# 4 Planimetrie Grundlagen

Die Planimetrie („flache Messkunde“, „ebene Geometrie“, „Geometrie der Ebene“) ist die Lehre der in der Ebene liegenden Figuren. Die Ebene wird als eine **Menge von Punkten** aufgefasst.

## 4.1 Definitionen und Notationen

Beachten Sie, dass die Notationen in der Geometrie nicht standardisiert sind. In verschiedenen Lehrmitteln werden verschiedene Notationen verwendet.
Wir definieren folgende Notationen für Objekte in der Ebene:

| | |
|---|---|
| $P$ | **Punkt** (ohne Ausdehnung, bezeichnet mit grossen Buchstaben) |
| $g$ | **Gerade** (beidseitig unbegrenzt, bezeichnet mit kleinen Buchstaben)<br>Durch zwei verschiedene Punkte gibt es genau eine Gerade!<br>Eine Gerade ist eine Menge von Punkten. |
| $A \in g$ | Der Punkt $A$ liegt auf der Geraden $g$. D.h. $A$ ist Element der Punktemenge $g$. |
| $B \notin g$ | Der Punkt $B$ liegt nicht auf der Geraden $g$. D.h. $B$ ist nicht Element von $g$. |
| $AB$ | **Gerade** (Punktemenge) durch die Punkte $A$ und $B$. Z.B. $g = AB$<br>(Hier ist vorausgesetzt, dass $A$ und $B$ voneinander verschieden sind.) |
| $[AB]$ | **Strecke** (Punktemenge) zwischen $A$ und $B$, inklusive der Punkte $A$ und $B$. |
| $\overline{AB}$ | **Länge** (relle Zahl) der Strecke $[AB]$ (gemessen als Vielfaches einer definierten Einheitslänge). |
| $\overline{Pg}$ | **Abstand** von $P$ zu $g$, definiert als die kürzeste Entfernung von $P$ zu einem Punkt auf $g$. |
| $g \parallel h$ | Zwei Geraden, die keinen Punkt gemeinsam haben, heissen **parallele** Geraden.<br>Zu einer Geraden g und einem nicht auf ihr liegenden Punkt $P$ gibt es genau eine Parallele $p$ durch den Punkt $P$. |
| $S = g \cap h$ | **Schnittpunkt** $S$ der Geraden $g$ und $h$. Lies «$g$ geschnitten mit $h$».<br>(Hier ist vorausgesetzt, dass die Geraden nicht parallel sind.) |
| $g \cap h = \varnothing$ | $g$ und $h$ **schneiden sich nicht** (also $g \parallel h$). Das Symbol $\varnothing$ ist die **leere Menge**. |
| $g = h$ | Die beiden Geraden $g$ und $h$ sind **identisch**.<br>*Manchmal werden identische Geraden ebenfalls als parallel betrachtet.* |
| $[AB$ | **Halbgerade**, die beim Punkt $A$ beginnt und sich durch $B$ ins Unendliche erstreckt. |
| $\alpha = \sphericalangle ASB$ | **Winkel** mit **Scheitel** $S$ und **Schenkeln** $[SA$ und $[SB$.<br>Vorläufig gilt: $\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSA$ und damit $0° \leq \sphericalangle ASB \leq 180°$.<br>Bezeichnung mit kleinen griechischen Buchstaben: z.B. $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\varphi$, $\omega$. |
| $\sphericalangle(g, h)$ | **Winkel** zwischen $g$ und $h$. Vorläufig gilt $\sphericalangle(g,h) = \sphericalangle(h,g)$ und damit $0° \leq \sphericalangle(g,h) \leq 90°$ |
| $g \perp h$ | $\sphericalangle(g,h) = 90°$. |
| $m_{AB}$ | **Mittelsenkrechte** zu den Punkten $A$, $B$. |
| $M_{AB}$ | **Mittelpunkt** der Strecke $[AB]$. |
| $k = k(M, r)$ | **Kreis** $k$ mit Mittelpunkt $M$ und Radius $r$. |
| $w_{gh}$ | **Winkelhalbierende** zu den Geraden $g$, $h$. |
| $w_{gh}^1$, $w_{gh}^2$ | **Winkelhalbierendenpaar** zu den Geraden $g$, $h$. Beachten Sie, dass $w_{gh}^1 \perp w_{gh}^2$. |

