6 Gleichungen

Dieses Kapitel basiert zu grosen Teilen auf den Unterrichtsunterlagen von Angelika Rupflin der Kantonsschule am Burggraben St. Gallen, die ihrerseits auf dem Fundus der Fachgruppe Mathematik basieren. Einige Aufgaben sind aus dem „alten“ Algebra-Buch.

Aufgabe 6.1 In einer Prüfung gibt der Lehrer für 0 Punkte die Note 1 und für jeden weiteren Punkt 0.3 Notenpunkte. Welche Punktzahl gibt Note 4?
Lösungsschema:

1. Benennen der Variablen: ✎ Schreibe x für die Punktzahl.
2. Übersetzen der Textinformation und Aufstellen der Gleichung: ✎ Mit x Punkten erhält man die Note $1 + 0.3x$. Wir suchen x mit $1 + 0.3x = 4$.
3. Auflösen der Gleichung: ✎

$$\begin{aligned} 1 + 0.3x &= 4 && \mid -1 \\ 0.3x &= 3 && \mid : 0.3 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

4. Antwort: ✎ Mit $x = 10$ Punkten erhält man die Note 4.
5. Probe (empfohlen): ✎ $10 \cdot 0.3 + 1 = 4$.

6.1 Grundlegendes zu Gleichungen und ihren Lösungen

Eine **Gleichung** ist eine Aussageform über die Gleichheit zweier Terme. In den Termen dürfen Variablen vorkommen. Ersetzt man diese durch konkrete Zahlen, so wird die Gleichung wahr (d. h. sie stimmt) oder falsch (d. h. sie stimmt nicht).

(a) Gleichungen ohne Variablen. Beispiele:
- Die Gleichung $6 \cdot 7 = 42$ ist wahr.
- Die Gleichung $1 = 0$ ist falsch.

(b) Gleichungen in einer Variablen; Beispiele:
- Immer wahr: $2 + x + 3 = 5 + x$ ist wahr für alle x.
- Immer falsch: $x + 1 = x$ ist falsch für alle x.
- Nur für gewisse Werte der Variablen wahr: $2x + 3 = 6$ ist nur wahr für $x = \frac{3}{2}$.

(c) Ähnlich für Gleichungen in mehreren Variablen: Zum Beispiel ist die Gleichung $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ immer wahr (dritte binomische Formel).

Konvention: Mit einer *Gleichung* meinen wir in diesem Kapitel eine *Gleichung in einer Variablen*. Die Variable heisst meist x.
Eine Zahl (aus einer Grundmenge $\mathbb{G}$) heisst **Lösung** einer Gleichung, wenn die Gleichung wahr wird, wenn man die Variable durch diese Zahl ersetzt.
Die Menge aller Lösungen einer Gleichung heisst ihre **Lösungsmenge** und wird meist als $\mathbb{L}$ notiert.

Beispiele:	$2x + 3 = 6$	$\mathbb{G}_1 = \mathbb{Z}$	$\mathbb{L}_1 = \{\} = \varnothing$	keine Lösung
		$\mathbb{G}_2 = \mathbb{Q}$	$\mathbb{L}_2 = \{\frac{3}{2}\}$	$x = \frac{3}{2}$ ist die einzige Lösung
		$\mathbb{G}_3 = \mathbb{R}$	$\mathbb{L}_3 = \{\frac{3}{2}\}$	$x = \frac{3}{2}$ ist die einzige Lösung

Wird keine Grundmenge $\mathbb{G}$ angegeben, so gilt die Abmachung $\mathbb{G} = \mathbb{R}$.

Beispiele:

$x+1=1$	$\mathbb{L}_1=\{0\}$	$x=0$ ist die einzige Lösung
$x+1=x$	$\mathbb{L}_2=\{\}=\varnothing$	keine Lösung
$(x-1)^2=x^2-2x+1$	$\mathbb{L}_3=\mathbb{G}=\mathbb{R}$	jede relle Zahl ist eine Lösung
$x^2=25$	$\mathbb{L}_4=\{-5,+5\}$	die Lösungen sind $x=5$ und $x=-5$

Um die Lösung(en) einer Gleichung zu bestimmen, versucht man normalerweise, die Variable (auch Unbekannte genannt) zu *isolieren*.

6.2 Lineare Gleichungen

Definition 6.14 Lineare Gleichung

Eine Gleichung, die man (durch Äquivalenzumformungen, siehe später) in die Form

$$\boxed{a\cdot x=b} \quad \text{mit } a,\, b\in\mathbb{R}$$

bringen kann, heisst **lineare Gleichung**.
Bemerkung: Eine lineare Gleichung kann auch als Polynom vom Grad 1 aufgefasst werden, das gleich Null gesetzt wird: $ax-b=0$.

Beispiel: $(x-1)^2=(x+2)\cdot(x-2)$ ✎

$$\begin{aligned}
x^2-2x+1&=x^2-4 && \mid -x^2\\
-2x+1&=-4 && \mid -1\\
-2x&=-5 && \mid :(-2) && \text{also Gleichung linear}\\
x&=\frac{5}{2} && && \text{einzige Lösung}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.2 Welche Zahl hat jeweils die angegebene Eigenschaft?

(a) Ihr Fünffaches ist um 36 kleiner als ihr Achtfaches.
(b) Vergrössert man sie um ihr Drittel, so erhält man 52. (*Vergrössern* meint *Vergrössern durch Addition.*)
(c) Subtrahiert man ihr Sechsfaches von 360, so erhält man gleich viel, wie wenn man ihr Vierfaches von 280 subtrahiert.
(d) Ihr siebter Teil ist um 2 kleiner als ihre Gegenzahl.

Aufgabe 6.3 Fügt man auf beiden Seiten einer zweistelligen (natürlichen) Zahl die Ziffer 5 hinzu, so erhält man das 75-fache der Zahl. Welche Zahl ist es?

Aufgabe 6.4 Einen Ausflug mit den SBB unternehmen 40 Personen. Erwachsene bezahlen 30 Franken, Kinder die Hälfte. Durch diesen Ausflug nehmen die SBB 1080 Franken ein. Wie viele Kinder nehmen an der Reise teil?

Aufgabe 6.5 “Meine Tante”, sagt Simone, “ist jetzt 5-mal so alt wie ich. In 7 Jahren wird sie nur noch 3-mal so alt sein wie ich dann alt sein werde. Wie alt bin ich heute?”

Aufgabe 6.6 Lösen Sie jeweils nach x auf (dabei werden Sie feststellen, dass die Gleichung linear ist).

a) $\dfrac{4x-5}{3}-\dfrac{2x-3}{6}=\dfrac{x}{2}-1$ b) $4x(x-1)=(2x-1)^2-1$ c) $\dfrac{8x-3}{8}-\dfrac{8+3x}{3}=0$

Satz 3

Lineare Gleichungen $a \cdot x = b$ haben entweder **genau eine** Lösung, **keine** Lösung oder **unendlich viele** Lösungen. Die Zeilen der folgenden Tabelle geben alle möglichen Fälle an.

erster Fall: $a \neq 0$ und b beliebig	$a \cdot x = b$	$x = \frac{b}{a}$ einzige Lösung	$\mathbb{L} = \{\frac{b}{a}\}$
zweiter Fall: $a = 0$ und $b \neq 0$	$0 \cdot x = b$	keine Lösung	$\mathbb{L} = \{\} = \varnothing$
dritter Fall: $a = 0$ und $b = 0$	$0 \cdot x = 0$	jede Zahl ist Lösung	$\mathbb{L} = \mathbb{G} = \mathbb{R}$

6.3 Äquivalenzumformungen und einfache nichtlineare Gleichungen

Formt man beide Seiten einer Gleichung auf dieselbe Weise um (etwa Addition derselben Zahl auf beiden Seiten oder Quadrieren beider Seiten), so erhält man eine neue Gleichung. Jede Lösung der Ausgangsgleichung ist sicherlich auch eine Lösung der neuen Gleichung - die neue Gleichung kann aber zusätzliche Lösungen haben, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel: $x = 3 \quad | \; (\cdot)^2$ d.h. quadriere $\qquad$ $x = 3$ einzige Lösung

$x^2 = 9 \qquad$ genau zwei Lösungen $x = \pm 3$

Keine Äquivalenzumformung! (im Sinne der folgenden Definition)

Beispiel: $x - 2 = 0 \quad | \cdot (x+2)$ $\qquad$ $x = 2$ einzige Lösung

$(x-2)(x+2) = 0 \qquad$ genau zwei Lösungen $x = \pm 2$

Keine Äquivalenzumformung! (im Sinne der folgenden Definition)

