgaben:

$3+7 = 10$

$9+7 = (16 = 12\cdot 1 + 4 =)\ 4$

$3\cdot 2 = 6$

$3\cdot 7 = (21 = 21-12 =)\ 9$

$9\cdot 7 = (63 = 12\cdot 5 + 3 =)\ 3$

Aufgaben: Löse

$5+x=7$ $\quad x=2$

$7+x=5$ $\quad x=10$

$7+x=0$ $\quad x=5$

$7\cdot x=11$ $\quad x=5$

$7\cdot x=1$ $\quad x=7$ da $7\cdot 7=49=48+1=1$

$2\cdot x=11$ $\quad$ keine Lösung, da „links gerade, rechts ungerade"

$(2x=2 \Longleftrightarrow)$ $\quad 2x+1=3$ $\quad x=1$ oder $x=7$

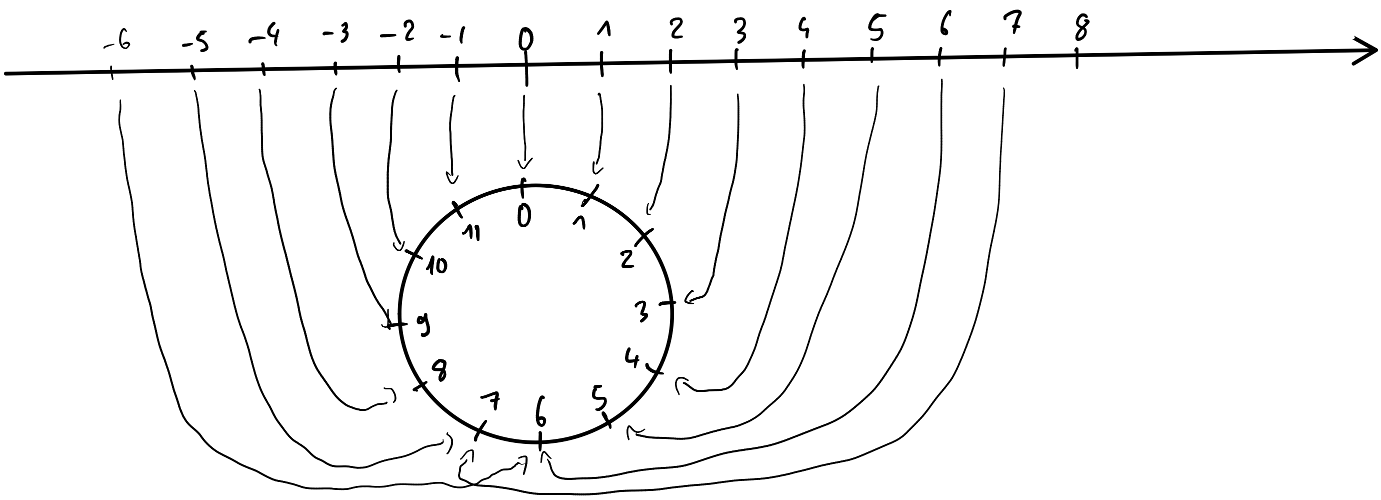
$2x+2=3$ $\quad$ keine Lösung da

$3\cdot x=9$ $\quad x=3$ oder $x=7$ oder $x=11$

$0\cdot x=0$ $\quad$ hat 12 Lösungen

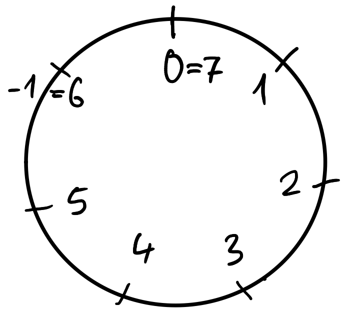
Die Menge dieser Uhrzeiten wird als $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ notiert. „$\mathbb{Z}$ modulo $12\mathbb{Z}$".

Vorstellung: Zahlenstrahl $\mathbb{Z}$ wird zum „Zahlenring" $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ aufgerollt.