## 4.2 Grundkonstruktionen mit Zirkel, Lineal und Geodreieck

| | |
|---|---|
| $m_{AB}$ | **Gegeben:** Punkte $A$ und $B$.<br>1. Wähle $r > \frac{1}{2}\overline{AB}$ $\to r$<br>2. $k(A,r)$ $\to k_1$<br>3. $k(B,r)$ $\to k_2$<br>4. $k_1 \cap k_2$ $\to P_1, P_2$<br>5. $P_1P_2$ $\to m_{AB}$ |
| $M_{AB}$ | **Gegeben:** Punkte $A$ und $B$.<br>1. $AB \cap m_{AB}$ $\to M_{AB}$ |
| Senkrechte (Lot) $p$ zu $g$ durch $P$ | **Gegeben:** Gerade $g$, Punkt $P$.<br>1. Mit Geodreieck $\to p$<br>**oder**<br>1. Wähle $r > \overline{Pg}$ $\to r$<br>2. $k(P,r) \cap g$ $\to A, B$<br>3. $m_{AB}$ $\to p$ |
| Parallele $p$ zu $g$ durch $P$ | **Gegeben:** Gerade $g$, Punkt $P$.<br>1. Verschiebung mit Geodreieck $\to p$<br>**oder**<br>1. Senkrechte zu $g$ durch $P$ $\to h$<br>2. Senkrechte zu $h$ durch $P$ $\to p$ |
| $w_{gh}$, bzw. $w^1_{gh}$ und $w^2_{gh}$ | **Gegeben:** Sich schneidende Geraden $g, h$.<br>1. $g \cap h$ $\to S$<br>2. Wähle einen Radius $\to r_1$<br>3. $k(S, r_1)$ $\to k$<br>4. $k \cap g$, $k \cap h$ $\to G$, $H$<br>5. $m_{gh}$ $\to w_{gh}$, bzw. $w^1_{gh}$<br>6. Optional: Rechtwinklige zu $w^1_{gh}$ durch $S$ $\to w^2_{gh}$ |
| Parallelen $p_1$, $p_2$ zu $g$ mit gegebenem Abstand $d$ | **Gegeben:** Gerade $g$, Länge $d$.<br>1. Wähle $P \in g$ $\to P$<br>2. Senkrechte zu $g$ durch $P$ $\to h$<br>3. $k(P,d) \cap h$ $\to H_1$, $H_2$<br>4. Parallelen zu $g$ druch $H_1$, $H_2$ $\to p_1$, $p_2$ |
| Winkel $\alpha$ übertragen | **Gegeben:** Winkel $\alpha$, Scheitel $S$, Schenkel $g$, $h$, Halbgerade $i = [AB$<br>1. Wähle einen Radius $\to r$<br>2. $k(S,r)$, $k(A,r)$ $\to k_1$, $k_2$<br>3. $k_1 \cap g$, $k_1 \cap h$ $\to G$, $H$<br>4. $k_2 \cap i$ $\to I$<br>5. $k(I, \overline{GH}) \cap k_2$ $\to J_1$, $J_2$<br>6. Übertragener Winkel $\alpha$ $\to \sphericalangle BAJ_1$, $\sphericalangle BAJ_2$ |

**Aufgabe 4.1** Konstruieren Sie obige Grundkonstruktionen.

**Aufgabe 4.2** Erstellen Sie eine Konstruktionsbeschreibung für die Konstruktion des Abstands eines Punktes $P$ zu einer Geraden $g$.

**Aufgabe 4.3** Erstellen Sie eine Konstruktionsbeschreibung für das Abtragen einer Strecke.

**Aufgabe 4.4** Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $s = 5$ cm und erstellen Sie eine Konstruktionsbeschreibung.

**Aufgabe 4.5**
Konstruieren Sie ein regelmässiges Fünfeck $ABCD$ nach folgender Konstruktionsbeschreibung:
**Gegeben**: Punkt $Z$, Radius $r$, Umkreis $k = k(Z,r)$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Wähle $A \in k$ | $\to A$ |
| 2. | Rechtwinklige zu $ZA$ durch $Z$ | $\to g$ |
| 3. | $k \cap g$ | $\to G$ |
| 4. | $k(M_{ZG}, \overline{M_{ZG}A}) \cap g$ | $\to F$ (nimm denjenigen Schnittpunkt, der näher bei $Z$ liegt |
| 5. | $\overline{AF}$ von $A$ aus auf $k$ 4 mal abtragen | $\to B, C, D, E$ |

⚒ **Aufgabe 4.6** «Übersetzen» und verkürzen Sie die Konstruktionsbeschreibung zur «*Konstruktion mit Zirkel und Lineal bei gegebener Seitenlänge*» zu finden im Wikipedia-Artikel «Fünfeck» in die hier vorgestellte Kurzschreibweise für Konstruktionsbeschreibungen.

## 4.3 Koordinatensystem

Um ein (rechtwinkliges) Koordinatensystem in der Ebene zu definieren, müssen 3 Dinge festgelegt werden:

- Ein Ursprung (auch Nullpunkt genannt) $O$ (der Buchstabe 'O').
- Eine Einheitslänge.
- Eine Richtung für die erste Achse ($x$-Achse).