Beispiel: $x - 2 = 0 \quad | \cdot 0$ $\qquad$ $x = 2$ einzige Lösung

$0 = 0 \qquad$ Lösungsmenge $\mathbb{L} = \mathbb{R}$

Keine Äquivalenzumformung! (im Sinne der folgenden Definition)

Merke

Wenn bei einer Umformung einer Gleichung die ursprüngliche Gleichung und die umgeformte Gleichung dieselben Lösungen haben, so spricht man von einer **Äquivalenzumformung**.
Die wichtigsten Äquivalenzumformungen sind:

- **Addieren oder Subtrahieren** derselben Zahl oder desselben Ausdrucks auf beiden Seiten
- **Multiplizieren oder Dividieren** beider Seiten mit derselben Zahl **ungleich Null**

Wenn man diese beiden Typen von Äquivalenzumformungen zielgerichtet durchführen kann, sollte man dies immer tun! Dabei entstehen keine „neuen Lösungen“.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{5x}{3} - 7 &= x + 1 && | \cdot 3 \\ 5x - 21 &= 3x + 3 && | - 3x + 21 \\ 2x &= 24 && | : 2 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Hier sind alle drei Umformungen Äquivalenzumformungen (denn man kann sie rückgängig machen: Division durch 3 bzw. Addition von $+3x - 21$ bzw. Multiplikation mit 2). Also haben alle drei Gleichungen $x = 12$ als einzige Lösung.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \sqrt{3x-1} &= \sqrt{4x+1} && |(\cdot)^2 \\ 3x-1 &= 4x+1 && |-3x-1 \\ -2 &= x \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung hat $x=-2$ als einzige Lösung. Dies ist aber keine Lösung der ursprünglichen Lösung, denn $\sqrt{3\cdot(-2)-1}=\sqrt{-7}$ ist nicht definiert! Also $\mathbb{L}=\{\}$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \sqrt{3x-2} &= 4 && |(\cdot)^2 \\ 3x-2 &= 16 && |+2 \\ 3x &= 18 && |:3 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung hat nur die Lösung $x=6$. Da bei der ersten Umformung nicht klar ist, ob es sich um eine Äquivalenzumformung handelt, müssen wir die Probe machen:

$$(\text{linke Seite für } x=6) = \sqrt{3\cdot 6-2} = \sqrt{16} = 4 \stackrel{?}{=} (\text{rechte Seite}) = 4$$

Da die mit dem Fragezeichen markierte Gleichheit gilt, haben wir Glück und $x=6$ ist eine (und genauer die einzige) Lösung der Ausgangsgleichung.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{x-3} &= \frac{5x-10}{x-3} && |\quad \cdot(x-3) \\ 2x-1 &= 5x-10 && |\quad -2x+10 \\ 9 &= 3x && |\quad :3 \text{ (und Seiten vertauschen)} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Ähnlich wie bei den Gleichungen mit Wurzeln müssen wir prüfen, ob $x=3$ eine Lösung der Ausgangsgleichung ist. Dies ist aber nicht der Fall, denn Division durch $3-3=0$ ist nicht definiert. Es gilt also $\mathbb{L}=\{\}$.

Merke

Wenn du beim Lösen von Gleichungen
- Wurzeln „wegquadrierst“ oder
- Nenner aus Brüchen „wegmultiplizierst“

musst du bei jeder Lösung der am Ende erhaltenen Gleichung prüfen, ob alle vorkommenden Wurzeln und Brüche definiert sind und ob die Probe gilt. Sonst handelt es sich um keine Lösung der Ausgangsgleichung!

Aufgabe 6.7 Bestimme jeweils die Lösungsmenge.

a) $\sqrt{3x+1}=\sqrt{4x-1}$ b) $\sqrt{x-5}=\sqrt{7-x}$ c) $\sqrt{2x-6}=\sqrt{8-5x}$

Aufgabe 6.8 Bestimme jeweils die Lösungsmenge.

a) $\frac{5x}{2x-3}=\frac{3x-10}{2x-3}$ b) $\frac{2x}{7x-1}=\frac{2-10x}{14x-2}$ c) $\frac{5x}{2x-3}=\frac{5x-10}{2x-3}$

Merke

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist:

$$T_1\cdot T_2=0 \quad \Longleftrightarrow \quad T_1=0 \quad \text{oder} \quad T_2=0$$

Aufgabe 6.9

a) $(2x+7)\cdot(5x-8)\cdot(x^2+1)=0$ b) $(x+4)(x^2-4)=0$ c) $x^3-2x^2+x=0$

d) $x\cdot(x+6)=-9$ e) $\sqrt{2x+1}=x+1$

Noch einmal zusammengefasst mit den hoffentlich hilfreichen Begriffen „Aufpassumformung“ und „Entspann-dich-Umformung“.

Merke

- Quadrieren
- Multiplikation mit einem Ausdruck, in dem die Unbekannte vorkommt

sind „Aufpassumformungen“: Es können „Scheinlösungen“ entstehen, die keine Lösungen der Ausgangsgleichung sind, weshalb man die Probe machen muss: Die Probe scheitert, wenn gewisse Terme nicht definiert sind (Wurzel aus negativer Zahl, Division durch Null) oder wenn links nicht dasselbe Ergebnis herauskommt wie rechts.

Merke

- Addition oder Subtraktion einer Zahl oder eines Ausdrucks
- Multiplikation mit einer oder Division durch eine **von Null verschiedenen Zahl**

sind Äquivalenzumformungen („Entspann-dich-Umformungen“). Wenn du beim Lösen **NUR** solche Umformungen vorgenomen hast (und dich nicht verrechnet hast), so stimmt die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung mit der Lösungsmenge der am Ende erhaltenen Gleichung überein.

Es folgen einige Aufgaben zur Wiederholung aus einer alten Version des Algebra-Aufgaben-Buchs (bei Bedarf stelle ich gerne mehr Übungsmaterial auf Sharepoint zur Verfügung) und direkt danach die Lösungen. Dies sind alles ⚒-Aufgaben bis auf die letzte Textaufgabe mit Prozentrechnung.

Ich schlage die rot markierten Aufgaben vor - selbständiges intelligentes Auswählen ist aber ausdrücklich erlaubt und erwünscht. Welcher Aufgabentyp (Textaufgaben, Wurzelaufgaben, Bruchaufgaben, Ausmultiplizieraufgaben) macht mir noch Probleme?

95 a) $\sqrt{x+5} = \sqrt{4-x}$ ● b) $\sqrt{2-x} = \sqrt{x-8}$

96 a) $\sqrt{x(x-4)} = 2\sqrt{1-x}$ ● b) $10\sqrt{40-x} = 40\sqrt{10-x}$

97 a) $\sqrt{1-x} = 5$ b) $\sqrt{x+8} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$

98 a) $\sqrt{x^2 + \frac{9}{8}} = \frac{9}{8}$ b) $\sqrt{x(2-\sqrt{3})} = 3 - \sqrt{3}$

99 ● a) $\sqrt{3x} - \sqrt{3+x} = 0$ b) $6\sqrt{x} + 7 = 8\sqrt{x} - 9$

100 a) $4 + 9\sqrt{x^2+9} = 49$ b) $\sqrt{x+243} - \sqrt{x} = \sqrt{x}$

101 a) $\sqrt{3x^2 - 50} = -x$ b) $2\sqrt{x^2 - x} = 2x + 1$ c) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} = 5 - x$

102 a) $x = 3\sqrt{x^2 - 64}$ b) $\sqrt{x^2+5} = x + 2$ ● c) $x - 4 = \sqrt{5x^2 - 8x}$

172 a) $\frac{3}{x} - \frac{1}{2x} = 4$ ● b) $\frac{1}{2x} - \frac{3}{4x} + \frac{5}{6} = 0$ c) $\frac{11}{5} - \frac{x-20}{2x} = \frac{2x-1}{3x}$

178 ● a) $\frac{4}{2x+1} = \frac{3}{2x}$ b) $\frac{7}{x-8} = \frac{11}{x-1}$ c) $\frac{14}{x-14} = \frac{x-14}{14}$

179 a) $\frac{2x+19}{x+2} = \frac{47}{3x+6}$ b) $\frac{2x}{x-5} = \frac{x-24}{5-x}$ c) $\frac{x-7}{6x+6} = \frac{x+7}{8x+8}$

180 a) $\frac{x}{x-3} = \frac{x+1}{9-3x}$ ● b) $\frac{10}{4x+3} = \frac{x+3}{4x^2+3x}$ c) $\frac{x-2}{x^2-x} = \frac{x}{x^2-1}$

46 ● a) $2x^2 - (x+3)(x-3) = (x+1)^2 - 2x + 8$
b) $(x+2)(x-3) - 3(2x-3) = (x-6)^2 + 2$
c) $(x-3)(2x-5) + 4(2-x) + 12 = 2(1-x)^2$
d) $2x(x-5) - (x-5)^2 = (x-10)^2 + 20x - 125$

47 a) $(2x-3)^2 - (x-5)^2 - 3x(x-7) + 17 = 0$
● b) $5x(x-1) - (2x+3)^2 - (x-5)(x+3) - 6 = 0$
c) $(5x-1)^2 - x[10x - 3(x-4)] = 18x^2 - 21$
d) $(2x-3)(3+2x) - [4 - 5(x-1)] \cdot x = 9x^2$

48 a) $(x-1)(x-2)(x-3) - (x-1)(x-2)(x-4) = x^2$
b) $(x-5)(x-4)(x-2) - (x-5)(x-6)(x-2) = 2x(x-1)$
c) $(x-3)^2(x+4) - (x-3)(x+4)(x-7) - 4x(x-1) = 0$
d) $(2x-3)^3 - (2x-3)^2(2x-7) = (4x-8)^2$

129 ● Eine Treppe hat 22 Stufen. Würde jede Stufe um 1.6 cm höher gebaut, könnten zwei Stufen eingespart werden. Wie hoch ist eine Stufe?

