4 Planimetrie Grundlagen

Die Planimetrie („flache Messkunde“, „ebene Geometrie“, „Geometrie der Ebene“) ist die Lehre der in der Ebene liegenden Figuren. Die Ebene wird als eine **Menge von Punkten** aufgefasst.

4.1 Definitionen und Notationen

Beachten Sie, dass die Notationen in der Geometrie nicht standardisiert sind. In verschiedenen Lehrmitteln werden verschiedene Notationen verwendet.
Wir definieren folgende Notationen für Objekte in der Ebene:

P	**Punkt** (ohne Ausdehnung, bezeichnet mit grossen Buchstaben)
g	**Gerade** (beidseitig unbegrenzt, bezeichnet mit kleinen Buchstaben) Durch zwei verschiedene Punkte gibt es genau eine Gerade! Eine Gerade ist eine Menge von Punkten.
$A \in g$	Der Punkt A liegt auf der Geraden g. D.h. A ist Element der Punktemenge g.
$B \notin g$	Der Punkt B liegt nicht auf der Geraden g. D.h. B ist nicht Element von g.
AB	**Gerade** (Punktemenge) durch die Punkte A und B. Z.B. $g = AB$ (Hier ist vorausgesetzt, dass A und B voneinander verschieden sind.)
$[AB]$	**Strecke** (Punktemenge) zwischen A und B, inklusive der Punkte A und B.
$\overline{AB}$	**Länge** (relle Zahl) der Strecke $[AB]$ (gemessen als Vielfaches einer definierten Einheitslänge).
$\overline{Pg}$	**Abstand** von P zu g, definiert als die kürzeste Entfernung von P zu einem Punkt auf g.
$g \parallel h$	Zwei Geraden, die keinen Punkt gemeinsam haben, heissen **parallele** Geraden. Zu einer Geraden g und einem nicht auf ihr liegenden Punkt P gibt es genau eine Parallele p durch den Punkt P.
$S = g \cap h$	**Schnittpunkt** S der Geraden g und h. Lies «g geschnitten mit h». (Hier ist vorausgesetzt, dass die Geraden nicht parallel sind.)
$g \cap h = \varnothing$	g und h **schneiden sich nicht** (also $g \parallel h$). Das Symbol $\varnothing$ ist die **leere Menge**.
$g = h$	Die beiden Geraden g und h sind **identisch**. *Manchmal werden identische Geraden ebenfalls als parallel betrachtet.*
$[AB$	**Halbgerade**, die beim Punkt A beginnt und sich durch B ins Unendliche erstreckt.
$\alpha = \sphericalangle ASB$	**Winkel** mit **Scheitel** S und **Schenkeln** $[SA$ und $[SB$. Vorläufig gilt: $\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSA$ und damit $0° \leq \sphericalangle ASB \leq 180°$. Bezeichnung mit kleinen griechischen Buchstaben: z.B. α, β, γ, δ, ε, φ, ω.
$\sphericalangle(g,h)$	**Winkel** zwischen g und h. Vorläufig gilt $\sphericalangle(g,h) = \sphericalangle(h,g)$ und damit $0° \leq \sphericalangle(g,h) \leq 90°$
$g \perp h$	$\sphericalangle(g,h) = 90°$.
m_{AB}	**Mittelsenkrechte** zu den Punkten A, B.
M_{AB}	**Mittelpunkt** der Strecke $[AB]$.
$k = k(M,r)$	**Kreis** k mit Mittelpunkt M und Radius r.
w_{gh}	**Winkelhalbierende** zu den Geraden g, h.
w_{gh}^1, w_{gh}^2	**Winkelhalbierendenpaar** zu den Geraden g, h. Beachten Sie, dass $w_{gh}^1 \perp w_{gh}^2$.

4.2 Grundkonstruktionen mit Zirkel, Lineal und Geodreieck

m_{AB}	**Gegeben:** Punkte A und B. 1. Wähle $r > \frac{1}{2}\overline{AB}$ $\to r$ 2. $k(A,r)$ $\to k_1$ 3. $k(B,r)$ $\to k_2$ 4. $k_1 \cap k_2$ $\to P_1, P_2$ 5. P_1P_2 $\to m_{AB}$
M_{AB}	**Gegeben:** Punkte A und B. 1. $AB \cap m_{AB}$ $\to M_{AB}$
Senkrechte (Lot) p zu g durch P	**Gegeben:** Gerade g, Punkt P. 1. Mit Geodreieck $\to p$ **oder** 1. Wähle $r > \overline{Pg}$ $\to r$ 2. $k(P,r) \cap g$ $\to A, B$ 3. m_{AB} $\to p$
Parallele p zu g durch P	**Gegeben:** Gerade g, Punkt P. 1. Verschiebung mit Geodreieck $\to p$ **oder** 1. Senkrechte zu g durch P $\to h$ 2. Senkrechte zu h durch P $\to p$
w_{gh}, bzw. w^1_{gh} und w^2_{gh}	**Gegeben:** Sich schneidende Geraden g, h. 1. $g \cap h$ $\to S$ 2. Wähle einen Radius $\to r_1$ 3. $k(S, r_1)$ $\to k$ 4. $k \cap g$, $k \cap h$ $\to G$, H 5. m_{gh} $\to w_{gh}$, bzw. w^1_{gh} 6. Optional: Rechtwinklige zu w^1_{gh} durch S $\to w^2_{gh}$
Parallelen p_1, p_2 zu g mit gegebenem Abstand d	**Gegeben:** Gerade g, Länge d. 1. Wähle $P \in g$ $\to P$ 2. Senkrechte zu g durch P $\to h$ 3. $k(P,d) \cap h$ $\to H_1$, H_2 4. Parallelen zu g druch H_1, H_2 $\to p_1$, p_2
Winkel α übertragen	**Gegeben:** Winkel α, Scheitel S, Schenkel g, h, Halbgerade $i = [AB$ 1. Wähle einen Radius $\to r$ 2. $k(S,r)$, $k(A,r)$ $\to k_1$, k_2 3. $k_1 \cap g$, $k_1 \cap h$ $\to G$, H 4. $k_2 \cap i$ $\to I$ 5. $k(I, \overline{GH}) \cap k_2$ $\to J_1$, J_2 6. Übertragener Winkel α $\to \sphericalangle BAJ_1$, $\sphericalangle BAJ_2$