Die letzten zwei Dinge können z.B. durch die Wahl eines weiteren Punkts $X$ festgelegt werden. Die Einheitslänge ist dann $\overline{OX}$. Normalerweise erhält man die $y$-Achse durch eine Drehung der $x$-Achse um 90° im **Gegenuhrzeigersinn**. Die $x$-Achse $OX$ wird normalerweise horizontal mit positiver Richtung nach rechts und die $y$-Achse nach oben eingezeichnet.

**Aufgabe 4.7** Zeichnen Sie auf kariertem Papier ein Koordinatensystem mit Mittelpunkt in der Blattmitte, Einheit 2 Häuschen und $x$-Achse nach rechts, $y$-Achse nach oben. Zeichnen Sie (in der gegebenen Reihenfolge) folgende Objekte ein:
a) Punkte $A = (8, 2)$, $B = (2, -6)$, $C = (-4, -4)$.
b) Mittelsenkrechten $m_{AB}$ und $m_{BC}$.
c) Schnittpunkt $D = m_{AB} \cap m_{BC}$. Schätzen Sie die Koordinaten von $D$ ab.
d) Strecke $AB$, Angabe der Länge $\ell = \overline{AB}$ (in Einheitslängen!).
e) Kreis $k_1 = k(D, \overline{DA})$. Was stellen Sie fest? Können Sie Ihre Feststellung beweisen?
f) $E = M_{AD}$ und $k_2 = k(E, \overline{EA})$.
g) Messen Sie die Dreieckswinkel $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$ und $\gamma = \sphericalangle BCA$. Berechnen Sie deren Summe. Was sollte das Ergebnis sein? Warum ist dem eher nicht so?
h) Strecken $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.
i) $F = m_{AB} \cap c$. Gilt $F \in k_2$? Ist das Zufall oder können Sie das beweisen?
j) Ist $\overline{DF} = \overline{AF}$? Gilt das auch, wenn man die Punkte $A$, $B$, $C$ etwas anders wählt?

## 4.4 Geometrische Örter (auch: geometrische Orte)

Ein **geometrischer Ort** ist eine Menge von Punkten, die eine bestimmte „geometrische“ Eigenschaft haben, bzw. eine bestimmte „geometrische“ Bedingung erfüllen. In der konstruktiven Geometrie sind geometrische Örter normalerweise Geraden oder Kreise.

### 4.4.1 Geometrische Örter der konstruktiven Geometrie

| | |
|---|---|
| Mittelsenkrechte $m_{AB}$ | Gegeben sind zwei Punkte $A \neq B$.<br>$m_{AB}$ ist die Menge aller Punkte $P$, für die gilt: $\overline{PA} = \overline{PB}$.<br>Kurz: $m_{AB} = \{P \mid \overline{PA} = \overline{PB}\}$ |
| ✎ Kreis $k(M, r)$ | Gegeben sind ein Punkt $M$ und eine Länge $r$.<br>✎ $k(M, r)$ ist die Menge aller Punkte $P$, für die gilt: $\overline{MP} = r$.<br>Kurz: ✎ $k(M, r) = \{P \mid \overline{PM} = r\}$ |
| ✎ Winkelhalbierendenpaar $w_{gh}$ | Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden $g \neq h$.<br>✎ $w_{gh}$ ist die Menge aller Punkte $P$, für die gilt: $\overline{Pg} = \overline{Ph}$.<br>Kurz: ✎ $w_{gh} = \{P \mid \overline{Pg} = \overline{Ph}\}$. |
| ✎ Mittelparallele $m_{gh}$ | Gegeben sind zwei parallele Geraden $g \neq h$.<br>✎ $m_{gh}$ ist die Menge aller Punkte $P$, für die gilt: $\overline{Pg} = \overline{Ph}$.<br>Kurz: ✎ $m_{gh} = \{P \mid \overline{Pg} = \overline{Ph}\}$. |
| Parallelenpaar zu $g$ im Abstand $d$ | ✎ Gegeben: Gerade $g$, Länge $d$<br>Kurz:$\{P \mid \overline{Pg} = d\}$ |

Geometrische Örter werden sehr oft zur Konstruktion von Punkten (oder Punktemengen) verwendet, die mehrere Bedingungen erfüllen sollen.

**Beispiel:** Gegeben sind zwei Punkte $A$, $B$ mit $\overline{AB} = c = 5$. Gesucht ist ein Punkt $C$ mit $\overline{AC} = b = 4$ und $\overline{BC} = a = 3$.

