4.9 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 4.2 ex-kb-abstand-p-g

Gegeben: Gerade g, Punkt P (mit $P \notin g$).

1. Wähle $r > \overline{Pg}$ $\to r$
2. $k(P, r)$ $\to k$
3. $k \cap g$ $\to A$, B
4. M_{AB} $\to Q$
5. $\overline{PQ}$ $\to \overline{Pg}$

Lösung zu Aufgabe 4.3 ex-kb-strecke-abtragen

Gegeben: Strecke $[AB]$, Gerade g mit Punkt $P \in g$.

1. $\overline{AB}$ $\to r$
2. $k(P, r)$ $\to k$
3. $k \cap g$ $\to C$, D

Lösung zu Aufgabe 4.4 ex-kb-gleichseitiges-dreieck

Gegeben: Länge $s = 5$ cm.

1. Punkt A wählen $\to A$
2. Gerade c durch A wählen $\to c$
3. s von A auf g abtragen $\to B_1$, B_2
4. $k(A, s)$ $\to k_1$
5. $k(B_1, s)$ $\to k_2$
6. $k_1 \cap k_2$ $\to C_1$, C_2

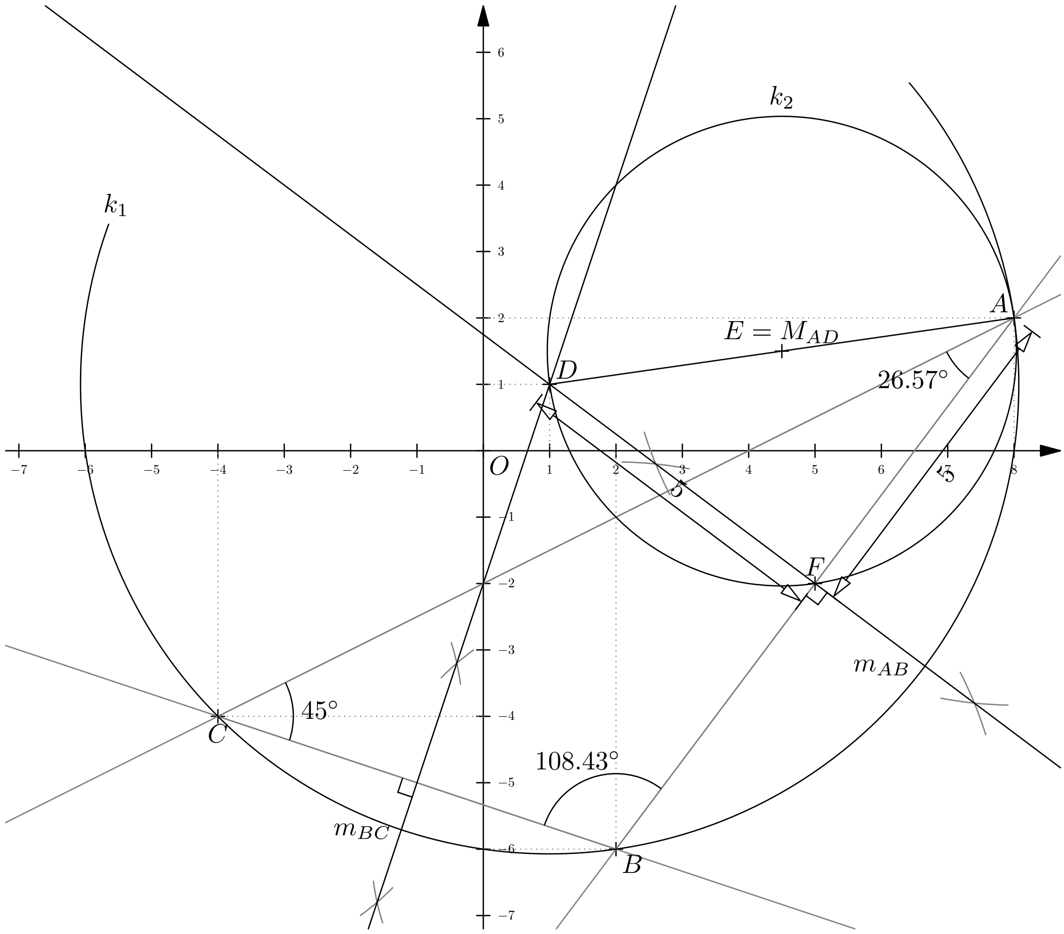
Lösung: ΔAB_1C_1.

Lösung zu Aufgabe 4.6 ex-kb-penta-aus-seite

Gegeben: Punkte A, B.