Aufgabe 4.1 Konstruieren Sie obige Grundkonstruktionen.

Aufgabe 4.2 Erstellen Sie eine Konstruktionsbeschreibung für die Konstruktion des Abstands eines Punktes P zu einer Geraden g.

Aufgabe 4.3 Erstellen Sie eine Konstruktionsbeschreibung für das Abtragen einer Strecke.

Aufgabe 4.4 Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $s = 5$ cm und erstellen Sie eine Konstruktionsbeschreibung.

Aufgabe 4.5
Konstruieren Sie ein regelmässiges Fünfeck $ABCD$ nach folgender Konstruktionsbeschreibung:
Gegeben: Punkt Z, Radius r, Umkreis $k = k(Z,r)$.

1.	Wähle $A \in k$	$\to A$
2.	Rechtwinklige zu ZA durch Z	$\to g$
3.	$k \cap g$	$\to G$
4.	$k(M_{ZG}, \overline{M_{ZG}A}) \cap g$	$\to F$ (nimm denjenigen Schnittpunkt, der näher bei Z liegt
5.	$\overline{AF}$ von A aus auf k 4 mal abtragen	$\to B$, C, D, E

Aufgabe 4.6 «Übersetzen» und verkürzen Sie die Konstruktionsbeschreibung zur «*Konstruktion mit Zirkel und Lineal bei gegebener Seitenlänge*» zu finden im Wikipedia-Artikel «Fünfeck» in die hier vorgestellte Kurzschreibweise für Konstruktionsbeschreibungen.

4.3 Koordinatensystem

Um ein (rechtwinkliges) Koordinatensystem in der Ebene zu definieren, müssen 3 Dinge festgelegt werden:

- Ein Ursprung (auch Nullpunkt genannt) O (der Buchstabe 'O').
- Eine Einheitslänge.
- Eine Richtung für die erste Achse (x-Achse).

Die letzten zwei Dinge können z.B. durch die Wahl eines weiteren Punkts X festgelegt werden. Die Einheitslänge ist dann $\overline{OX}$. Normalerweise erhält man die y-Achse durch eine Drehung der x-Achse um 90° im **Gegenuhrzeigersinn**. Die x-Achse OX wird normalerweise horizontal mit positiver Richtung nach rechts und die y-Achse nach oben eingezeichnet.

Aufgabe 4.7 Zeichnen Sie auf kariertem Papier ein Koordinatensystem mit Mittelpunkt in der Blattmitte, Einheit 2 Häuschen und x-Achse nach rechts, y-Achse nach oben. Zeichnen Sie (in der gegebenen Reihenfolge) folgende Objekte ein:
a) Punkte $A = (8, 2)$, $B = (2, -6)$, $C = (-4, -4)$.
b) Mittelsenkrechten m_{AB} und m_{BC}.
c) Schnittpunkt $D = m_{AB} \cap m_{BC}$. Schätzen Sie die Koordinaten von D ab.
d) Strecke AB, Angabe der Länge $\ell = \overline{AB}$ (in Einheitslängen!).
e) Kreis $k_1 = k(D, \overline{DA})$. Was stellen Sie fest? Können Sie Ihre Feststellung beweisen?
f) $E = M_{AD}$ und $k_2 = k(E, \overline{EA})$.
g) Messen Sie die Dreieckswinkel $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$ und $\gamma = \sphericalangle BCA$. Berechnen Sie deren Summe. Was sollte das Ergebnis sein? Warum ist dem eher nicht so?
h) Strecken $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.
i) $F = m_{AB} \cap c$. Gilt $F \in k_2$? Ist das Zufall oder können Sie das beweisen?
j) Ist $\overline{DF} = \overline{AF}$? Gilt das auch, wenn man die Punkte A, B, C etwas anders wählt?

4.4 Geometrische Örter (auch: geometrische Orte)

Ein **geometrischer Ort** ist eine Menge von Punkten, die eine bestimmte „geometrische“ Eigenschaft haben, bzw. eine bestimmte „geometrische“ Bedingung erfüllen. In der konstruktiven Geometrie sind geometrische Örter normalerweise Geraden oder Kreise.