1. $k(A, b)$ $\to k_1$: 1.g.O.f. $C$ *Erster geometrischer Ort für $C$*
2. $k(B, a)$ $\to k_2$: 2.g.O.f. $C$
3. $k_1 \cap k_2$ $\to C_1$, $C_2$

Der Punkt $C$ muss gleichzeitig zwei Bedingungen erfüllen. Konstruktiv geht man so vor, dass man alle Punkte konstruiert, die eine Bedingung erfüllen (in diesem Fall je ein Kreis), die geometrischen Örter. Der Schnitt dieser Örter ergibt dann die Punkte, die beide Bedingungen erfüllen.

**Aufgabe 4.8** Zeichnen Sie ein Koordinatensystem mit Einheit 2 Häuschen und mindestens je 6 Einheiten nach oben und unten.

Gegeben sind die Punkte $A = (-4, -3)$, $B = (2, 0)$ und $C = (0, 2)$. Daraus ergeben sich die Geraden $g = AB$ und $h = BC$.

a) Konstruieren Sie alle Kreise, die $g$ und $h$ berühren und durch $C$ gehen.

b) Konstruieren Sie die Punktemenge $\{P \mid \overline{AP} = \overline{CP}$ und $\overline{Pg} \leq \overline{Ph}\}$ und heben Sie diese farblich hervor.

c) Konstruieren Sie die Punktemenge $\{P \mid \overline{PB} \leq \overline{PC}$ und $\overline{Pg} \geq \overline{Ph}\}$ und heben Sie diese farblich hervor.

**Aufgabe 4.9** Auf einer Wiese ist eine Ziege am Punkt $P = (1, -2)$ mit einer Leine der Länge $\ell = 6.5$ angebunden. Auf der Wiese steht ein Haus mit quadratischem Grundriss der Seitenlänge 3 mit je einer Seite auf einer positiven Achse.

Konstruieren Sie die Menge aller Punkte, die die Ziege erreichen kann.

**Aufgabe 4.10** Gegeben sind die Geraden $g$ durch $A = (4, -2)$ und $B = (7, 2)$ und die Parallele $h$ zu $g$ durch den Punkt $C(-1, -0.5)$. Weiter ist der Punkt $P(6, 3.5)$ gegeben. Konstruieren Sie alle Kreise, die $g$ und $h$ berühren und durch $P$ gehen. Schätzen Sie die Koordinaten der Mittelpunkte der Kreise ab.

**Aufgabe 4.11** Gegeben sind die Gerade $g = G_1G_2$ mit $G_1 = (-1, -1)$ und $G_2 = (4, 1)$ und der Punkt $A = (0, 2)$. Konstruieren Sie alle Kreise, die $g$ in $G_1$ berühren und durch $A$ gehen.

**Aufgabe 4.12** Gegeben sind der Kreis $k = k(M, r_1)$ mir $M = (1, -1)$ und $r_1 = 3$, die Gerade $g = G_1G_2$ mit $G_1 = (-1, -1)$ und $G_2 = (4, 1)$.

a) Konstruieren Sie alle Kreise mit Radius $r_2 = 1.5$, die $k$ und $g$ berühren.

b*) Welche Anzahl Lösungen sind möglich, je nach Wahl der Lage und Grössen der gegebenen Objekte?

**Aufgabe 4.13** (Wiederholung der Wüstenaufgabe 2) Zeichnen Sie ein Koordinatensystem mit 1 Einheit nach unten und 7 Einheiten nach oben.

Gegeben ist $B = (0, 2)$ und $\ell$ (die $x$-Achse). Konstruieren Sie die Punkte $P$ für die gilt: $\overline{PB} = \overline{P\ell} = d$ für alle halbzahligen Werte von $d$ von 1 bis und mit 6.

Skizzieren Sie dann die Punktemenge $\{P \mid \overline{PB} = \overline{P\ell}\}$.

**Aufgabe 4.14** Gegeben sind $B_1 = (-4, 0)$ und $B_2 = (4, 0)$. Konstruieren Sie die Punkte $P$ für die gilt: $\overline{PB_1} + \overline{PB_2} = 10$ und $\overline{PB_1} = d$ für alle ganzzahligen Werte von $d$ von 1 bis und mit 9.

Skizzieren Sie dann die Punktemenge $\{P \mid \overline{PB_1} + \overline{PB_2} = 10\}$.

Mit welchen Hilfsmitteln könnte man diese Punktemenge relativ einfach zeichnen?

**Aufgabe 4.15** (Wiederholung der Wüstenaufgabe 3, nun aber ohne Messen) Sie stehen auf dem Punkt $Q = (-2, -1)$, die Strecke $[B_1B_2]$ mit $B_1 = (-3, 0)$ und $B_2 = (3, 0)$ ist eine unüberwindbare Mauer. Welche Punkte hinter der Mauer (d.h. oberhalb der Geraden $B_1B_2$) haben die Eigenschaft, dass sie von $Q$ gleich weit entfernt sind, egal, ob man die Mauer bei $B_1$ oder $B_2$ umgeht?