Statt 12 kann jede andere natürliche Zahl nehmen,

etwa $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ = Uhr mit 7 Zeiten

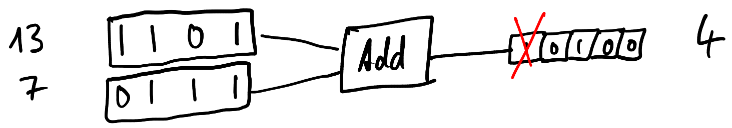


$a+b=b+a$, $ab=ba$ $\quad (a+b)+c=a+(b+c)$, $(ab)c=a(bc)$

Alle Rechenregeln (Kommutativgesetze, Assoziativgesetze, Distributivgesetz) gelten analog.

$a(b+c)=ab+ac$

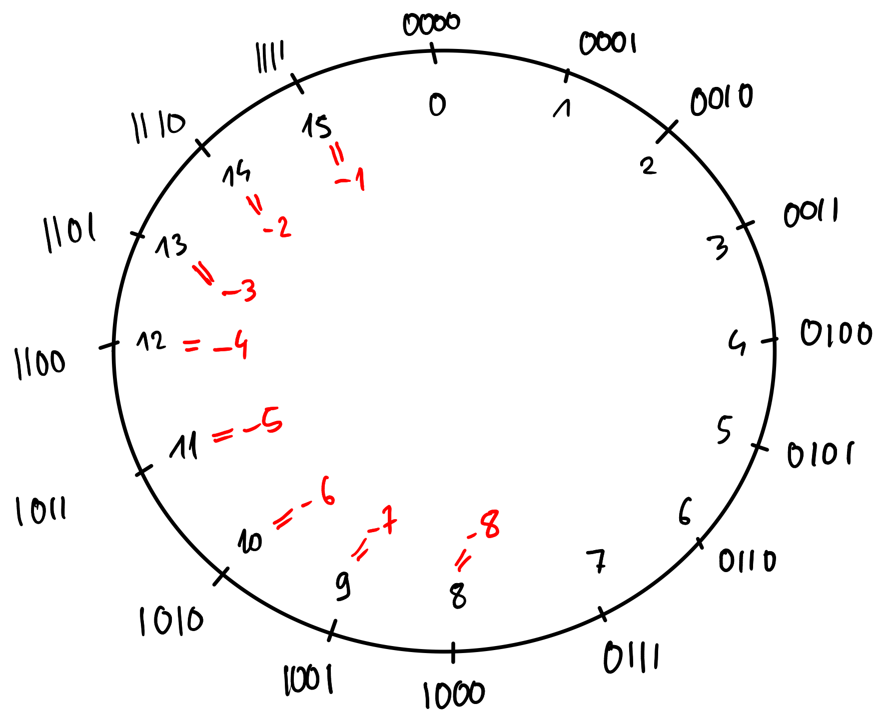
Bemerkung: Uhren mit primzahl-vielen Zeiten sind wichtig in Verschlüsselung, z.B. $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$



$$\begin{array}{r} 1101 \\ +\ 0111 \\ \hline 10100 \end{array}$$

$13+7=20$
$=16+4$

<u>Fazit:</u> Unsere Bauteile $\boxed{\text{Add}}$ und $\boxed{\text{Mult}}$ rechnen auf der Uhr mit $16=2^4$ Zeiten.



Interpretiere alle 4stelligen Binärzahlen, die mit 1 beginnen, wie angedeutet als negative Zahlen ⇝

<u>Fazit:</u> • Bauteile $\boxed{\text{Add}}$ und $\boxed{\text{Mult}}$ können mit negativen Zahlen rechnen. (Ergebnisse korrekt bis auf Vielfache von $16=2^4$).

Alternativ könnte negative Zahlen mit Vorzeichen = Zusatzbit kodieren. Nachteil: bräuchte neues Bauteil $\boxed{\text{Subtraktion}}$.

- In Praxis rechnet Computer mit 32-stelligen Binärzahlen,

  d.h. auf Uhr mit $2^{32} = 4'294'967'296$ Zeiten,

  mit Zahlen von $\underbrace{-2'147'483'648}_{= -2^{31}}$ bis $\underbrace{2'147'483'647}_{= 2^{31}-1}$

  d.h. Ergebnisse stimmen bis auf Vielfache von 2^{32},

  d.h. Ergebnisse korrekt für „kleine" Zahlen.