4.4.1 Geometrische Örter der konstruktiven Geometrie

Mittelsenkrechte m_{AB}	Gegeben sind zwei Punkte $A \neq B$. m_{AB} ist die Menge aller Punkte P, für die gilt: $\overline{PA} = \overline{PB}$. Kurz: $m_{AB} = \{P \mid \overline{PA} = \overline{PB}\}$
✎ Kreis $k(M, r)$	Gegeben sind ein Punkt M und eine Länge r. ✎ $k(M, r)$ ist die Menge aller Punkte P, für die gilt: $\overline{MP} = r$. Kurz: ✎ $k(M, r) = \{P \mid \overline{PM} = r\}$
✎ Winkelhalbierendenpaar w_{gh}	Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden $g \neq h$. ✎ w_{gh} ist die Menge aller Punkte P, für die gilt: $\overline{Pg} = \overline{Ph}$. Kurz: ✎ $w_{gh} = \{P \mid \overline{Pg} = \overline{Ph}\}$.
✎ Mittelparallele m_{gh}	Gegeben sind zwei parallele Geraden $g \neq h$. ✎ m_{gh} ist die Menge aller Punkte P, für die gilt: $\overline{Pg} = \overline{Ph}$. Kurz: ✎ $m_{gh} = \{P \mid \overline{Pg} = \overline{Ph}\}$.
Parallelenpaar zu g im Abstand d	✎ Gegeben: Gerade g, Länge d Kurz:$\{P \mid \overline{Pg} = d\}$

Geometrische Örter werden sehr oft zur Konstruktion von Punkten (oder Punktemengen) verwendet, die mehrere Bedingungen erfüllen sollen.

Beispiel: Gegeben sind zwei Punkte A, B mit $\overline{AB} = c = 5$. Gesucht ist ein Punkt C mit $\overline{AC} = b = 4$ und $\overline{BC} = a = 3$.

1. $k(A, b)$ $\quad \to k_1$: 1.g.O.f. C *Erster geometrischer Ort für* C
2. $k(B, a)$ $\quad \to k_2$: 2.g.O.f. C
3. $k_1 \cap k_2$ $\quad \to C_1$, C_2

Der Punkt C muss gleichzeitig zwei Bedingungen erfüllen. Konstruktiv geht man so vor, dass man alle Punkte konstruiert, die eine Bedingung erfüllen (in diesem Fall je ein Kreis), die geometrischen Örter. Der Schnitt dieser Örter ergibt dann die Punkte, die beide Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 4.8 Zeichnen Sie ein Koordinatensystem mit Einheit 2 Häuschen und mindestens je 6 Einheiten nach oben und unten.

Gegeben sind die Punkte $A = (-4, -3)$, $B = (2, 0)$ und $C = (0, 2)$. Daraus ergeben sich die Geraden $g = AB$ und $h = BC$.

a) Konstruieren Sie alle Kreise, die g und h berühren und durch C gehen.

b) Konstruieren Sie die Punktemenge $\{P \mid \overline{AP} = \overline{CP}$ und $\overline{Pg} \leq \overline{Ph}\}$ und heben Sie diese farblich hervor.

c) Konstruieren Sie die Punktemenge $\{P \mid \overline{PB} \leq \overline{PC}$ und $\overline{Pg} \geq \overline{Ph}\}$ und heben Sie diese farblich hervor.

Aufgabe 4.9 Auf einer Wiese ist eine Ziege am Punkt $P = (1, -2)$ mit einer Leine der Länge $\ell = 6.5$ angebunden. Auf der Wiese steht ein Haus mit quadratischem Grundriss der Seitenlänge 3 mit je einer Seite auf einer positiven Achse.

Konstruieren Sie die Menge aller Punkte, die die Ziege erreichen kann.

Aufgabe 4.10 Gegeben sind die Geraden g durch $A = (4, -2)$ und $B = (7, 2)$ und die Parallele h zu g durch den Punkt $C(-1, -0.5)$. Weiter ist der Punkt $P(6, 3.5)$ gegeben. Konstruieren Sie alle Kreise, die g und h berühren und durch P gehen. Schätzen Sie die Koordinaten der Mittelpunkte der Kreise ab.

Aufgabe 4.11 Gegeben sind die Gerade $g = G_1G_2$ mit $G_1 = (-1, -1)$ und $G_2 = (4, 1)$ und der Punkt $A = (0, 2)$. Konstruieren Sie alle Kreise, die g in G_1 berühren und durch A gehen.

Aufgabe 4.12 Gegeben sind der Kreis $k = k(M, r_1)$ mir $M = (1, -1)$ und $r_1 = 3$, die Gerade $g = G_1G_2$ mit $G_1 = (-1, -1)$ und $G_2 = (4, 1)$.

a) Konstruieren Sie alle Kreise mit Radius $r_2 = 1.5$, die k und g berühren.

b*) Welche Anzahl Lösungen sind möglich, je nach Wahl der Lage und Grössen der gegebenen Objekte?

Aufgabe 4.13 (Wiederholung der Wüstenaufgabe 2) Zeichnen Sie ein Koordinatensystem mit 1 Einheit nach unten und 7 Einheiten nach oben.

Gegeben ist $B = (0, 2)$ und ℓ (die x-Achse). Konstruieren Sie die Punkte P für die gilt: $\overline{PB} = \overline{P\ell} = d$ für alle halbzahligen Werte von d von 1 bis und mit 6.