Wählen Sie das Koordinatensystem mit mindestens 2 Einheiten nach unten und 6 Einheiten nach oben.

a) Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal (ohne Verwendung von Massangaben auf dem Lineal oder Geodreieck) denjenigen Punkt $X$ auf $[B_1B_2]$, der die obige Eigenschaft hat.

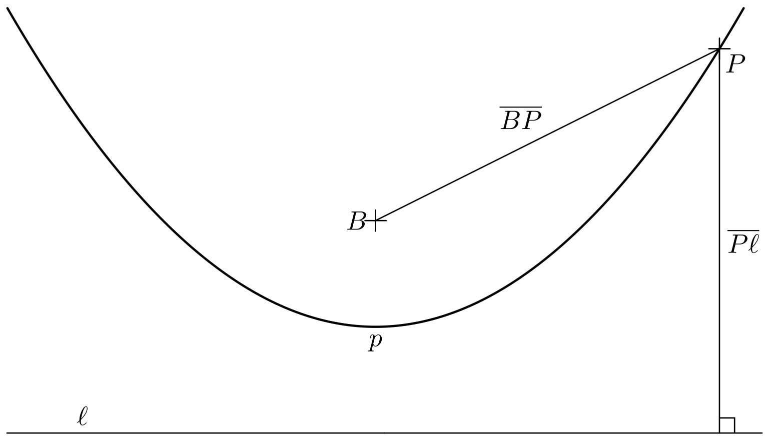
b) Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal mindestens 5 weitere Punkte oberhalb der Geraden $B_1B_2$ mit der obigen Eigenschaft.

**Merke**

✎ Eine Parabel $p$ ist der geometrische Ort aller Punkte $P$, die zu einer gegebenen Geraden $\ell$ (*Leitlinie*) und einem gegebenen Punkt $B$ (*Brennpunkt*) den gleichen Abstand haben.
$p = \{P \mid \overline{PB} = \overline{P\ell}\}$.

Die Wurfbahn eines Balles ist eine Parabel (wenn man vom Luftwiderstand absieht).

Eine Parabel hat die Eigenschaft, dass alle Strahlen, die senkrecht (in unserer Abbildung von oben) zur Leitlinie einfallen, zum Brennpunkt reflektiert werden. Dreht man eine Parabel um ihre Symmetrieachse, entsteht ein Paraboloid. Parabolantennen (Satellitenschüsseln) sind Paraboloide mit der Antenne im Brennpunkt.

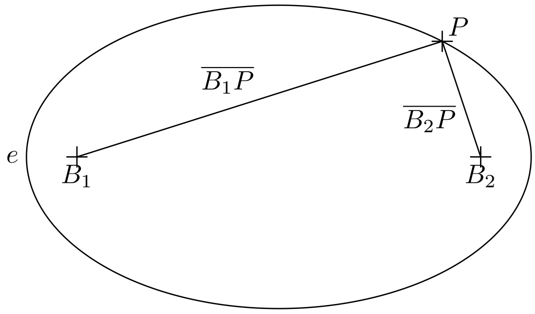


**Merke**

✎ Eine Ellipse $e$ ist der geometrische Ort aller Punkte $P$, die von zwei gegebenen Punkten $B_1$ und $B_2$ (Brennpunkte) eine konstante Abstandssumme $d$ haben ($d > \overline{B_1B_2}$).
$e = \{P \mid \overline{PB_1} + \overline{PB_2} = d\}$.

Eine Ellipse hat die Eigenschaft, dass alle Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen, auf den anderen Brennpunkt reflektiert werden.

Umlaufbahnen von Planeten sind in sehr guter Näherung Ellipsen, wobei die Sonne in einem Brennpunkt steht.

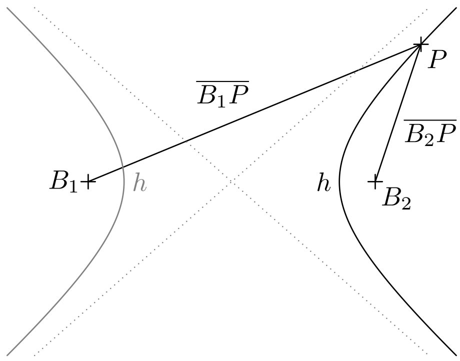



**Merke**

Eine Hyperbel $h$ ist der geometrische Ort aller Punkte $P$, die von zwei gegebenen **Brennpunkten** $B_1$ und $B_2$ einen betragsmäßig konstanten **Abstandsunterschied** $d$ haben ($d < \overline{B_1B_2}$).
$h = \{P \mid |\overline{PB_1} - \overline{PB_2}| = d\} = \{P \mid \overline{PB_1} - \overline{PB_2} = d \text{ oder } \overline{PB_2} - \overline{PB_1} = d\}$.
Verlangt man nur die Bedingung $\overline{PB_1} - \overline{PB_2} = d$ bzw. $\overline{PB_2} - \overline{PB_1} = d$, so erhält man einen Hyperbel-Ast.