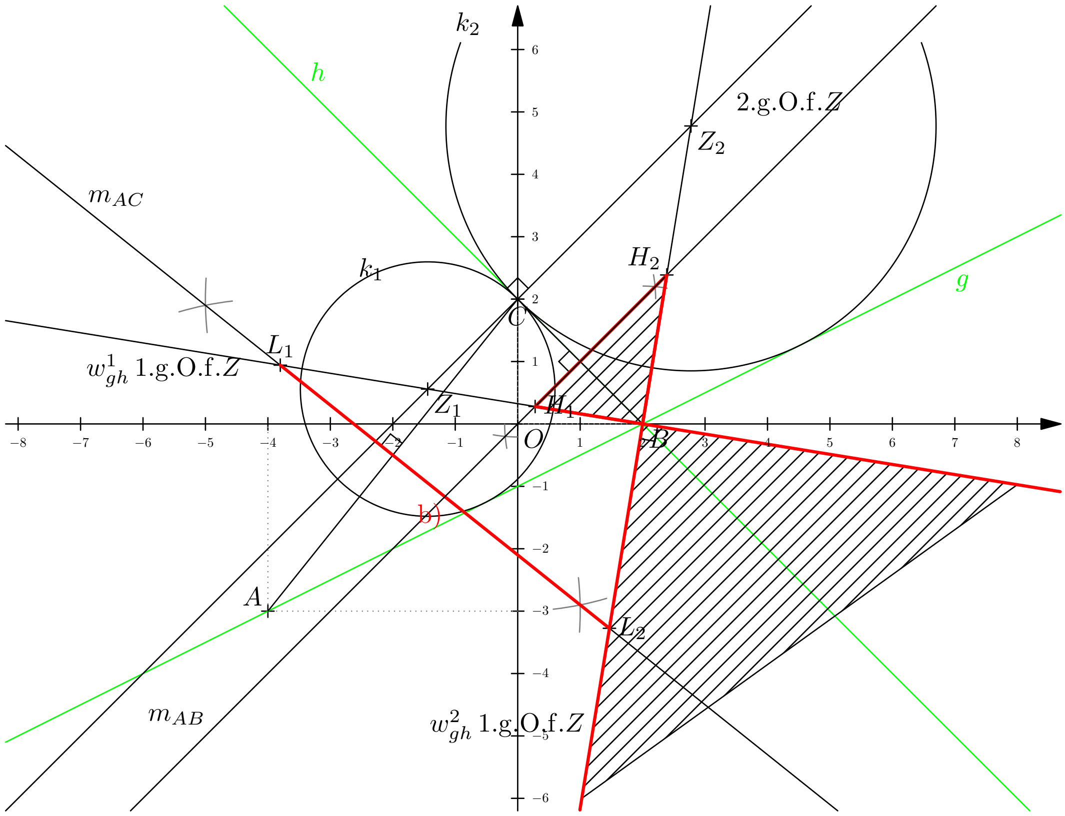
1. Senkrechte zu AB durch A $\to h$
2. $k(A, \overline{AB})$ $\to k_1$
3. $k_1 \cap h$ $\to H$
4. $k(M_{AB}, \overline{M_{AB}H}) \cap AB$ $\to J$
5. $k(B, \overline{BJ})$ $\to k_2$
6. $k_1 \cap k_2$ $\to E$
7. $m_{AB} \cap k_2$ $\to D$
8. $k(D, \overline{DE}) \cap k(B, \overline{AB})$ $\to C$

Lösung zu Aufgabe 4.7 ex-koordinaten-system-einfuehrung



c) $D = (1, 1)$ (sogar exakt).
d) 10 Einheiten (bei 8mm Einheit: 80mm/8mm = 10)
e) $A, B, C \in k_1$, weil D ist der Umkreismittelpunkt vom $\triangle ABC$. Weil $D \in m_{AB}$ gilt $\overline{DA} = \overline{DB}$, und weil $D \in m_{BC}$ gilt $\overline{DB} = \overline{DC}$, und damit ist D gleich weit von A, B, C entfernt.
g) $\alpha \approx 26.57°$, $\beta \approx 108.43°$, $\gamma = 45°$. So genau messen kann man die Winkel natürlich nicht, die Summe kann daher etwas kleiner oder grösser als die eigentlich exakten 180° sein.
i) Ja, weil $\sphericalangle DFA = 90°$ über dem Kreisdurchmesser $[DA]$ steht. Damit ist k_2 ein Thaleskreis auf dem alle rechten Winkel mit Schenkeln durch A, D liegen.
j) In dieser speziellen Situation ja. Würde man den Punkt C weiter auf BC verschieben, würde sich $[DF]$ ändern, aber $[AF]$ nicht.

Lösung zu Aufgabe 4.8 ex-geometrische-oerter3



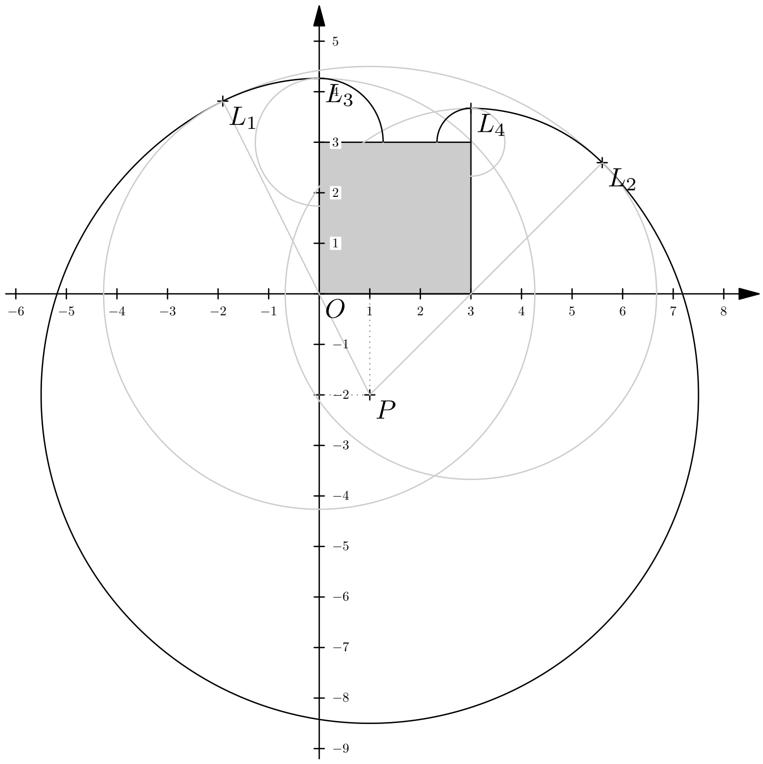
a) Für das Kreiszentrum Z gilt: $\overline{Zg} = \overline{Zh}$ (Kreis berührt die Geraden) und $ZC \perp h$ (berührt h in C). Das ergibt 2 geometrische Örter für Z.

b) Der erste geometrische Ort ist m_{AC}. Der zweite geometrische Ort ist die ganze Fläche zwischen w_{gh}^1 und w_{gh}^2 in der g enthalten ist. Deren Schnitt ergibt eine Strecke.

c) Der erste geometrische Ort ist die *Halbebene*, die B enthält und durch die Gerade m_{BC}, begrenzt ist. Der zweite geometrische Ort ist die ganze Fläche zwischen w_{gh}^1 und w_{gh}^2 in der h enthalten ist. Deren Schnitt ergibt eine Fläche.