Skizzieren Sie dann die Punktemenge $\{P \mid \overline{PB} = \overline{P\ell}\}$.

Aufgabe 4.14 Gegeben sind $B_1 = (-4, 0)$ und $B_2 = (4, 0)$. Konstruieren Sie die Punkte P für die gilt: $\overline{PB_1} + \overline{PB_2} = 10$ und $\overline{PB_1} = d$ für alle ganzzahligen Werte von d von 1 bis und mit 9.

Skizzieren Sie dann die Punktemenge $\{P \mid \overline{PB_1} + \overline{PB_2} = 10\}$.

Mit welchen Hilfsmitteln könnte man diese Punktemenge relativ einfach zeichnen?

Aufgabe 4.15 (Wiederholung der Wüstenaufgabe 3, nun aber ohne Messen) Sie stehen auf dem Punkt $Q = (-2, -1)$, die Strecke $[B_1B_2]$ mit $B_1 = (-3, 0)$ und $B_2 = (3, 0)$ ist eine unüberwindbare Mauer. Welche Punkte hinter der Mauer (d.h. oberhalb der Geraden B_1B_2) haben die Eigenschaft, dass sie von Q gleich weit entfernt sind, egal, ob man die Mauer bei B_1 oder B_2 umgeht?

Wählen Sie das Koordinatensystem mit mindestens 2 Einheiten nach unten und 6 Einheiten nach oben.

a) Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal (ohne Verwendung von Massangaben auf dem Lineal oder Geodreieck) denjenigen Punkt X auf $[B_1B_2]$, der die obige Eigenschaft hat.

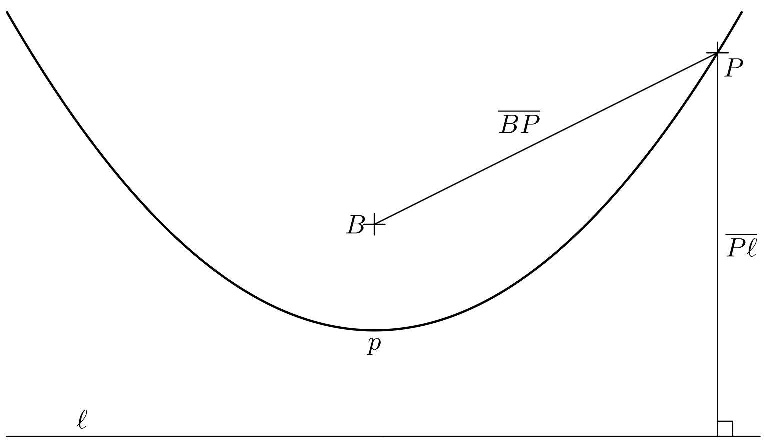
b) Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal mindestens 5 weitere Punkte oberhalb der Geraden B_1B_2 mit der obigen Eigenschaft.

Merke

✎ Eine Parabel p ist der geometrische Ort aller Punkte P, die zu einer gegebenen Geraden ℓ (*Leitlinie*) und einem gegebenen Punkt B (*Brennpunkt*) den gleichen Abstand haben.
$p = \{P \mid \overline{PB} = \overline{P\ell}\}$.

Die Wurfbahn eines Balles ist eine Parabel (wenn man vom Luftwiderstand absieht).

Eine Parabel hat die Eigenschaft, dass alle Strahlen, die senkrecht (in unserer Abbildung von oben) zur Leitlinie einfallen, zum Brennpunkt reflektiert werden. Dreht man eine Parabel um ihre Symmetrieachse, entsteht ein Paraboloid. Parabolantennen (Satellitenschüsseln) sind Paraboloide mit der Antenne im Brennpunkt.

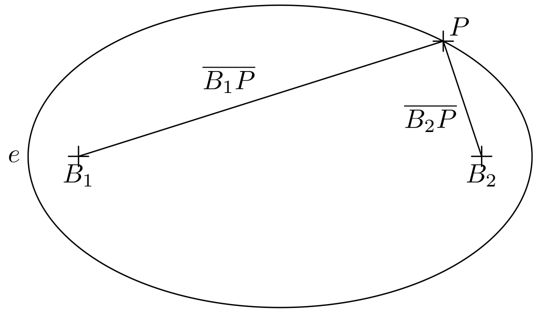


Merke

✎ Eine Ellipse e ist der geometrische Ort aller Punkte P, die von zwei gegebenen Punkten B_1 und B_2 (Brennpunkte) eine konstante Abstandssumme d haben ($d > \overline{B_1B_2}$).
$e = \{P \mid \overline{PB_1} + \overline{PB_2} = d\}$.

Eine Ellipse hat die Eigenschaft, dass alle Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen, auf den anderen Brennpunkt reflektiert werden.

Umlaufbahnen von Planeten sind in sehr guter Näherung Ellipsen, wobei die Sonne in einem Brennpunkt steht.