Eine Hyperbel hat die Eigenschaft, dass Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen so reflektiert werden, als kämen die Strahlen vom anderen Brennpunkt.

Die Bahn eines Himmelskörper, der zu schnell unterwegs ist, um in eine (ellipsenförmige) Umlaufbahn einzuschwenken, ist eine Hyperbel.



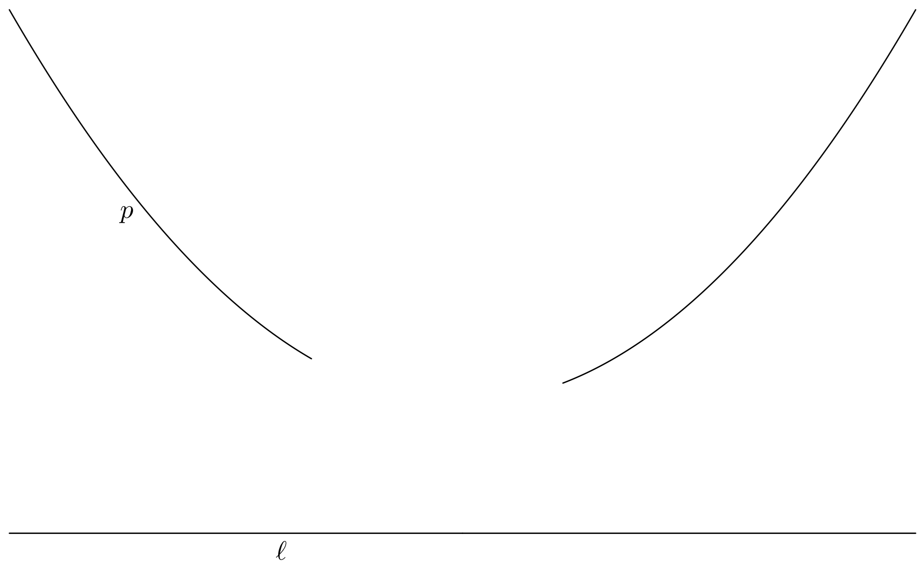

Eine Hyperbel hat zwei **Asymptoten**, d.h. zwei Geraden (in der Skizze oben gestrichelt), denen sich die Kurve immer mehr annähert.

**Aufgabe 4.16** Gegeben ist eine Strecke $[AB]$ und eine Länge $\ell$. Was ist der gemetrische Ort aller Punkte $C$ für die der Umfang vom $\triangle ABC$ gleich $\ell$ ist? Was für Bedingungen muss $\ell$ erfüllen?

**Aufgabe 4.17** Gegeben ist eine Gerade $g$ und ein Punkt $P$. Was ist der geometrische Ort der Kreiszentren $Z$ der Kreise, die $g$ berühren und durch $P$ gehen, wenn a) $P \in g$? Und wenn b) $P \notin g$?

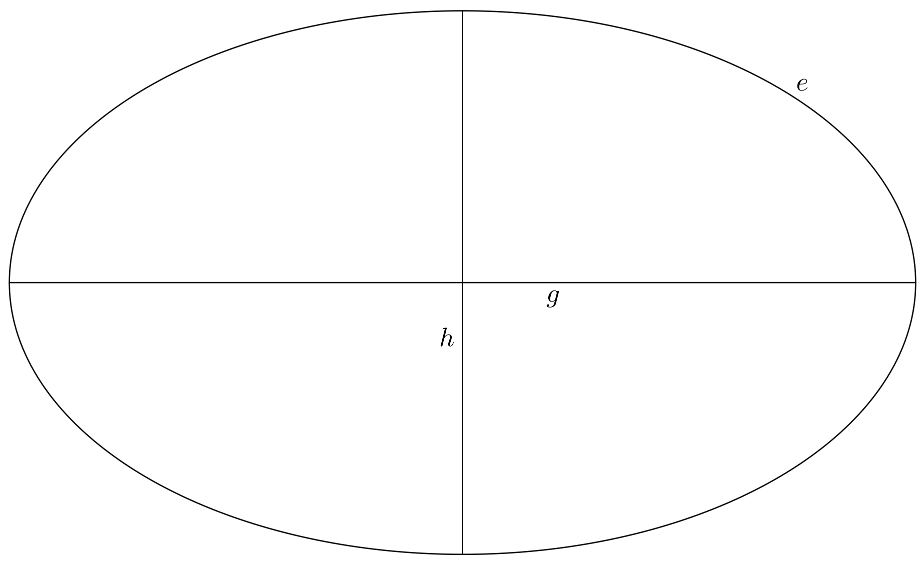
**Aufgabe 4.18** Gegeben ist eine Parabel $p$ und ihre Leitlinie $\ell$. Durch einen Druckfehler ging ein Teil der Parabel verloren. Konstruieren Sie direkt auf dieses Blatt den Brennpunkt der Parabel und den Scheitelpunkt