149 ● Ein Pfosten ist 10.5 m lang. Von seiner Länge befindet sich viermal so viel im Wasser wie in der Erde und halb so viel über dem Wasser wie in diesem. Wie lang ist der aus dem Wasser herausragende Teil des Pfostens?

166 ● Flussabwärts fährt ein Ledischiff in 12 Stunden ans Ziel. Für den Rückweg benötigt es bei gleicher Leistung drei Stunden mehr. In stehendem Gewässer würde die Geschwindigkeit 18 km/h betragen. Berechne die Geschwindigkeit des Flusses.

139 ● Patrick und Isabelle haben 600 Nüsse gesammelt. Isabelle sagt: “Wenn du mir die Hälfte deiner Nüsse gibst und ich dir darauf einen Drittel der Nüsse gebe, die ich dann habe, so besitzen wir schliesslich gleich viele Nüsse.” Wie viele Nüsse besassen beide am Anfang?

147 Im Bazar von Istanbul wird um einen Ledermantel gefeilscht. Der Händler verlangt umgerechnet 590 Franken, während der Käufer nur 410 Franken bezahlen will. Die beiden einigen sich so, dass der Händler den Preis um gleich viele Prozente senkt, wie der Käufer sein Angebot erhöht. Welches ist der Verkaufspreis und um wie viele Prozente sind beide von ihren Forderungen abgewichen?

46 ●	a) $\mathbb{R}$	b) 7	c) 3	d) $\mathbb{R}$
47	a) $-\frac{1}{19}$	● b) 0	c) 1	d) -1
48	a) $\frac{2}{3}$	b) $\frac{5}{3}$	c) 6	d) $\frac{7}{4}$

95	a) $-\frac{1}{2}$	● b) $\{\ \}$	
96	a) -2	● b) 8	
97	a) -24	b) $4\sqrt{3}$ (6.928)	
98	a) $\pm\frac{3}{8}$	b) 6	
99 ●	a) $\frac{3}{2}$	b) 64	
100	a) ± 4	b) 81	
101	a) -5	b) $-\frac{1}{8}$	c) $x \leq 5$
102	a) $6\sqrt{2}$ (8.485)	b) $\frac{1}{4}$	● c) $\{\ \}$

172	a) $\frac{5}{8}$	● b) $\frac{3}{10}$	c) -10

178 ●	a) $\frac{3}{2}$	b) $\frac{81}{4}$	c) 28, 0
179	a) $-\frac{5}{3}$	b) 8	c) 49
180	a) $-\frac{1}{4}$	● b) $\frac{1}{3}$	c) -2

129 ● 16 cm

149 ● 3 m

166 ● 2 km/h

139 ● je 300 Nüsse

147 Fr. 483.80; 18%

Merke

Term auf beiden Seiten ausklammern:

$$RT = ST \qquad \Longleftrightarrow \qquad R = S \quad \text{oder} \quad T = 0$$

In Worten: Wenn man auf beiden Seiten einer Gleichung einen Term T ausklammern kann, so gilt diese Gleichung genau dann, wenn „die durch T dividierte“ Gleichung $R = S$ gilt oder der Term T Null ist.

Beispiel:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x &= x - 3 && \mid \text{Termumformung} \\ x(x-3) &= x - 3 \end{aligned}$$

Nach der Merke-Box (mit $T = x - 3$ und $R = x$ und $S = 1$) gilt diese Gleichung genau dann, wenn

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ \mathbb{L}_1 &= \{1\} \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} x - 3 &= 0 \\ x &= 3 \\ \mathbb{L}_2 &= \{3\} \end{aligned}$$

Fazit: Die Ausgangsgleichung hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{1, 3\}$.

Aufgabe 6.10 Bestimme jeweils die Lösungsmenge.

a) $x(x+2) = x - x^2$

b) $(x+2)(7-x) = (x-3)(x+2)$

c) $1 - x^2 = 1 - 2x + x^2$

d) $x^2 - 1 = 3 - 2x - x^2$

Hinweis: Die linke Seite ist in offensichtlicher Weise ein Produkt. Versuche, die rechte Seite ebenfalls als Produkt zu schreiben.

Merke

Korrektes „Wurzelziehen“:

$$S^2 = T^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad S = T \quad \text{oder} \quad S = -T$$

In Worten: Die Quadrate zweier Terme stimmen genau dann überein, wenn die Terme bis auf Vorzeichen übereinstimmen.

Beispiel: $(x+4)^2 = (x-2)^2$

Nach der Merke-Box (mit $S = x + 4$ und $T = x - 2$) gilt diese Gleichung genau dann, wenn

$$\begin{aligned} x + 4 &= x - 2 \\ 4 &= -2 \\ \mathbb{L}_1 &= \varnothing \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} x + 4 &= -(x-2) \\ x + 4 &= -x + 2 \\ 2x &= -2 \\ x &= -1 \\ \mathbb{L}_2 &= \{-1\} \end{aligned}$$

Fazit: Die Ausgangsgleichung hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{-1\}$. Alternativ hätte man dies auch durch Ausmultiplizieren sehen können.

Beispiel: $x^4 = 16$

Nach der Merke-Box (mit $S = x^2$ und $T = 4$) gilt diese Gleichung genau dann, wenn

$$x^2 = 4 \qquad \text{oder} \qquad x^2 = -4$$

Die letztgenannte Gleichung $x^2 = -4$ hat Lösungsmenge $\varnothing$, da jedes Quadrat ≥ 0 ist. Wir müssen also nur $x^2 = 4$ lösen, was wiederum nach der Merke-Box auf $x = 2$ oder $x = -2$ führt.

Fazit: Die Ausgangsgleichung hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-2, 2\}$.

Aufgabe 6.11 Bestimme jeweils die Lösungsmenge.

a) $(x+3)^2 = 25$

b) $(x+3)^2 = -9$

c) $(x+3)^4 = 81$

d) $(x-3)^2 = (x+1)^2$

e) $(x-2)^2 = x^2 + 6x + 9$

f) $(x-1)^2 \cdot (x+2)^2 = (x^2 + 7x + 2)^2$

Aufgabe 6.12 Zeige, dass die beiden Regeln

- „Korrektes Wurzelziehen“ $\boxed{T^2 = S^2 \iff T = S \text{ oder } T = -S}$ und
- „Division durch einen Term“ $\boxed{RT = ST \iff R = S \text{ oder } T = 0}$

aus der „Produkt-Null-Regel“ $\boxed{ST = 0 \iff S = 0 \text{ oder } T = 0}$ folgen.

6.4 Gleichungen mit Parametern

Parameter sind zusätzliche Variablen, um gegebene, aber numerisch (noch) nicht bekannte oder bewusst nicht fixierte Grössen anzugeben, wie z.B. eine Geschwindigkeit oder ein Zinssatz.
Wenn nicht anders erwähnt, bezeichnen Buchstaben wie x, y oder z die Unbekannten (also die Variablen, nach denen wir Gleichungen auflösen wollen). Parameter werden meist mit Buchstaben wie a, b, c bezeichnet, aber auch mit p oder q.