1.	w_{gh}^1, w_{gh}^2	$\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2.	$\perp$ zu h durch C	$\rightarrow$ 2.g.O.f.Z, Z_1, Z_2
3.	$k(Z_1, \overline{Z_1, C})$, $k(Z_2, \overline{Z_2, C})$	$\rightarrow$ 2 Lösungen zu a)
4.	$m_{AC} \cap w_{gh}^1$, $m_{AC} \cap w_{gh}^2$	$\rightarrow$ $[L_1, L_2]$, Lösung zu b)
5.	$m_{BC} \cap w_{gh}^1$, $m_{BC} \cap w_{gh}^2$	$\rightarrow$ H_1, H_2
6.	Schraffierte Fläche	$\rightarrow$ Lösung zu c)

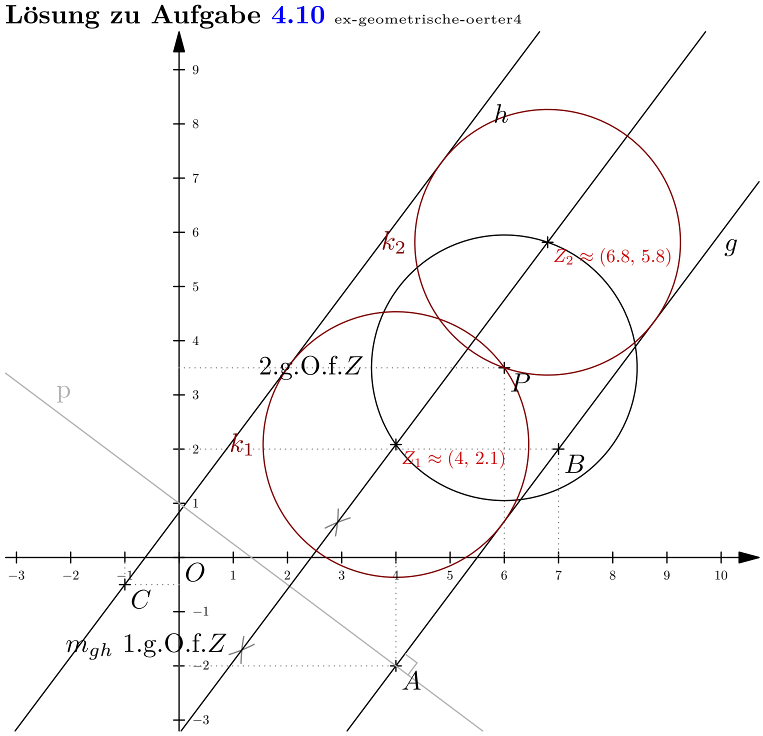
Lösung zu Aufgabe 4.9 ex-geometrische-oerter-ziege-ums-haus



Die Eckpunkte des Hauses werden vom Nullpunkt aus im Gegenuhrzeigersinn mit H_1, H_2, H_3 und H_4 bezeichnet.

1. $k(P, 6.5)$ $\rightarrow k_1$
2. $k_1 \cap PH_1$ und $k_1 \cap PH_2$ $\rightarrow L_1$ und L_2
3. $k(H_0, \overline{H_1L_1})$ und $k(H_1, \overline{H_1L_2})$ $\rightarrow k_2$ und k_3
4. $k_2 \cap H_1H_4$ und $k_3 \cap H_2H_3$ $\rightarrow L_3$ und L_4

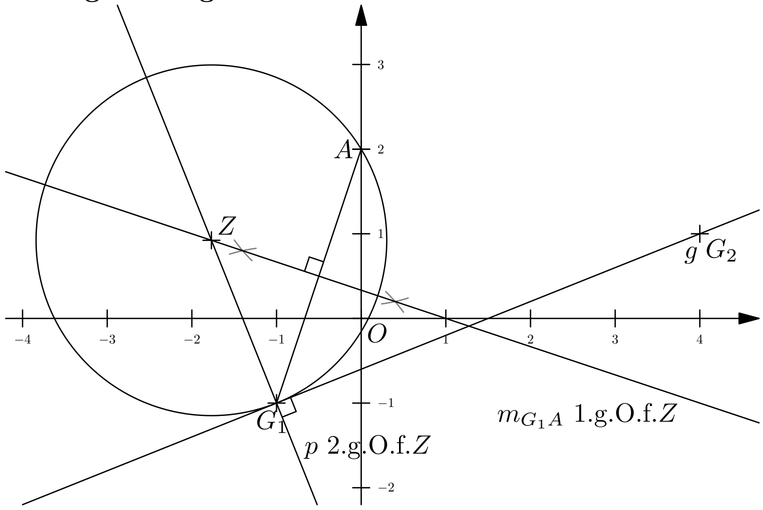
Lösung zu Aufgabe 4.10 ex-geometrische-oerter4



Es wird zuerst das Kreiszentrum Z konstruiert. Es gilt $\overline{Zg} = \overline{Zh}$. Der Kreisradius muss $\frac{1}{2}\overline{gh}$ sein, und damit $\overline{ZP} = \frac{1}{2}\overline{gh}$.