$S$ der Parabel (der Punkt der Parabel, der am nächsten an $\ell$ ist).




**Aufgabe 4.19** Gegeben ist eine Ellipse $e$ sowie ihre Symmetrieachsen $g$ und $h$. Konstruieren Sie die Brennpunkte der Ellipse $e$ direkt auf dieses Blatt.

Hinweis: *Die Konstruktion ist extrem einfach. Die Schwierigkeit dieser Aufgabe liegt darin, die nötigen geometrischen Überlegungen zu führen und sauber zu dokumentieren..*



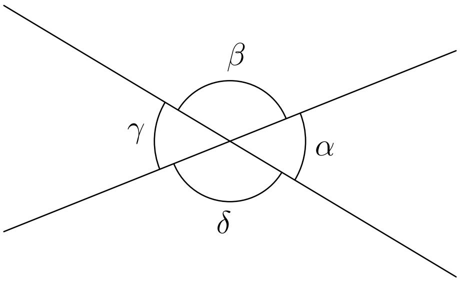

Der Schnitt eines Doppelkegels mit einer Ebene ist entweder eine Parabel, eine Ellipse oder eine Hyperbel (abgesehen von Spezialfällen). Deswegen nennt man diese Gebilde *Kegelschnitte*. Ich erkläre dies gerne mit Hilfe geometrischer Modelle, die unsere Schule besitzt (vgl. Wikipedia: Dandelinsche Kugel).

### 4.4.2 Zusammenfassung Kegelschnitte

| *Kurve* | *Gegeben* | *geometrischer Ort* | *Reflexionseigenschaft* |
|---|---|---|---|
| Parabel | Brennpunkt $B$, Leitlinie $\ell$ | $\{P \mid \overline{PB} = \overline{P\ell}\}$ | Senkrecht zur Leitlinie einfallende Strahlen werden zum Brennpunkt hin reflektiert. |
| Ellipse | Brennpunkte $B_1$, $B_2$, Abstandssumme $d > \overline{B_1B_2}$ | $\{P \mid \overline{PB_1} + \overline{PB_2} = d\}$ | Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen werden zum anderen Brennpunkt hin reflektiert. |
| Hyperbel | Brennpunkte $B_1$, $B_2$, Abstandunterschied $d < \overline{B_1B_2}$ | $\{P \mid \lvert\overline{PB_1} - \overline{PB_2}\rvert = d\}$ | Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen werden so reflektiert, als kämen sie vom anderen Brennpunkt. |

## 4.5 Winkelsätze an Geraden

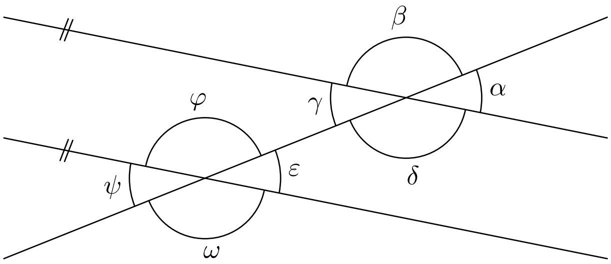
### 4.5.1 Scheitel- und Nebenwinkel




**Scheitelwinkel** sind ✎ gleich gross:
$\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$.

**Nebenwinkel** ergänzen sich zu ✎ 180°:
$\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°$.

### 4.5.2 Winkel an Parallelen




**Stufenwinkel** sind ✎ gleich gross:
$\alpha = \varepsilon$, $\beta = \varphi$, $\gamma = \psi$ und $\delta = \omega$.

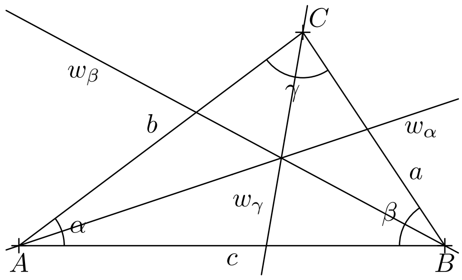
**Ergänzungswinkel** ergänzen sich zu ✎ 180°:
$\alpha + \varphi = \alpha + \omega = 180°$,
$\beta + \varepsilon = \beta + \psi = 180°$,
$\gamma + \varphi = \gamma + \omega = 180°$,
$\delta + \varepsilon = \delta + \psi = 180°$.