Beispiel: Oft wird die Note einer Prüfung durch

$$1 + 5 \cdot \frac{x}{m}$$

berechnet, wobei die Variable x die erreichte Punktzahl und der Parameter m die für Note 6 benötigte Punktzahl bezeichnen. Um dich zu überzeugen, dass diese Formel „sinnvoll“ ist, setze etwa $x = 0$ und $x = \frac{m}{2}$ und $x = m$ ein!
Wenn man wissen will, wieviele Punkte man für die Note 4 benötigt, muss man die Gleichung

$$1 + 5 \cdot \frac{x}{m} = 4$$

lösen. Wir machen dies wie zuvor und behandeln den Parameter „wie eine Zahl“.

$$\begin{aligned} 1 + 5 \cdot \frac{x}{m} &= 4 && \mid -1 \\ 5 \cdot \frac{x}{m} &= 3 && \mid \cdot \frac{m}{5} \\ x &= \frac{3}{5} m \end{aligned}$$

Wenn man nun in einer konkreten Prüfung weiss, dass man 5000 Punkte für die Note 6 braucht, kann man sofort ausrechnen, dass man

$$x = \frac{3}{5} \cdot 5000 = 3000$$

Punkte für die Note 4 braucht.

Merke Strategie zum Lösen von Gleichungen mit Parameter (funktioniert oft)

1. Vereinfache beide Seiten der Gleichung.
2. Bringe alle Terme mit der Unbekannten x auf die eine Seite und alle übrigen Terme auf die andere Seite.
3. Klammere x aus und dividiere die Gleichung durch den Koeffizienten bei x.

Beispiel: $a(x-b) = 2(ax - 2a^2 - bx)$✎

$$\begin{aligned} ax - ab &= 2ax - 4a^2 - 2bx && \mid + ab - 2ax + 2bx \\ -ax + 2bx &= -4a^2 + ab \\ x(-a+2b) &= a(b-4a) && \mid : (-a+2b) \qquad (\star) \\ x &= \frac{a(b-4a)}{-a+2b} = \frac{a(4a-b)}{a-2b} \end{aligned}$$

Achtung: Die Division war nur erlaubt, falls $\boxed{-a+2b \neq 0}$ (oder gleichbedeutend/äquivalent $\boxed{a \neq 2b}$) gilt.
Den Spezialfall $\boxed{a = 2b}$ diskutieren wir im nächsten Abschnitt separat.

⚒ **Aufgabe 6.13** Lösen Sie ohne separate Diskussion der Spezialfälle.

a) $qx - x = q^2 - 1$ b) $2(bz - cz) = z + bz - c$ c) $(y-3p)^2 = 2y(y+3p) - y(y-1)$

6.4.1 Diskussion von Spezialfällen

Parametergleichungen können für bestimmte Werte der Parameter keine oder unendlich viele Lösungen besitzen. Man spricht dann bei diesen Parameterwerten von einem Spezialfall der Gleichung bzw. von Lösungen in einem Spezialfall.

Beispiel: (Fortsetzung des vorigen Beispiels) ✎ Betrachte nun den Spezialfall $\boxed{a = 2b}$. Die oben mit $(\star)$ markierte Gleichung vereinfacht sich dann wie folgt.

$$\begin{aligned} x \cdot (-a+2b) &= a(b-4a) && \mid \text{verwende } a = 2b \\ x \cdot 0 &= 2b(b-8b) \\ 0 &= 2b(-7b) \\ 0 &= -14b^2 && \mid : (-14) \\ 0 &= b^2 && \mid \text{Produkt-Null-Regel} \\ 0 &= b \end{aligned}$$

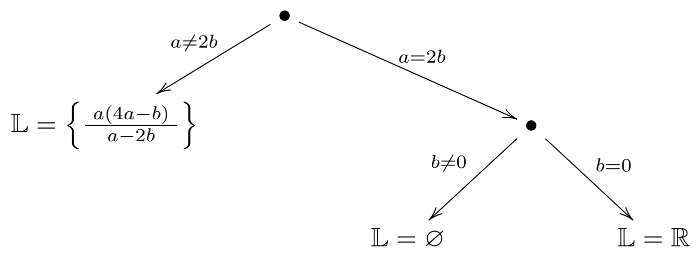
Im Fall $b \neq 0$ ist diese Gleichung falsch und die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \varnothing$.
Im Fall $b = 0$ ist diese Gleichung wahr und die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.
Beachte: Bei der Lösungsmenge geht es jeweils um die Variable/Unbekannte x.

Fazit: Die Lösungsmenge unserer Ausgangsgleichung hängt wie folgt von den Parametern ab:

- Fall 1: $\boxed{a \neq 2b}$: Dann gilt $\mathbb{L} = \left\{ \frac{a(4a-b)}{a-2b} \right\}$.
- Fall 2.1: $\boxed{a = 2b \text{ und } b \neq 0}$: Dann gilt $\mathbb{L} = \varnothing$.
- Fall 2.2: $\boxed{a = 2b \text{ und } b = 0}$ (oder äquivalent $\boxed{a = b = 0}$): Dann gilt $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

Wenn man also für konkrete Werte von a und b die Lösungsmenge bestimmen will, kann man den folgenden

„Entscheidungsbaum“ durchlaufen:



Aufgabe 6.14 Lösen Sie mit Diskussion der Spezialfälle:

a) $ax+b=3$ b) $px-5=2x+q$ c) $p^2x-px=p^2-1$

6.5 Repetitionsaufgaben

Aufgabe 6.15 Bestimme eine zweistellige (natürliche) Zahl mit folgender Eigenschaft: fügt man die Ziffer 3 einmal links und einmal rechts hinzu, so unterscheiden sich die entstehenden beiden Zahlen um 333.

Aufgabe 6.16 Bitte melden, falls Prozentrechnung Probleme macht. Eigentlich ist es ganz einfach: Ersetze das „komische“ Zeichen % durch „Hundertstel“. Beispielsweise bedeutet 6 % einfach $\frac{6}{100}=0{,}06$.

Das Wort *Prozent* und das Zeichen % haben sich übrigens aus ialienisch *per cento* (etwa „von Hundert“) entwickelt, siehe etwa Wikipedia: Prozentzeichen.

Ein Teil eines Kapitals von 70 350 Franken ist mit Zinssatz 6 % angelegt, der Rest mit Zinssatz 5 %. Der Jahreszins des gesamten Kapitals beträgt 4 100 Franken. Wie gross sind die beiden Teile?

Aufgabe 6.17 Zu welcher Zeit (auf Hunderstelsekunden genau) zwischen 16 Uhr und 17 Uhr bilden die Zeiger einer Uhr einen rechten Winkel?

Aufgabe 6.18 Die Ortschaften A und B liegen 120 Bahnkilometer voneinander entfernt. Ein Zug verlässt A um 15.00 Uhr in Richtung B; seine mittlere Geschwindigkeit beträgt 72 km/h. Der Gegenzug verlässt B um 15.15 Uhr; seine mittlere Geschwindigkeit beträgt 88 km/h. Wann begegnen sich die beiden Züge?

Aufgabe 6.19 Lösen Sie die folgenden Gleichungen mit Diskussion der Spezialfälle.

a) $a(x-1)=6(b+7x)$ b) $a(x-3)=xb-2$ c) $p(xp+1)=2(1+2x)$

d) Für welche Werte des Parameters p hat die Gleichung $p(x+3)=5(p-x)$ genau eine Lösung?

Aufgabe 6.20 Lösen Sie folgenden Gleichungen ohne Diskussion der Spezialfälle (falls solche Auftreten).

a) $\sqrt{1-2x}=x-1$ b) $\frac{2x-1}{2-x}-\frac{8-4x}{2x-1}=0$ c) $a(x-2)=b^2x$

d) $\sqrt{\sqrt{x}+1}=2$ e) $\sqrt{\sqrt{x}+1}=0$ f) $\frac{3x-2a}{x-a}=\frac{3a-2x}{x-a}$

Aufgabe 6.21 Kreieren Sie eine (gerne auch etwas kompliziertere) Gleichung, die folgende Bedingungen erfüllt:

a) Die einzige Lösung ist 42 und x kommt unter einer Wurzel vor.

b) Die einzige Lösung ist 42 und x kommt im Nenner eines Bruchs vor.

c) Die einzigen Lösungen sind 1 und 2.

d) Die Gleichung hat genau eine Lösung, ausser wenn der Parameter $a=23$ ist.

e) Die Unbekannte x kommt unter einer Wurzel vor und die Gleichung hat keine Lösung; die durch Quadrieren beider Seiten erhalten Gleichung hat aber die Lösung 42.

6.5.1 Ortsbogen – optional, falls jemand das nicht vergessen will (nicht ausgedruckt verteilt)

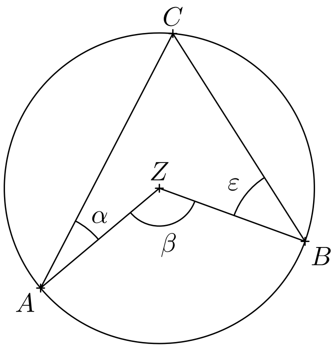
Aufgabe 6.22 Konstruieren Sie ein Dreieck $\triangle ABC$ mit folgenden Grössen:

a) Sei $W_c = c \cap w_\gamma$ der Schnittpunkt der Seite c mit der Winkelhalbierenden w_γ. Gegeben sind $c = 6$, $\overline{AW_c} = 2$ und $\gamma = 50°$.