1. Mittelparallele m_{gh} $\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2. $k = k(P, \frac{1}{2}\overline{gh})$ $\rightarrow$ 2.g.O.f.Z
3. $m_{gh} \cap k$ $\rightarrow$ Z_1, Z_2
4. $k(Z_1, \frac{1}{2}\overline{gh})$, $k(Z_2, \frac{1}{2}\overline{gh})$ $\rightarrow$ 2 Lösungen

Lösung zu Aufgabe 4.11 ex-geometrische-oerter1

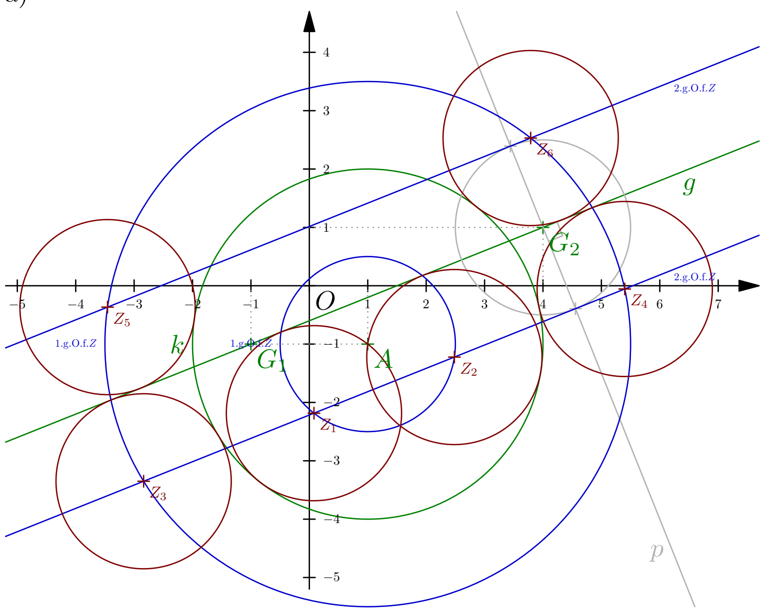


Man konstruiert zuerst das gesuchte Kreiszentrum Z, das folgende Bedingungen erfüllen muss: $\overline{ZA} = \overline{ZG_1}$ und $\overline{Zg} = \overline{ZG_1}$, bzw. $ZG_1 \perp g$ (damit der gesuchte Kreis die Gerade g im Punkt G_1 berührt).

1. m_{G_1A} $\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2. $\perp$ zu g durch G_1 $\rightarrow$ 2.g.O.f.Z
3. $k(Z, \overline{ZG_1})$ $\rightarrow$ 1 Lösung

Lösung zu Aufgabe 4.12 ex-geometrische-oerter2

a)



Man konstruiert das gesuchte Kreiszentrum Z:

1. $k_1 = k(M, r_1 - r_2)$ und $k_2 = k(M, r_1 + r_2)$ $\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2. Parallelenpaar p_1, p_2 zu g im Abstand r_2 $\rightarrow$ 2.g.O.f.Z
3. $(k_1 \cup k_2) \cap (p_1 \cup p_2)$ $\rightarrow$ 6 Lösungen.

b*) Es kann zwischen 0 und 8 Lösungen geben.

0 Lösungen wenn $\overline{kg} > 2r$, wobei $\overline{kg} = \overline{Mg} - r_1$.

1 Lösung wenn $\overline{kg} = 2r$.

2 Lösungen wenn $\overline{kg} < 2r$ und $g \cap k = \varnothing$.

3 Lösungen wenn g Tangente an k und $r_2 > r_1$.

4 Lösungen wenn g Tangente an k ist und $r_2 \leq r_1$, oder wenn $\overline{Mg} < r_1$ und $r_2 > r_1$.

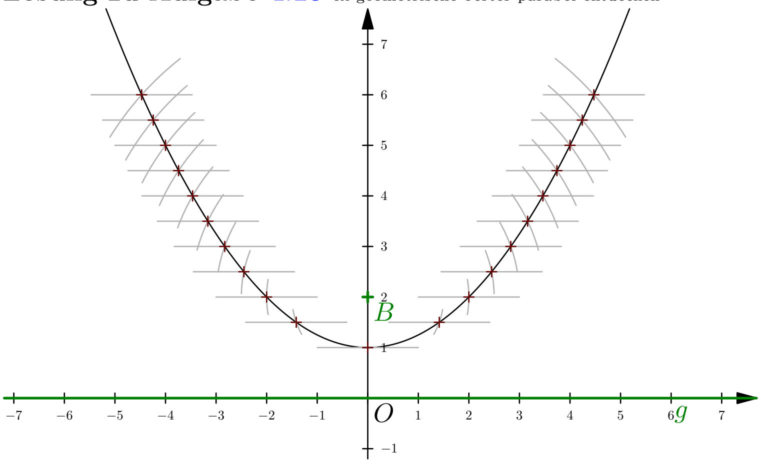
5 Lösungen wenn $\overline{Mg} = r_1 - r_2$ (und damit $r_1 > r_2$).