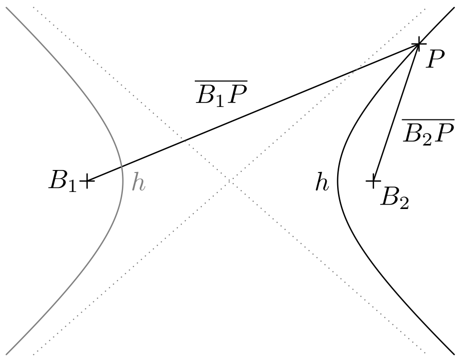


Merke

Eine Hyperbel h ist der geometrische Ort aller Punkte P, die von zwei gegebenen **Brennpunkten** B_1 und B_2 einen betragsmäßig konstanten **Abstandsunterschied** d haben ($d < \overline{B_1B_2}$).
$h = \{P \mid |\overline{PB_1} - \overline{PB_2}| = d\} = \{P \mid \overline{PB_1} - \overline{PB_2} = d \text{ oder } \overline{PB_2} - \overline{PB_1} = d\}$.
Verlangt man nur die Bedingung $\overline{PB_1} - \overline{PB_2} = d$ bzw. $\overline{PB_2} - \overline{PB_1} = d$, so erhält man einen Hyperbel-Ast.

Eine Hyperbel hat die Eigenschaft, dass Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen so reflektiert werden, als kämen die Strahlen vom anderen Brennpunkt.

Die Bahn eines Himmelskörper, der zu schnell unterwegs ist, um in eine (ellipsenförmige) Umlaufbahn einzuschwenken, ist eine Hyperbel.



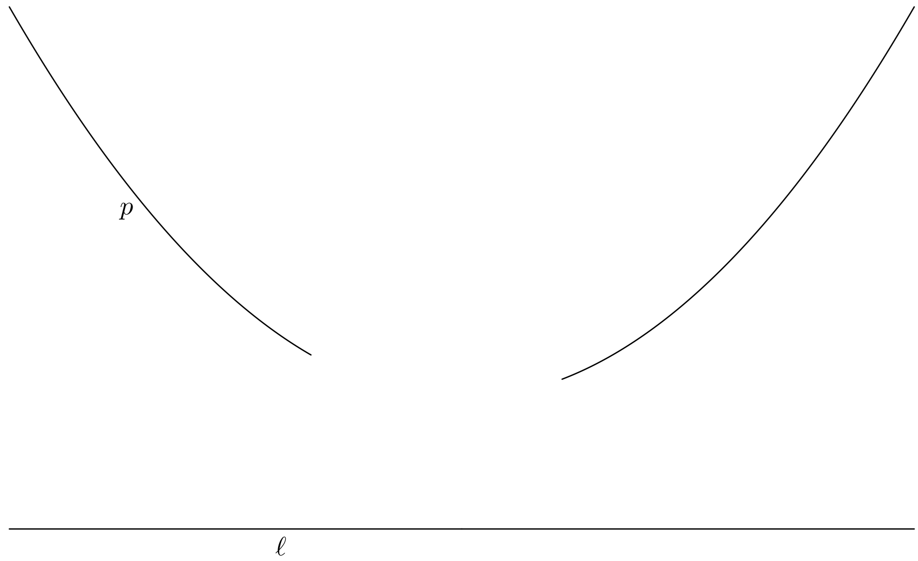
Eine Hyperbel hat zwei **Asymptoten**, d.h. zwei Geraden (in der Skizze oben gestrichelt), denen sich die Kurve immer mehr annähert.

Aufgabe 4.16 Gegeben ist eine Strecke $[AB]$ und eine Länge ℓ. Was ist der gemetrische Ort aller Punkte C für die der Umfang vom $\triangle ABC$ gleich ℓ ist? Was für Bedingungen muss ℓ erfüllen?

Aufgabe 4.17 Gegeben ist eine Gerade g und ein Punkt P. Was ist der geometrische Ort der Kreiszentren Z der Kreise, die g berühren und durch P gehen, wenn a) $P \in g$? Und wenn b) $P \notin g$?

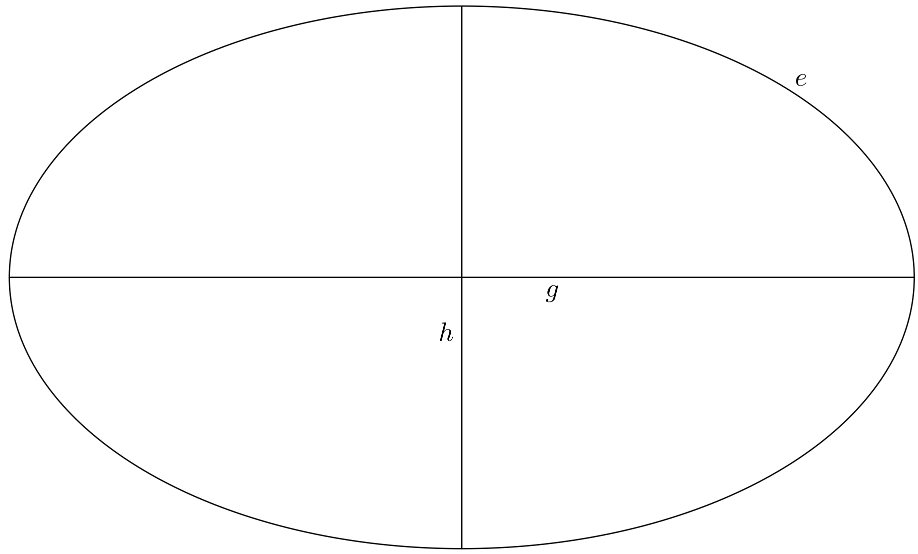
Aufgabe 4.18 Gegeben ist eine Parabel p und ihre Leitlinie ℓ. Durch einen Druckfehler ging ein Teil der Parabel verloren. Konstruieren Sie direkt auf dieses Blatt den Brennpunkt der Parabel und den Scheitelpunkt

S der Parabel (der Punkt der Parabel, der am nächsten an ℓ ist).