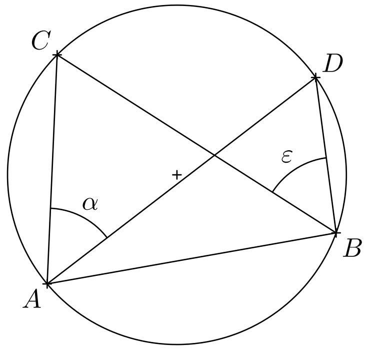
b) Die Schwerlinie $s_c = CM_c$ ist die Verbindung vom Punkt C mit dem Mittelpunkt M_c der Seite $c = [AB]$. Gegeben sind $c = 6$, $\gamma = 70°$ und die Beziehung $\sphericalangle CM_cA = 2\sphericalangle BM_cC$.

Aufgabe 6.23 Berechnen Sie jeweils den Winkel ε aus den gegebenen Winkeln α und β bzw. aus dem gegebenen Winkel α.

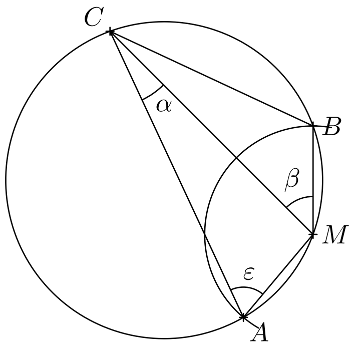
a)



b)



c)



6.6 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 6.2 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-124

(a) 12 (b) 39 (c) 40, (d) -1,75

(bitte melden, falls ausführliche Lösung gewünscht)

Lösung zu Aufgabe 6.3 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-127

77

(bitte melden, falls ausführliche Lösung gewünscht)

Lösung zu Aufgabe 6.4 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-132

8

(bitte melden, falls ausführliche Lösung gewünscht)

Lösung zu Aufgabe 6.5 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-138

Simones Alter heute: x (gemessen in der Einheit Jahre). In 7 Jahren: $x + 7$.

Alter Simones Tante heute: $5x$. In 7 Jahren: $5x + 7$.

$$\begin{aligned}
3(x+7) &= 5x+7 \\
3x+21 &= 5x+7 && \mid -3x-7 \\
14 &= 2x && \mid :2 \\
7 &= x
\end{aligned}$$

Simone ist heute 7 Jahre alt.

Lösung zu Aufgabe 6.6 ex-komplexere-lineare-gleichungen

a)

$$\begin{aligned}
\frac{4x-5}{3} - \frac{2x-3}{6} &= \frac{x}{2} - 1 && \mid \cdot 6 \\
2(4x-5) - (2x-3) &= 3x-6 \\
8x-10-2x+3 &= 3x-6 \\
6x-7 &= 3x-6 && \mid -3x+7 \\
3x &= 1 && \mid :3 \\
x &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
4x(x-1) &= (2x-1)^2 - 1 \\
4x^2 - 4x &= 4x^2 - 4x + 1 - 1 && \mid -4x^2+4x \\
0 &= 0 \\
\text{Also } \mathbb{L} &= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{8x-3}{8} - \frac{8+3x}{3} &= 0 && \mid \cdot 24 \\ 3(8x-3) - 8(8+3x) &= 0 \\ 24x - 9 - (64+24x) &= 0 \\ 24x - 9 - 64 - 24x &= 0 \\ -73 &= 0 \\ \text{Also } \mathbb{L} &= \varnothing \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 6.7 ex-lineare-wurzel-gleichungen

a)

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+1} &= \sqrt{4x-1} \\ 3x+1 &= 4x-1 && \mid -3x+1 \\ 2 &= x \end{aligned}$$

Probe:

$$(\text{linke Seite}) = \sqrt{3\cdot 2+1} = \sqrt{7} \stackrel{?}{=} (\text{rechte Seite}) = \sqrt{4\cdot 2-1} = \sqrt{7}.$$

Die fragliche Gleichheit gilt, d.h. $\mathbb{L} = \{2\}$.

b)

$$\begin{aligned} \sqrt{x-5} &= \sqrt{7-x} && \mid (\cdot)^2 \\ x-5 &= 7-x && \mid +x+5 \\ 2x &= 12 && \mid :2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{6-1} = \sqrt{1} \stackrel{?}{=} \sqrt{7-6} = \sqrt{1}$. Also $\mathbb{L} = \{6\}$.

c)

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-6} &= \sqrt{8-5x} && \mid (\cdot)^2 \\ 2x-6 &= 8-5x && \mid +5x+6 \\ 7x &= 14 && \mid :7 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Probe: Die linke Seite $\sqrt{2\cdot 2-6} = \sqrt{4-6} = \sqrt{-2}$ ist nicht definiert (dasselbe gilt für die rechte Seite). Also $\mathbb{L} = \{\} = \varnothing$.

Lösung zu Aufgabe 6.8 ex-lineare-bruch-gleichungen

a)

$$\begin{aligned} \frac{5x}{2x-3} &= \frac{3x-10}{2x-3} && \mid \cdot (2x-3) \\ 5x &= 3x-10 && \mid -3x \\ 2x &= -10 && \mid :2 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Um zu testen, ob dies auch eine Lösung der Ausgangsgleichung ist, müssen wir den Nenner $2x-3$ ausrechnen: $2\cdot(-5)-3 = -13 \neq 0$. Also $\mathbb{L} = \{-5\}$.

b)

$$\begin{aligned}\frac{2x}{7x-1} &= \frac{2-10x}{14x-2} && \mid \cdot 2\cdot(7x-1)\\ 2\cdot 2x &= 2-10x && \mid +10x\\ 14x &= 2 && \mid :14\\ x &= \frac{1}{7}\end{aligned}$$

Nenner-Probe: $7\cdot\frac{1}{7}-1=0$, also ist $x=\frac{1}{7}$ keine Lösung der Ursprungsgleichung und damit $\mathbb{L}=\varnothing$.

c)

$$\begin{aligned}\frac{5x}{2x-3} &= \frac{5x-10}{2x-3} && \mid \cdot(2x-3)\\ 5x &= 5x-10 && \mid -5x\\ 0 &= -10\end{aligned}$$

$\mathbb{L}=\varnothing$

Lösung zu Aufgabe 6.9 ex-spezielle-nichtlineare-gleichungen

a)

$$(2x+7)\cdot(5x-8)\cdot(x^2+1)=0$$

Damit das Produkt Null ist, muss einer der Faktoren Null sein:

$$\begin{aligned}2x+7&=0 &\text{oder}\qquad 5x-8&=0 &\text{oder}\qquad x^2+1&=0\\ x&=-\frac{7}{2} & x&=\frac{8}{5} & x^2&=-1\\ \mathbb{L}_1&=\{-\frac{7}{2}\} & \mathbb{L}_2&=\{\frac{8}{5}\} & \mathbb{L}_3&=\varnothing\end{aligned}$$

Und damit: $\mathbb{L}=\{-\frac{7}{2},\frac{8}{5}\}$

b)

$$(x+4)(x^2-4)=0$$

Damit das Produkt Null ist, muss einer der Faktoren Null sein:

$$\begin{aligned}x+4&=0 &\text{oder}\qquad x^2-4&=0\\ x&=-4 & x^2&=4\end{aligned}$$

Und damit: $\mathbb{L}=\{-4,-2,2\}$.

c)

$$\begin{aligned}x^3-2x^2+x&=0\\ x(x^2-2x+1)&=0\\ x(x-1)^2&=0\end{aligned}$$

Damit das Produkt Null ist, muss einer der Faktoren Null sein (wobei ein Faktor zweifach vorkommt):

$$x=0 \qquad\text{oder}\qquad x-1=0$$

Und damit: $\mathbb{L}=\{0,1\}$.

d)

$$\begin{aligned}x\cdot(x+6)&=-9 && \mid +9\\ x^2+6x+9&=0\\ (x+3)^2&=0\\ x+3&=0\\ x&=-3\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+1} &= x+1 && |(\cdot)^2 \\ 2x+1 &= x^2+2x+1 && |-2x-1 \\ 0 &= x^2 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{1+2\cdot 0} = 0+1$, also $\sqrt{1} = 1$, also $1 = 1$, wahre Aussage. Also ist $\mathbb{L} = \{0\}$.