7 Lösungen wenn $r_2 < 2r_1$ und $\overline{gM} + r_2 = r_1$.

8 Lösungen wenn $r_2 < 2r_1$ und $\overline{gM} + r_2 < r_1$.

6 Lösungen sonst.

Lösung zu Aufgabe 4.13 ex-geometrische-oerter-parabel-entdecken

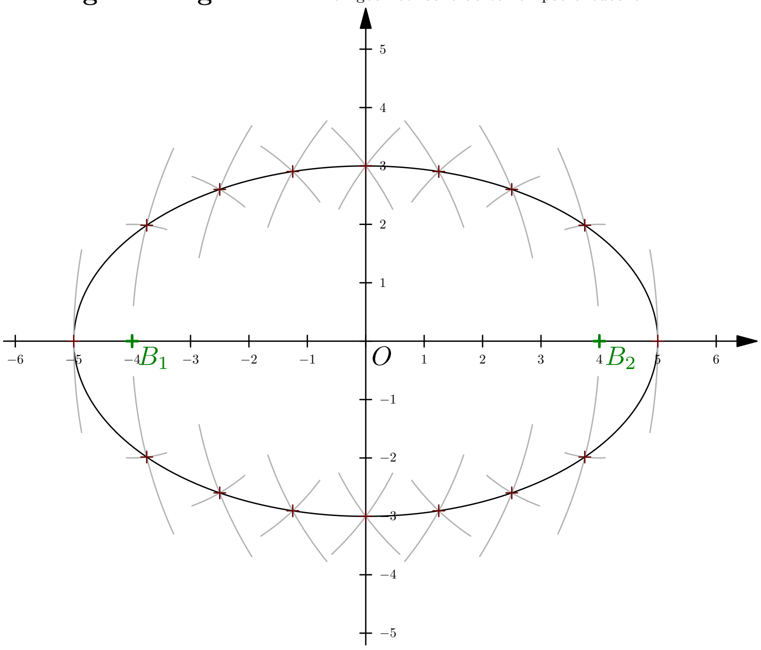


Für alle halbzahligen d wird folgende Konstruktion durchgeführt:

1. Parallele zu g im Abstand d $\quad\rightarrow p$
2. $k(B, d) \cap p$ $\quad\rightarrow P_1$, P_2 (ausser für $d = 1$ nur ein Punkt

Die entstehende Kurve (eine Parabel) ist rund und hat nirgends einen Knick!

Lösung zu Aufgabe 4.14 ex-geometrische-oerter-ellipse-entdecken



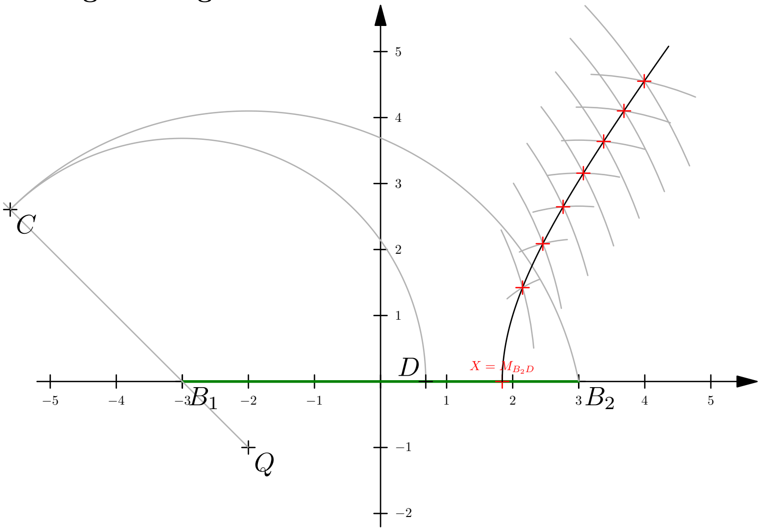
Für alle ganzzahligen d von 1 bis 9 wird folgende Konstruktion durchgeführt:

1. $k(B_1, d) \cap k(B_2, 10 - d)$ $\quad\rightarrow$ 2 Punkte (ausser für $d = 1$ und $d = 9$)

Die entstehende Kurve (eine Ellipse) ist rund und hat nirgends einen Knick!

Schlägt man bei B_1 und B_2 zwei Nägel ein und legt eine Fadenschlaufe der Länge $10 + \overline{B_1B_2} = 10 + 8 = 18$ um die Nägel, kann mit einem Stift, der die Schlaufe spannt, die Ellipse gezeichnet werden.

Lösung zu Aufgabe 4.15 ex-geometrische-oerter-hyperbel-entdecken



Zuerst wird der Punkt D auf $[B_1B_2]$ konstruiert, der via B_1 gleich weit von Q entfernt ist, wie der Punkt B_2. Der Mittelpunkt von D und B_2 ist dann X:

1. $k(Q, \overline{QB_2}) \cap [QB_1 \quad \to C$
2. $k(B_1, \overline{B_1C}) \cap [B_1B_2] \quad \to D$
3. $M_{B_2D} \quad \to X$

Für alle halbzahligen d von 0.5 bis 4 wird folgende Konstruktion durchgeführt:

1. $k(B_1, d + \overline{B_1X}) \cap k(B_2, d + \overline{B_2X}) \quad \to$ 1 Punkt oberhalb B_1B_2

Die entstehende Kurve (ein halber Hyperbelast) ist rund und hat nirgends einen Knick! Die Tangente an die Hyperbel in X ist vertikal, also senkrecht zur Mauer.

Man beachte, dass für alle Punkte P auf der Hyperbel folgendes gilt: $\overline{PB_1} - \overline{PB_2} = \overline{XB_1} - \overline{XB_2}$ (denn beide Ausdrücke stimmen mit $\overline{QB_2} - \overline{QB_1}$ überein).

Lösung zu Aufgabe 4.16 ex-geometrische-oerter-ellipse1

Damit überhaupt ein Dreieck gezeichnet werden kann muss $\ell \geq 2\overline{AB}$ sein. Ansonsten ist der geometrische Ort die leere Menge $\varnothing$.

Es gilt also $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \ell$, bzw. $\overline{AC} + \overline{BC} = \ell - \overline{AB}$ und damit ist der geometrische Ort aller Punkte C eine Ellipse mit Brennpunkten A und B und Abstandssumme $\ell - \overline{AB}$.