Aufgabe 4.19 Gegeben ist eine Ellipse e sowie ihre Symmetrieachsen g und h. Konstruieren Sie die Brennpunkte der Ellipse e direkt auf dieses Blatt.

Hinweis: *Die Konstruktion ist extrem einfach. Die Schwierigkeit dieser Aufgabe liegt darin, die nötigen geometrischen Überlegungen zu führen und sauber zu dokumentieren..*



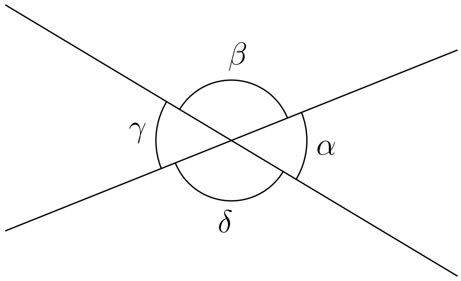
Der Schnitt eines Doppelkegels mit einer Ebene ist entweder eine Parabel, eine Ellipse oder eine Hyperbel (abgesehen von Spezialfällen). Deswegen nennt man diese Gebilde *Kegelschnitte*. Ich erkläre dies gerne mit Hilfe geometrischer Modelle, die unsere Schule besitzt (vgl. Wikipedia: Dandelinsche Kugel).

4.4.2 Zusammenfassung Kegelschnitte

Kurve	*Gegeben*	*geometrischer Ort*	*Reflexionseigenschaft*
Parabel	Brennpunkt B, Leitlinie ℓ	$\{P \mid \overline{PB} = \overline{P\ell}\}$	Senkrecht zur Leitlinie einfallende Strahlen werden zum Brennpunkt hin reflektiert.
Ellipse	Brennpunkte B_1, B_2, Abstandssumme $d > \overline{B_1B_2}$	$\{P \mid \overline{PB_1} + \overline{PB_2} = d\}$	Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen werden zum anderen Brennpunkt hin reflektiert.
Hyperbel	Brennpunkte B_1, B_2, Abstandunterschied $d < \overline{B_1B_2}$	$\{P \mid \lvert\overline{PB_1} - \overline{PB_2}\rvert = d\}$	Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen werden so reflektiert, als kämen sie vom anderen Brennpunkt.

4.5 Winkelsätze an Geraden

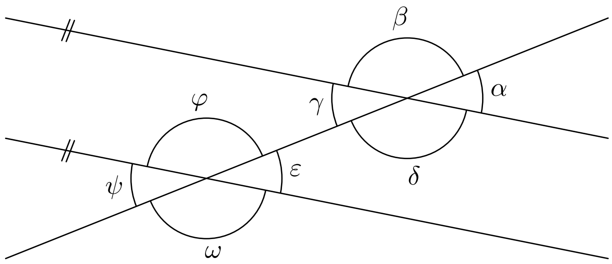
4.5.1 Scheitel- und Nebenwinkel



Scheitelwinkel sind ✎ gleich gross:
$\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$.

Nebenwinkel ergänzen sich zu ✎ $180°$:
$\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°$.

4.5.2 Winkel an Parallelen



Stufenwinkel sind ✎ gleich gross:
$\alpha = \varepsilon$, $\beta = \varphi$, $\gamma = \psi$ und $\delta = \omega$.

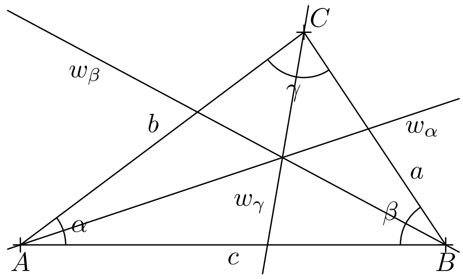
Ergänzungswinkel ergänzen sich zu ✎ $180°$:
$\alpha + \varphi = \alpha + \omega = 180°$,
$\beta + \varepsilon = \beta + \psi = 180°$,
$\gamma + \varphi = \gamma + \omega = 180°$,
$\delta + \varepsilon = \delta + \psi = 180°$.

Den Scheitelwinkel eines Stufenwinkels nennt man auch **Wechselwinkel** (z.B. $\alpha = \psi$).