Lösung zu Aufgabe 6.10 ex-ausklammern-und-dann-linear

a)

$$\begin{aligned} x(x+2) &= x-x^2 && \mid \text{rechts } x \text{ ausklammern} \\ x(x+2) &= x(1-x) \end{aligned}$$

Nach der Merke-Box vor der Aufgabe (mit $T = x$ und $R = x+2$ und $S = 1-x$) ist dies gleichbedeutend zu:

(Man kann es sich auch so merken: Wenn man beide Seiten durch x teilt, kommt $x+2 = 1-x$ heraus; jedoch muss man den Fall $x = 0$ gesondert betrachten, denn man darf nicht durch Null teilen.)

$$\begin{aligned} x+2 &= 1-x && \text{oder} && x = 0 \\ 2x &= -1 && \text{oder} && x = 0 \\ x &= -\frac{1}{2} && \text{oder} && x = 0 \end{aligned}$$

Also $\mathbb{L} = \{-\frac{1}{2}, 0\}$.

b)

$$(x+2)(7-x) = (x-3)(x+2)$$

Nach der Merke-Box vor der Aufgabe (mit $T = x+2$ und $R = 7-x$ und $S = x-3$) ist äquivalent:

(Per Division durch $x+2$ erhalten wir die erste der folgenden Gleichungen, jedoch unter der Bedingung $x+2 \neq 0$; den Fall $x+2 = 0$ muss man separat betrachten.)

$$\begin{aligned} 7-x &= x-3 && \text{oder} && x+2 = 0 \\ -2x &= -10 && \text{oder} && x = -2 \\ x &= 5 && \text{oder} && x = -2 \end{aligned}$$

Also $\mathbb{L} = \{-2, 5\}$.

c)

$$\begin{aligned} 1-x^2 &= 1-2x+x^2 && \mid \text{links dritte und rechts zweite binomische Formel verwenden} \\ (1-x)(1+x) &= (1-x)^2 \end{aligned}$$

Merke-Box mit $T = 1-x$ und $R = 1+x$ und $S = 1-x$:

$$\begin{aligned} 1+x &= 1-x && \text{oder} && 1-x = 0 \\ 2x &= 0 && \text{oder} && 1 = x \\ x &= 0 && \text{oder} && x = 1 \end{aligned}$$

Also $\mathbb{L} = \{0, 1\}$.

d)
$$\begin{aligned} x^2-1 &= 3-2x-x^2 && \mid \text{links dritte binomische Formel, rechts kann } (1-x) \text{ ausklammern!}\\ (x+1)(x-1) &= (1-x)(3+x)\\ (x+1)(-1)(1-x) &= (1-x)(3+x)\\ (-x-1)(1-x) &= (1-x)(3+x) \end{aligned}$$

Merke-Box mit $T=1-x$ und $R=-x-1$ und $S=3+x$:

$$\begin{aligned} -x-1 &= 3+x & \text{oder} && 1-x &= 0\\ -2x &= 4 & \text{oder} && 1 &= x\\ x &= -2 & \text{oder} && x &= 1 \end{aligned}$$

Also $\mathbb{L}=\{-2,1\}$.

Lösung zu Aufgabe 6.11 ex-wurzelziehen-und-dann-linear

a)
$$\begin{aligned} (x+3)^2 &= 25\\ (x+3)^2 &= 5^2 \end{aligned}$$

Dies ist nach der Merke-Box vor der Aufgabe (mit $S=x+3$ und $T=5$) gleichbedeutend zu:

$$\begin{aligned} x+3 &= 5 & \text{oder} && x+3 &= -5\\ x &= 2 & \text{oder} && x &= -8 \end{aligned}$$

Also $\mathbb{L}=\{-8,2\}$.

b)
$$(x+3)^2=-9$$

Für jeden Wert von x ist $(x+3)^2$ als Quadrat nicht-negativ und somit nie -9. Also gibt es keine Lösung, d. h. $\mathbb{L}=\varnothing$.

c)
$$\begin{aligned} (x+3)^4 &= 81 && \mid \text{Potenzgesetz links}\\ ((x+3)^2)^2 &= 9^2 \end{aligned}$$

Dies ist nach der Merke-Box mit $S=(x+3)^2$ und $T=9$ äquivalent zu:

$$\begin{aligned} (x+3)^2 &= 9 & \text{oder} && (x+3)^2 &= -9 && \text{(rechte Gleichung hat keine Lösung)}\\ (x+3)^2 &= 3^2 \end{aligned}$$

Merke-Box mit $S=x+3$ und $T=3$:

$$\begin{aligned} x+3 &= 3 & \text{oder} && x+3 &= -3\\ x &= 0 & \text{oder} && x &= -6. \end{aligned}$$

Also $\mathbb{L}=\{-6,0\}$.

d)
$$(x-3)^2=(x+1)^2$$

Geht auch direkt durch Ausmultiplizieren und Ausrechnen, denn dann kann man links und rechts den Term x^2 abziehen.

Merke-Box mit $S=x-3$ und $T=x+1$:

$$\begin{aligned} x-3 &= x+1 & \text{oder} && x-3 &= -(x+1)\\ 0 &= 4 & \text{oder} && x-3 &= -x-1\\ 0 &= 1 & \text{oder} && 2x &= 2\\ 0 &= 1 & \text{oder} && x &= 1 \end{aligned}$$

(Die linke Gleichung hat keine Lösung.) Also $\mathbb{L}=\{1\}$.

e) Geht auch durch Ausmultiplizieren links und ausrechnen, denn die beiden x^2 heben sich auf.

$$\begin{aligned} (x-2)^2 &= x^2+6x+9 && \mid \text{rechts erste binomische Formel} \\ (x-2)^2 &= (x+3)^2 \end{aligned}$$

Merke-Box mit $S = x-2$ und $T = x+3$:

$$\begin{array}{rcl} x-2 = x+3 & \text{oder} & x-2 = -(x+3) \\ -5 = 0 & \text{oder} & x-2 = -x-3 \\ 1 = 0 & \text{oder} & 2x = -1 \\ 1 = 0 & \text{oder} & x = -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

Also $\mathbb{L} = \{-\frac{1}{2}\}$ (da links keine Lösung).

f)
$$\begin{aligned} (x-1)^2 \cdot (x+2)^2 &= (x^2+7x+2)^2 && \mid \text{Potenzgesetz links} \\ \Big((x-1)\cdot(x+2)\Big)^2 &= (x^2+7x+2)^2 \end{aligned}$$

Merke-Box mit $S = (x-1)(x+2)$ und $T = x^2+7x+2$.

$$\begin{array}{rcl} (x-1)(x+2) = x^2+7x+2 & \text{oder} & (x-1)(x+2) = -(x^2+7x+2) \\ x^2+x-2 = x^2+7x+2 & \text{oder} & x^2+x-2 = -x^2-7x-2 \\ -4 = 6x & \text{oder} & 2x^2+8x = 0 \\ 6x = -4 & \text{oder} & x^2+4x = 0 \\ x = -\frac{4}{6} & \text{oder} & x(x+4) = 0 \end{array}$$

Auf rechte Gleichung wende die Merke-Box „Produkt Null $\iff$ einer der Faktoren Null“ an:

$$\begin{array}{ccccc} x = -\frac{2}{3} & \text{oder} & x = 0 & \text{oder} & x+4 = 0 \\ x = -\frac{2}{3} & \text{oder} & x = 0 & \text{oder} & x = -4 \end{array}$$

Also $\mathbb{L} = \{-4, -\frac{2}{3}, 0\}$.

Lösung zu Aufgabe 6.12 ex-konsequenzen-produkt-null

a) „Korrektes Wurzelziehen“:

$$\begin{array}{rcl} T^2 = S^2 & \iff & T^2 - S^2 = 0 \\ & \iff & (T-S)(T+S) = 0 \\ & \overset{\text{Produkt-Null-Regel}}{\iff} & T-S = 0 \text{ oder } T+S = 0 \\ & \iff & T = S \text{ oder } T = -S \end{array}$$

b) „Division durch einen Term“:

$$\begin{array}{rcl} RT = ST & \iff & RT - ST = 0 \\ & \iff & (R-S)T = 0 \\ & \overset{\text{Produkt-Null-Regel}}{\iff} & R-S = 0 \text{ oder } T = 0 \\ & \iff & R = S \text{ oder } T = 0 \end{array}$$