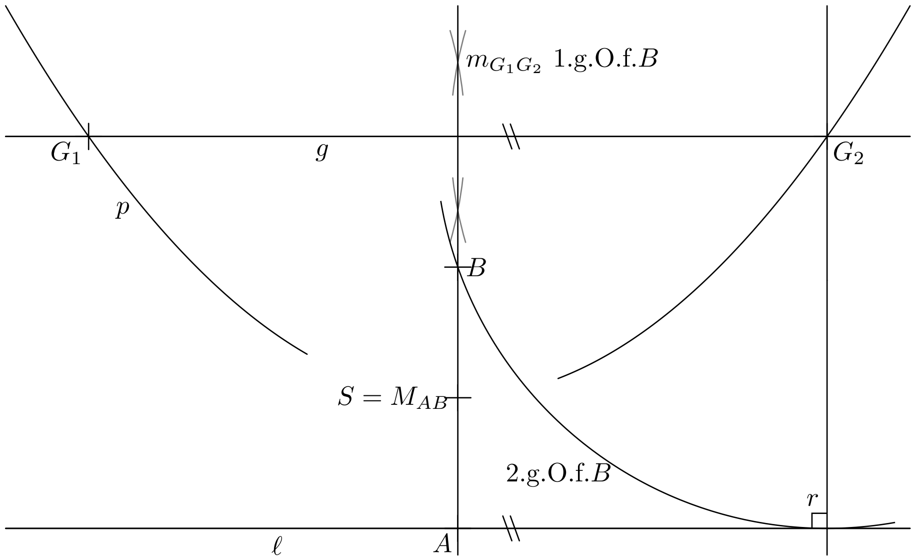
Lösung zu Aufgabe 4.17 ex-geometrische-oerter-parabel1

a) Da g Tangente an die Kreise ist und der Berührungspunkt P auf g ist, ist der geometrische Ort die Rechtwinklige zu g durch P.

b) Für die Kreiszentren Z gilt: $\overline{ZP} = \overline{Zg}$. Damit ist der gesuchte geometrische Ort eine Parabel mit Brennpunkt P und Leitlinie g.

Lösung zu Aufgabe 4.18 ex-geometrische-oerter-parabel2

Zuerst wird die Symmetrieachse a der Parablel konstruiert. Es gilt: $B \in a$. Danach wird ein Punkt $Q \in p$ gewählt und die Bedingung $\overline{Q\ell} = \overline{QB}$ genutzt.



1. Wähle G_1 auf p $\rightarrow G_1$
2. Parallele zu ℓ durch G_1 $\rightarrow g$
3. $g \cap p$ $\rightarrow G_2$
4. $m_{G_1G_2}$ $\rightarrow$ 1.g.O.f.B
5. $k(G_2, \overline{G_2\ell})$ $\rightarrow$ 2.g.O.f.B
6. $m_{G_1G_2} \cap \ell$ $\rightarrow A$
7. M_{AB} $\rightarrow$ Scheitel S

Lösung zu Aufgabe 4.19 ex-geometrische-oerter-ellipse2
Seien A, B die Schnittpunkte $e \cap g$, und C, D die Schnittpunkte $e \cap h$ und $M = g \cap h$.
Seien B_1 und B_2 die unbekannten Brennpunkte auf g, symmetrisch zu $M = g \cap h$, d.h.

$$\overline{AB_1} = \overline{BB_2}.$$

Für jeden Punkt $P \in e$ gilt:

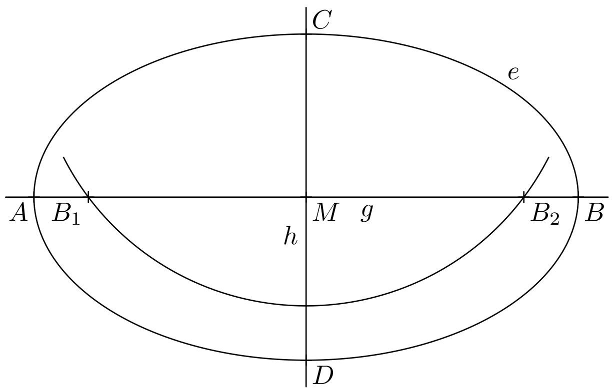
$$\overline{B_1P} + \overline{B_2P} = s \quad \text{(konstante Abstandssumme)}$$

Insbesondere gilt dies für den Punkt A, also

$$s = \overline{AB_1} + \overline{AB_2} = \overline{AB_1} + \overline{AB_1} + \overline{B_1B_2} = \overline{AB_1} + \overline{B_2B} + \overline{B_1B_2} = \overline{AB}$$

Damit ist die Abstandssumme s bekannt. Aus Symmetriegründen gilt $\overline{CB_1} = \overline{CB_2}$ und damit $\overline{CB_1} = \frac{1}{2}s = \overline{AM}$.
Damit ist die Konstruktionsbeschreibung wie folgt:

1. $k(C, \overline{MA}) \cap g$ $\rightarrow B_1$, B_2



Lösung zu Aufgabe 4.21 ex-winkelsaetze-geraden1
a)

$\sphericalangle DAB = 88°$ (Ergänzungswinkel an Parallelen).
$\triangle ACD$ ist gleichschenklig damit ist $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ACD = (180° - \sphericalangle CDA)/2 = (180° - 92°)/2 = 44°$.
Damit ist $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DAB - \sphericalangle DAC = 88° - 44° = 44°$.
δABC ist gleichschenlig und damit $\alpha = (180° - \sphericalangle CAB)/2 = (180° - 44°)/2 = 136°/2 = 68°$.

Antwort: $\alpha = 68°$.

b)

$\delta = 180° - 82° = 98°$ (Ergänzungswinkel).
$\gamma = 180° - 40° = 140°$ (Ergänzungswinkel).
$\alpha = 180° - \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\gamma = 180° - 49° - 70° = 61°$. (Winkelsumme im $\triangle$).