4.5.3 Bezeichnungen und Winkel in Dreiecken

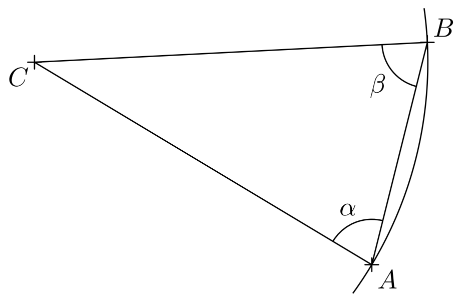
Für ein Dreieck ($\triangle ABC$) gelten folgende Notationen:

A, B, C	**Eckpunkte**, normalerweise im Gegenuhrzeigersinn.
a, b, c	**Seiten**, gegenüber der entsprechenden Eckpunkten.
α, β, γ	**Innenwinkel** an den entsprechenden Eckpunkten.
w_α, w_β, w_γ	**Winkelhalbierende** der entsprechenden Winkel.
h_a, h_b, h_c	**Höhen** auf die entsprechenden Seiten.
M_a, M_b, M_c	**Seitenmittelpunkte**.
m_a, m_b, m_c	**Mittelsenkrechten** der entsprechenden Seiten.
s_a, s_b, s_c	**Schwerlinien**. Z.B. $s_a = AM_a$



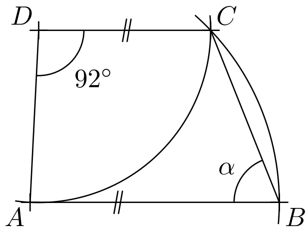
Aufgabe 4.20
Mit den Winkelsätzen an Parallelen beweisen Sie, dass die Innenwinkelsumme in einem Dreieck $180°$ ist.

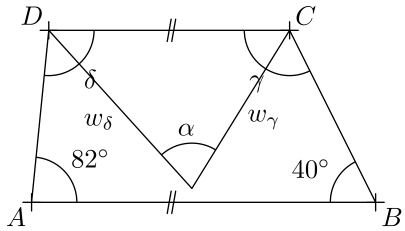
Gleichschenklige Dreiecke
Ein Dreieck ist **gleichschenklig** wenn zwei Seiten gleich lang sind. Die gleich langen Seiten nennt man **Schenkel**, die dritte Seite heisst **Basis**. Die beiden Winkel zwischen Basis und Schenkeln sind gleich. Umgekehrt gilt auch: Wenn in einem Dreieck zwei Winkel gleich sind, so ist das Dreieck gleichschenklig.

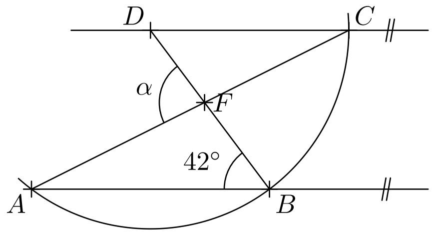


Gleichseitige Dreiecke
Ein Dreieck heisst **gleichseitig**, wenn seine drei Seiten gleich lang sind. Dann sind auch alle Winkel gleich $60°$. Umgekehrt gilt auch: Sind alle Winkel in einem Dreieck gleich gross (und dann wegen der Innenwinkelsumme jeweils $60°$), so ist das Dreieck gleichseitig.

Aufgabe 4.21 Wie gross ist der Winkel α? *Hinweis: Die angegebenen Winkel stimmen teilweise nicht, damit Sie nachdenken, anstatt Winkel mit dem Geodreieck zu messen.*

a)


b)


c)


Aufgabe 4.22 Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden. Zeigen Sie, dass die beiden zugehörigen Winkelhalbierenden senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe 4.23 Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck mit $\alpha = \beta$. Finde in jedem der folgenden vier Fälle heraus, wie gross α ist.

a) $\gamma = 40°$ b) $\gamma = 3\alpha$ c) $\beta + \gamma = 140°$ d) $\alpha = \gamma$

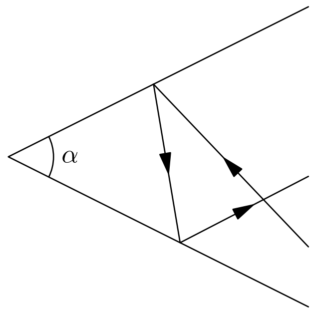
Aufgabe 4.24 Beweisen Sie: In jedem $\triangle ABC$ gilt $\sphericalangle(w_\alpha, w_\beta) = 90° - \frac{\gamma}{2}$.

Aufgabe 4.25

Ein Lichtstrahl wird an den beiden Schenkeln eines Winkels α reflektiert. Dabei gilt das Reflexionsgesetz aus der Physik:

Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel.

Unter welchem Winkel δ schneiden sich der einfallende und der ausfallende Lichtstrahl? *Hinweis: Führen Sie die Hilfswinkel β und γ im Dreieck mit dem Winkel α ein.*



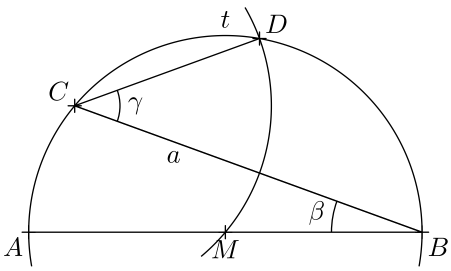
Aufgabe 4.26

Gegeben ist eine Strecke $[AB]$ und ein Winkel β mit Scheitel B und Schenkeln AB und a. Es wird folgende Konstruktion ausgeführt:

1. M_{AB} $\to M$
2. $k(M, \overline{MA})$ $\to t$
3. $a \cap t$ $\to C$
4. $k(C, \overline{CM}) \cap t$ $\to D$

a) Berechnen Sie $\gamma = \sphericalangle BCD$ in Abhängigkeit von β. Hinweis: Untersuchen Sie das Dreieck $\triangle MCD$.

b) Für welchen Winkel β gilt $CD \parallel AB$? (Dies benötigt genaugenommen eine Art Umkehrung unserer Aussage zu Stufenwinkeln. Bitte mich fragen oder „Stufenwinkelsatz“ auf Wikipedia anschauen.)