Lösung zu Aufgabe 6.13 ex-gleichungen-mit-parametern-ohne-diskussion

a)
$$\begin{aligned} qx - x &= q^2 - 1 \\ x(q-1) &= (q+1)(q-1) && \mid :(q-1) \\ x &= q+1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2(bz - cz) &= z + bz - c \\ 2bz - 2cz &= z + bz - c && \mid -z - bz \\ 2bz - 2cz - z - bz &= -c \\ z(2b - 2c - 1 - b) &= -c \\ z(b - 2c - 1) &= -c && \mid :(b-2c-1) \\ z &= -\frac{c}{b-2c-1} \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} (y-3p)^2 &= 2y(y+3p) - y(y-1) \\ y^2 - 6py + 9p^2 &= 2y^2 + 6py - (y^2 - y) \\ y^2 - 6py + 9p^2 &= y^2 + 6py + y && \mid -y^2 - 6py - y - 9p^2 \\ -12py - y &= -9p^2 \\ y(-12p - 1) &= -9p^2 && \mid :(-12p-1) \\ y &= \frac{9p^2}{12p+1} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 6.14 ex-gleichungen-mit-parametern-mit-diskussion

a)
$$\begin{aligned} ax + b &= 3 \\ ax &= 3 - b \end{aligned}$$

Fall 1: Normalfall $a \neq 0$. Lösung $x = \frac{3-b}{a}$.
Fall 2: Spezialfall $a = 0$. Unsere Gleichung lautet dann $0 = 3 - b$.
  Fall 2.1: $b \neq 3$. $\mathbb{L} = \varnothing$.
  Fall 2.2: $b = 3$. $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

b)
$$\begin{aligned} px - 5 &= 2x + q && \mid -2x + 5 \\ px - 2x &= q + 5 \\ x(p-2) &= q + 5 \end{aligned}$$

Fall 1: Normalfall $p - 2 \neq 0$. Lösung $x = \frac{q+5}{p-2}$.
Fall 2: Spezialfall $p - 2 = 0$, also $p = 2$. Unsere Gleichung lautet $0 = q + 5$.
  Fall 2.1: $q \neq -5$. $\mathbb{L} = \varnothing$.
  Fall 2.2: $q = -5$. $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

c)
$$\begin{aligned} p^2x - px &= p^2 - 1 \\ x(p^2 - p) &= p^2 - 1 \end{aligned}$$

Fall 1: Normalfall $p^2 - p \neq 0$, d.h. $p(p-1) \neq 0$, d.h. $p \neq 0$ und $p \neq 1$.
Lösung $x = \frac{p^2-1}{p^2-p} = \frac{(p+1)(p-1)}{p(p-1)} = \frac{p+1}{p}$.
Fall 2: Spezialfall $p = 0$. Unsere Gleichung lautet $0 = -1$, also $\mathbb{L} = \varnothing$.
Fall 3: Spezialfall $p = 1$. Unsere Gleichung lautet $0 = 0$, also $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

Lösung zu Aufgabe 6.15 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-128

Unbekannte Zahl: z, Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{N}$.

Ziffer 3 links hinzufügen ergibt: $300 + z$

Ziffer 3 rechts hinzufügen ergibt: $10z + 3$

Unterschied der Zahlen ist 333, also zwei Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} 300 + z - (10z + 3) &= 333 \\ 297 - 9z &= 333 && \mid -297 \\ -9z &= 36 && \mid :(-9) \\ z &= -4 \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \varnothing$ (da -4 nicht natürlich ist).

$$\begin{aligned} 10z + 3 - (300 + z) &= 333 \\ 9z - 297 &= 333 && \mid +297 \\ 9z &= 630 && \mid :9 \\ z &= 70 \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \{70\}$. Da nur Äquivalenzumformungen durchgeführt wurden, ist keine Probe nötig. Um Rechenfehler zu entdecken, ist die Probe aber trotzdem sinnvoll: 703-370=333.

Lösung zu Aufgabe 6.16 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-144

Erster Teil des Kapitals in Frankeng: x [Franken]. Jahreszins davon: $0.06x$.

Zweiter Teil des Kapitals: $70350 - x$ [Franken]. Jahreszins davon $0.05(70350 - x)$.

$$\begin{aligned} 0.06x + 0.05(70350 - x) &= 4100 \\ 0.01x + 3517.5 &= 4100 && \mid -3517.5 \\ 0.01x &= 582.5 && \mid :0.01 \\ x &= 58250 \end{aligned}$$

Der zu 6% verzinste Teil beträgt 58250 Franken, der zu 5% verzinste Teil 12100 Franken.

Lösung zu Aufgabe 6.17 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-163

Gesuchte in Uhrzeit in Minuten nach 16 Uhr: x [min]

Winkel des Minutenzeigers: $6x$ [°] (da eine Minute einem Winkel von $\frac{360}{60}^\circ = 6^\circ$ entspricht; Winkelweite ab Zeigerstellung senkrecht nach oben)

Winkel des Stundenzeigers: $120 + \frac{1}{2}x$ [°] (16 Uhr oder 4 Uhr entspricht 120°, pro Stunde 30°, also pro Minute 0.5°.)

Unterschied der Winkel muss 90 [°] sein. Es gibt also zwei Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} 6x - (120 + \frac{1}{2}x) &= 90 \\ \frac{11}{2}x - 120 &= 90 && \mid +120 \\ \frac{11}{2}x &= 210 && \mid : \frac{11}{2} \\ x &= \frac{420}{11} \approx 38.182 \end{aligned}$$

Der rechte Winkel entsteht ungefähr zur Zeit 16:38:10.91 (denn $\frac{420}{11} = 38 + \frac{2}{11}$ und $\frac{2}{11} \cdot 60 = 10.\overline{90}$).

$$\begin{aligned} 120 + \frac{1}{2}x - 6x &= 90 \\ -\frac{11}{2}x + 120 &= 90 && \mid -90 + \frac{11}{2}x \\ 30 &= \frac{11}{2}x && \mid : \frac{11}{2} \\ x &= \frac{60}{11} \approx 5.455 \end{aligned}$$

Der rechte Winkel entsteht ungefähr zur Zeit 16:05:27.27.

Lösung zu Aufgabe 6.18 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-165

Fahrzeit des Zugs A bis zur Begegnung: x [h]

Fahrzeit des Zugs B bis zur Begegnung: $x - \frac{1}{4}$ [h]

Zurückgelegte Strecke von A ($s = v \cdot t$): $72x$ [km]

Zurückgelegte Strecke von B ($s = v \cdot t$): $88\left(x - \frac{1}{4}\right)$ [km]

$$\begin{aligned}72x+88\left(x-\frac{1}{4}\right)&=120\\160x-22&=120 && \mid +22\\160x&=142 && \mid :160\\x&=0.8875\,\mathrm{h}=53.25\,\mathrm{min}\end{aligned}$$

Die Züge begegnen sich nach 53 Minuten und 15 Sekunden, also um 15:53 Uhr und 15 Sekunden.

Lösung zu Aufgabe 6.19 ex-gleichungen-mit-parametern-mit-diskussion2

a)
$$\begin{aligned}a(x-1)&=6(b+7x)\\ax-a&=6b+42x && \mid -42x+a\\ax-42x&=6b+a\\x(a-42)&=6b+a\end{aligned}$$

Fall 1: Normalfall $a\neq 42$**.** Lösung $x=\frac{6b+a}{a-42}$.
Fall 2: Spezialfall $a=42$**.** Eingesetzt: $x\cdot 0=6b+42$.
Fall 2.1: $6b+42=0$**, d.h.** $b=-7$**.** Dann $\mathbb{L}=\mathbb{R}$.
Fall 2.2: $b\neq -7$**.** Dann $\mathbb{L}=\varnothing$.

b)
$$\begin{aligned}a(x-3)&=xb-2\\ax-3a&=xb-2 && \mid +3a-xb\\ax-xb&=3a-2\\x(a-b)&=3a-2\end{aligned}$$

Fall 1: Normalfall $a\neq b$**.** Lösung $x=\frac{3a-2}{a-b}$.
Fall 2: Spezialfall $a=b$**.** Eingesetzt: $x\cdot 0=3a-2$.
Fall 2.1: $3a-2=0$**, d.h.** $a=\frac{2}{3}$**.** In diesem Fall: $\mathbb{L}=\mathbb{R}$
Fall 2.2: $a\neq\frac{2}{3}$**.** Dann $\mathbb{L}=\varnothing$

c)
$$\begin{aligned}p(xp+1)&=2(1+2x)\\p^2x+p&=2+4x && \mid -p-4x\\p^2x-4x&=2-p\\x(p^2-4)&=2-p\end{aligned}$$

Fall 1: Normalfall $p^2-4\neq 0$**, d.h.** $p\neq -2$ **und** $p\neq +2$**.** In diesem Fall ist $x=\frac{2-p}{p^4-4}=\frac{-(p-2)}{(p+2)(p-2)}=-\frac{1}{p+2}$.
Fall 2: Spezialfall $p=-2$**.** Eingesetzt: $x\cdot 0=2-(-2)$, also $0=4$, und damit $\mathbb{L}=\varnothing$.
Fall 3: Spezialfall $p=+2$**.** Eingesetzt: $x\cdot 0=2-(+2)$, also $0=0$, und damit $\mathbb{L}=\mathbb{R}$.

d)
$$\begin{aligned}p(x+3)&=5(p-x)\\px+3p&=5p-5x && \mid +5x-3p\\px+5x&=2p\\x(p+5)&=2p\end{aligned}$$

Diese Gleichung hat genau dann genau eine Lösung, nämlich $\frac{2p}{p+5}$, wenn $p+5\neq 0$, also wenn $p\neq -5$. (Im Fall $p=-5$ lautet die Gleichung $x\cdot 0=-10$, was keine Lösung hat.)