Antwort: $\alpha = 61°$.

c)

$\sphericalangle BDC = 42°$ (Stufenwinkel).
$\sphericalangle ADB = 180° - 2 \cdot 42° = 96°$ (gleichschenkliges $\triangle ABD$ mit Basis $[AB]$).
$\sphericalangle ADC = \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC = 96° + 42° = 138°$.
$\sphericalangle ACD = \frac{1}{2} \cdot (180° - \sphericalangle ADC) = \frac{1}{2} \cdot (180° - 138°) = \frac{1}{2}42° = 21°$. (gleichschenkliges $\triangle ACD$ mit Basis $[AC]$).
$\sphericalangle DFC = 180° - \sphericalangle FDC - \sphericalangle FCD = 180° - 42° - 21° = 117°$ (Winkelsumme im $\triangle DFC$).
$\alpha = 180° - \sphericalangle DFC = 180° - 117° = 63°$

Antwort: $\alpha = 63°$.

Alternative: $\alpha = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DCF$. Man denke sich eine dritte Parallele durch F und α als Summe zweier Stufenwinkel.

Lösung zu Aufgabe 4.22 ex-winkelsaetze-geraden2
Seien g, h zwei sich schneidende Geraden mit $\sphericalangle(g, h) = \alpha$. Sei $\beta = 180° - \alpha$ der Nebenwinkel von α. Damit gilt

$$\sphericalangle(w_{gh}^1, g) = \frac{\alpha}{2} \qquad \text{und} \qquad \sphericalangle(w_{gh}^2, g) = \frac{\beta}{2}$$

und damit

$$\sphericalangle(w_{gh}^1, w_{gh}^2) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$$

Es gilt $\alpha + \beta = 180°$ und damit $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90°$, was zu beweisen war.

Lösung zu Aufgabe 4.23 ex-winkelsaetze-geraden3
a) $\alpha = (180° - \gamma)/2 = 70°$.
b) $180° = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \alpha + 3\alpha = 5\alpha$ also $\alpha = 36°$.
c) $\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 40°$.
d) $180° = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \alpha + \alpha = 3\alpha$ also $\alpha = 60°$.

Lösung zu Aufgabe 4.24 ex-winkelsaetze-geraden4
Sei $I = w_\alpha \cap w_\beta$. Es gilt:

$$\sphericalangle AIB = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \quad \text{Innenwinkelsumme im } \triangle$$

Der gesuchte Winkel δ ist der Nebenwinkel von $\sphericalangle AIB$, also

$$\delta = 180° - (180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

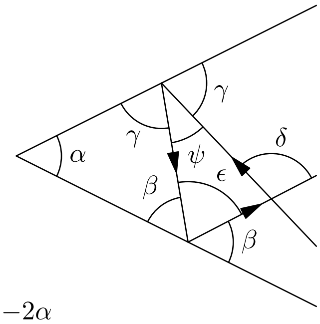
Man hätte dies auch direkt aufschreiben können, da der Aussenwinkel in einem Dreieck immer die Summe der gegenüberliegenden Innenwinkel ist.
In jedem Dreieck gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$$

Und damit ist $\delta = \sphericalangle(w_\alpha, w_\beta) = 90° - \frac{\gamma}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 4.25 ex-winkelsaetze-geraden5

Für den Aussenwinkel δ gilt:



$$\delta = \epsilon + \psi$$

Mit $\epsilon = 180° - 2\beta$ und $\psi = 180° - 2\gamma$. Und damit

$$\delta = \epsilon + \psi = 180° - 2\beta + 180° - 2\gamma = 360° - (2\beta + 2\gamma)$$

Es gilt

$$\alpha+\beta+\gamma = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 2\alpha+2\beta+2\gamma = 360° \quad \Leftrightarrow \quad 2\beta+2\gamma = 360°-2\alpha$$

Oben eingesetzt erhält man

$$\delta = 360° - (360° - 2\alpha) = 2\alpha$$

Lösung zu Aufgabe 4.26 ex-winkelsaetze-geraden6

a) Das Dreieck $\triangle MBC$ ist gleichschenklig, also ist $\sphericalangle MCB = \beta$.
Es gilt

$$\overline{CD} = \overline{CM} = \overline{MA} = \overline{MD}$$

und damit ist $\triangle MCD$ gleichseitig und alle Innenwinkel gleich 60°.
Somit gilt:

$$\sphericalangle MCD = \beta + \gamma = 60° \qquad \Leftrightarrow \qquad \gamma = 60° - \beta.$$

b) Wenn $\beta = \gamma$ sind dies Wechselwinkel (Scheitelwinkel zu Stufenwinkel) und damit $CD \parallel AB$. Eingesetzt in obige Gleichung:

$$\beta = 60° - \beta \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\beta = 60° \qquad \Leftrightarrow \qquad \beta = 30°.$$

Lösung zu Aufgabe 4.27 ex-winkelsaetze-geraden7

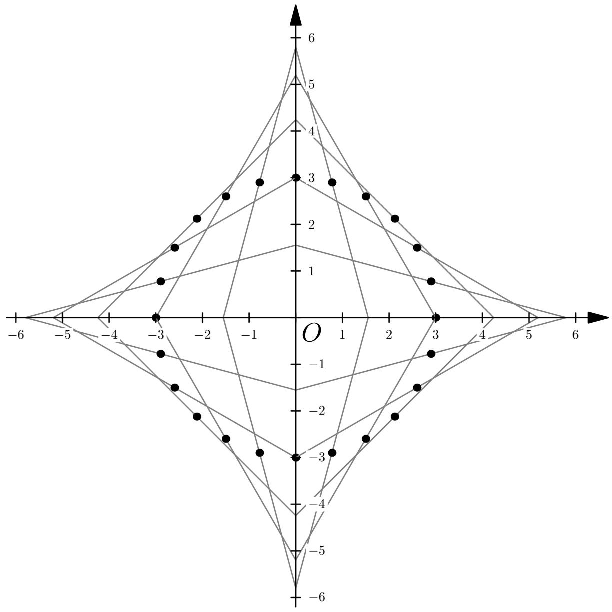
Das Dreieck $\triangle MBC$ ist gleichschenklig und damit ist $\sphericalangle MCB = \beta$. Damit ist p die Mittelsenkrechte zu BC und Winkelhalbierende vom $\sphericalangle CMB$. Damit ist $M_{CD} = a \cap p$. Im Dreieck $\triangle CMM_{BC}$ gilt

$$\mu = 180° - 90° - \beta = 90° - \beta$$

Das Dreieck $\triangle MCD$ ist gleichschenklig mit Basis $[CD]$. Damit ist $\sphericalangle MDC = (180° - \mu)/2 = (180° - (90° - \beta))/2 = (90° + \beta)/2 = 45° + \frac{\beta}{2}$.
Im Dreieck $\triangle CM_{BC}D$ gilt:

$$\gamma = 180° - 90° - \sphericalangle MDC = 90° - (45° + \frac{\beta}{2}) = 45° - \frac{\beta}{2}$$