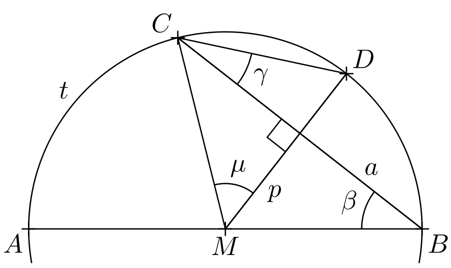


Aufgabe 4.27

Gegeben ist eine Strecke $[AB]$ und ein Winkel β mit Scheitel B und Schenkeln AB und a. Es wird folgende Konstruktion ausgeführt:

1. M_{AB} $\to M$
2. $k(M, \overline{MA})$ $\to t$
3. $a \cap t$ $\to C$
4. $\perp$ zu a durch M $\to p$
5. $p \cap t$ $\to D$

a) Berechnen Sie $\gamma = \sphericalangle BCD$ und $\mu = \sphericalangle CMD$ in Abhängigkeit von β.



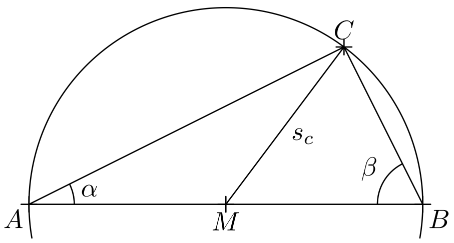
4.6 Kreiswinkelsätze

4.6.1 Thaleskreis

Satz 1

Liegt in einem Dreieck ABC der Punkt C auf dem Kreis mit Durchmesser $[AB]$, dann ist $\gamma = \sphericalangle BCA = 90°$ und umgekehrt.
Der Kreis $k(M_{AB}; \frac{1}{2}\overline{AB})$ mit Durchmesser $[AB]$ heisst **Thaleskreis**.

Beweis: $(C \in k(M_{AB}, \overline{AM_{AB}}) \Rightarrow \gamma = 90°)$

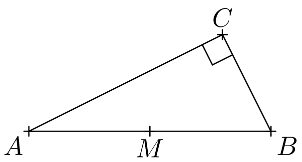


✎ $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$ und damit sind $\triangle AMC$ und $\triangle MBC$ gleichschenklig.
Also gilt: $\gamma = \alpha + \beta$.
Eingesetzt in $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ ergibt sich:

$$\gamma + \gamma = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 90°,$$

was zu beweisen war.

Beweis: $(\gamma = 90° \Rightarrow C \in k(M_{AB}, \overline{AM_{AB}}))$



✎ Man spiegelt C an M und erhält ein Rechteck $(\alpha + \beta = 90°)$. Die Diagonalen in einem Rechteck halbieren sich, und damit gilt $\overline{AM} = \overline{MC} = \overline{MB}$, womit bewiesen ist, dass C auf dem Kreis mit Durchmesser $[AB]$ liegt.

Merke

Sind zwei beliebige Punkte A und B gegeben, so ist der zugehörige Thaleskreis der geometrische Ort aller Punkte P, von denen aus die Strecke $[AB]$ unter einem Winkel von 90° erscheint.

$$k(M_{AB}; \tfrac{1}{2}\overline{AB}) = \{P \mid \sphericalangle APB = 90°\}$$

Merke

Berührt eine Gerade g einen Kreis $k = k(Z, r)$ im Punkt G, so nennt man diese Gerade eine **Tangente** an k mit Berührungspunkt G. Es gilt dann

$$ZG \perp g$$

⚒ **Aufgabe 4.28** Gegeben ist ein Kreis $k = k(Z, r)$ und ein Punkt P ausserhalb von k. Konstruieren Sie die Tangenten an k durch P.

Aufgabe 4.29 Anschaulich: Eine Leiter lehnt fast senkrecht an einer Wand (= der y-Achse) und rutscht dann langsam ab, bis sie am Boden (= der x-Achse) liegt. Welche Kurve beschreibt der Mittelpunkt der Leiter?
Abstrakt: Wähle einen beliebigen Punkt A auf der x-Achse (= der Fusspunkt der Leiter) und (falls möglich) einen Punkt B auf der y-Achse mit $\overline{AB} = 6$ (= der Länge der Leiter) und markiere M_{AB}. Wenn A variiert, was ist der geometrische Ort aller Punkte M_{AB}, die man auf diese Weise erhält? Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie diese.

⚒ **Aufgabe 4.30** Gegeben sind zwei Kreise $k_1 = k(Z_1, r_1)$ und $k_2 = k(Z_2, r_2)$ mit $Z_1 = (-3, 1)$ und $r_1 = 3$ und $Z_2 = (4, -3)$ und $r_2 = 1.5$. Konstruieren Sie alle 4 Geraden, die beide Kreise berühren.
Hinweis: Vergrössert oder verkleinert man die Radien beider Kreise um die gleiche Länge, verschieben sich gemeinsame Tangenten parallel. Vergrössern, bzw. verkleinern Sie einen Kreis so, dass der andere zum Punkt