Lösung zu Aufgabe 6.20 ex-gleichungen-vermischt

a)

$$\begin{aligned} \sqrt{1-2x} &= x-1 && \mid (\cdot)^2 \quad \text{⚠} \\ 1-2x &= x^2-2x+1 && \mid +2x-1 \\ 0 &= x^2 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{1-2\cdot 0} \stackrel{?}{=} 0-1$, also $\sqrt{1} \stackrel{?}{=} -1$, also $1 \stackrel{?}{=} -1$; dies ist falsch. Also $\mathbb{L} = \{\} = \varnothing$.

b)

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{2-x} - \frac{8-4x}{2x-1} &= 0 && \mid \cdot (2-x)(2x-1) \quad \text{⚠} \\ (2x-1)^2 - 4(2-x)^2 &= 0 \\ 4x^2-4x+1-(16-16x+4x^2) &= 0 \\ 12x-15 &= 0 \\ 12x &= 15 && \mid :12 \\ x &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Probe: Einsetzen (mühsam) oder festellen, dass im ersten Schritt mit einer Zahl ungleich Null multipliziert wurde (jetzt wo man x kennt), und es so tatsächlich eine Äquivalenzumformung war. Also $\mathbb{L} = \{\frac{5}{4}\}$.

c)

$$\begin{aligned} a(x-2) &= b^2x \\ ax-2a &= b^2x && \mid +2a-b^2x \\ ax-b^2x &= 2a \\ x(a-b^2) &= 2a && \mid :(a-b^2) \\ x &= \frac{2a}{a-b^2} \end{aligned}$$

(Spezialfall $a-b^2=0$ nicht diskutiert.)

d)

$$\begin{aligned} \sqrt{\sqrt{x}+1} &= 2 && \mid (\cdot)^2 \quad \text{⚠} \\ \sqrt{x}+1 &= 4 && \mid -1 \\ \sqrt{x} &= 3 && \mid (\cdot)^2 \quad \text{⚠} \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{\sqrt{9}+1} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} \stackrel{?}{=} 2$. Das stimmt, also $\mathbb{L} = \{9\}$.

e)

$$\begin{aligned} \sqrt{\sqrt{x}+1} &= 0 && \mid (\cdot)^2 \quad \text{⚠} \\ \sqrt{x}+1 &= 0 && \mid -1 \\ \sqrt{x} &= -1 && \mid (\cdot)^2 \quad \text{⚠} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{\sqrt{1}+1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq 0$. Also $\mathbb{L} = \varnothing$.

Eigentlich hätte man schon bei der vorletzten Gleichung aufhören können, da eine Wurzel immer eine positive Zahl oder Null ergibt und diese Gleichung somit keine Lösung hat.

f)

$$\begin{aligned} \frac{3x-2a}{x-a} &= \frac{3a-2x}{x-a} && |\cdot(x-a) \quad ⚠ \\ 3x-2a &= 3a-2x && |+2a+2x \\ 5x &= 5a && |:5 \\ x &= a \end{aligned}$$

Probe: Man erhält in der Ausgangsgleichung eine Division durch Null. Also $\mathbb{L} = \varnothing$.

Lösung zu Aufgabe 6.21 ex-gleichungen-kreieren

Die vorgeschlagenen Lösungen sind möglichst einfach gehalten. Die Gleichungen können durch Term- und Äquivalenzumformungen beliebig “verkompliziert” werden.

a) $\sqrt{x-42} = 0$; Alternative: $\sqrt{x} = \sqrt{42}$

b) $\frac{42}{x} = 1$; oder äquivalent $\frac{1}{x} = \frac{1}{42}$

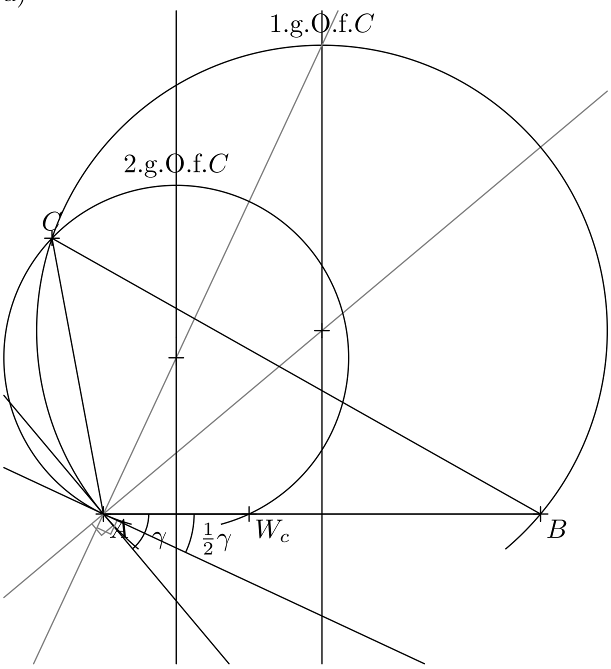
c) $(x-1)(x-2) = 0$

d) $x(a-23) = 1$

e) $\sqrt{x} = -\sqrt{42}$

Lösung zu Aufgabe 6.22 ex-ortsbogen-konstruktionen

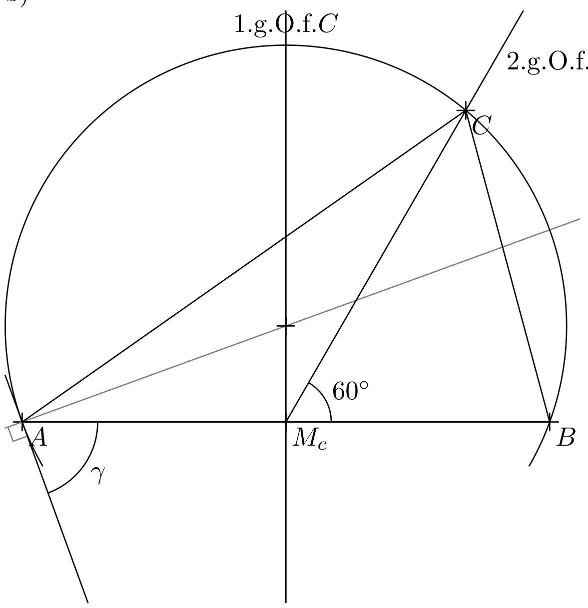
a)



1. Ortsbogen zu γ über $[AB]$ $\rightarrow$ 1.g.O.f.C
2. Ortsbogen zu $\frac{1}{2}\gamma$ über $[AW]$ $\rightarrow$ 2.g.O.f.C

Es gibt 1 Lösung. (Die zweite, an c gespiegelte Lösung nicht mitgezählt).

b)



1. Ortsbogen zu γ über $[AB]$ $\rightarrow$ 1.g.O.f.C
2. Winkel $60°$ bei M_c abtragen $\rightarrow$ s_c, 2.g.O.f.C

Es gibt 1 Lösung. (Die zweite, an c gespiegelte Lösung nicht mitgezählt).

Lösung zu Aufgabe 6.23 ex-ortsbogen-winkel-berechnen

a) Die Dreiecke $\triangle AZC$ und $\triangle BCZ$ sind gleichschenklig (zwei Seiten sind Radien). Damit ist der Winkel $\sphericalangle ACB = \alpha + \varepsilon$. Dieser Winkel ist aber auch Peripheriewinkel über der Sehne $[AB]$, also die Hälfte vom Zentriwinkel β. Es gilt also:

$$\begin{aligned} \alpha + \varepsilon &= \frac{1}{2}\beta \\ \varepsilon &= \frac{1}{2}\beta - \alpha \end{aligned}$$

b) $\varepsilon = \alpha$ (Peripheriewinkel über $[CD]$.

c) $\sphericalangle MCB = \alpha$ (Peripheriewinkel über gleich langen Sehnen $[AM]$ und $[MB]$.

$\sphericalangle CBM = 180° - \alpha - \beta$ (Innenwinkelsumme im $\triangle MBC$).

$\sphericalangle CBM$ und ε sind Peripheriewinkel auf verschiedenen Seiten der Sehne $[MC]$. Sie ergänzen sich zu 180°. Also: $\varepsilon = 180° - \sphericalangle CBM = 180° - (180° - \alpha - \beta) = \alpha + \beta$.