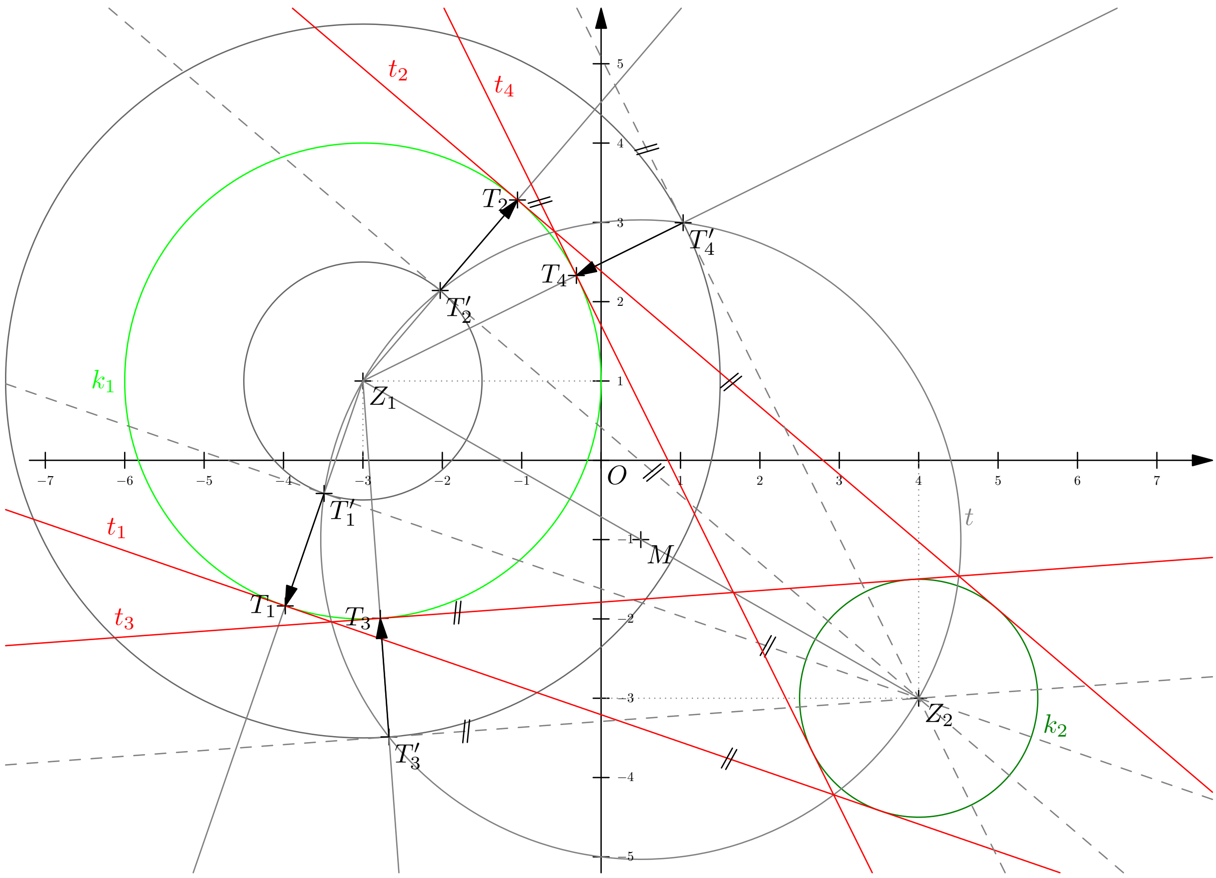
Lösung zu Aufgabe 4.29 ex-thaleskreis-leiter



M_{AB} ist der Mittelpunkt der Stecke $[AB]$, über der der Nullpunkt des Koordinatensystem einen rechten Winkel bildet. D.h. O liegt auf dem Thaleskreis über $[AB]$ und somit $\overline{OM} = \overline{AM_{AB}}$.
Damit ist bewiesen, dass alle Punkte M_{AB} auf einem Kreis um O liegen.

Lösung zu Aufgabe 4.30 ex-tangenten-an-zwei-kreise

1. Thaleskreis über $[Z_1Z_2]$ $\rightarrow t$
2. $k(Z_1, r_1 - r_2) \cap t$ $\rightarrow T_1', T_2'$
3. $[Z_1T_{1,2}' \cap k_1$ $\rightarrow T_{1,2}$
4. $k(Z_1, r_1 + r_2) \cap t$ $\rightarrow T_3', T_4'$
5. $[Z_1T_{3,4}' \cap k_1$ $\rightarrow T_{3,4}$
6. Paralellen zu $Z_2T_{1,2,3,4}'$ durch $T_{1,2,3,4}$ $\rightarrow t_{1,2,3,4}$



Lösung zu Aufgabe 4.31 ex-thaleskreis-hoehenfusspunkte

H_a und H_b sind Scheitel von rechten Winkeln über der Strecke $[AB]$, also liegen beide auf dem Thaleskreis über