Den Scheitelwinkel eines Stufenwinkels nennt man auch **Wechselwinkel** (z.B. $\alpha = \psi$).

### 4.5.3 Bezeichnungen und Winkel in Dreiecken

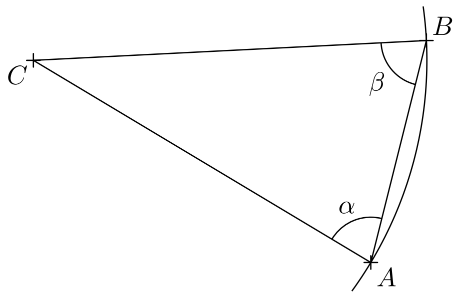
Für ein Dreieck ($\triangle ABC$) gelten folgende Notationen:

| | |
|---|---|
| $A$, $B$, $C$ | **Eckpunkte**, normalerweise im Gegenuhrzeigersinn. |
| $a$, $b$, $c$ | **Seiten**, gegenüber der entsprechenden Eckpunkten. |
| $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ | **Innenwinkel** an den entsprechenden Eckpunkten. |
| $w_\alpha$, $w_\beta$, $w_\gamma$ | **Winkelhalbierende** der entsprechenden Winkel. |
| $h_a$, $h_b$, $h_c$ | **Höhen** auf die entsprechenden Seiten. |
| $M_a$, $M_b$, $M_c$ | **Seitenmittelpunkte**. |
| $m_a$, $m_b$, $m_c$ | **Mittelsenkrechten** der entsprechenden Seiten. |
| $s_a$, $s_b$, $s_c$ | **Schwerlinien**. Z.B. $s_a = AM_a$ |



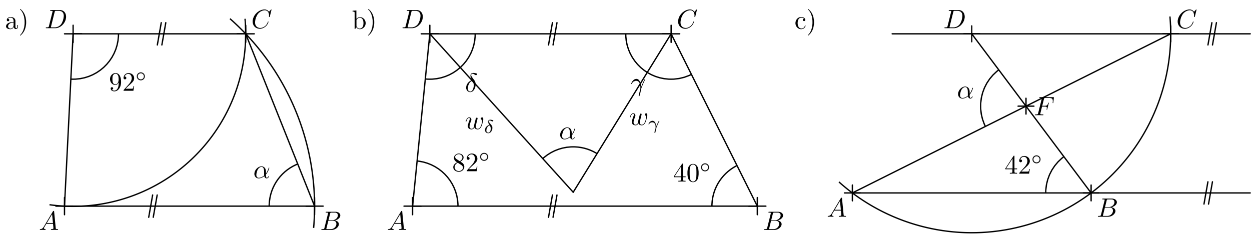

**Aufgabe 4.20**
Mit den Winkelsätzen an Parallelen beweisen Sie, dass die Innenwinkelsumme in einem Dreieck 180° ist.

**Gleichschenklige Dreiecke**
Ein Dreieck ist **gleichschenklig** wenn zwei Seiten gleich lang sind. Die gleich langen Seiten nennt man **Schenkel**, die dritte Seite heisst **Basis**. Die beiden Winkel zwischen Basis und Schenkeln sind gleich. Umgekehrt gilt auch: Wenn in einem Dreieck zwei Winkel gleich sind, so ist das Dreieck gleichschenklig.




**Gleichseitige Dreiecke**
Ein Dreieck heisst **gleichseitig**, wenn seine drei Seiten gleich lang sind. Dann sind auch alle Winkel gleich 60°. Umgekehrt gilt auch: Sind alle Winkel in einem Dreieck gleich gross (und dann wegen der Innenwinkelsumme jeweils 60°), so ist das Dreieck gleichseitig.

**Aufgabe 4.21** Wie gross ist der Winkel $\alpha$? *Hinweis: Die angegebenen Winkel stimmen teilweise nicht, damit Sie nachdenken, anstatt Winkel mit dem Geodreieck zu messen.*




**Aufgabe 4.22** Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden. Zeigen Sie, dass die beiden zugehörigen Winkelhalbierenden senkrecht aufeinander stehen.

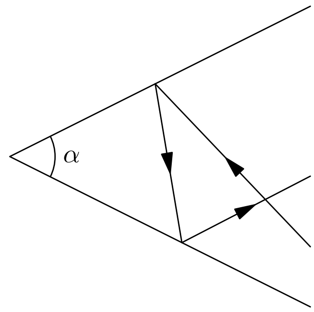
**Aufgabe 4.23** Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck mit $\alpha = \beta$. Finde in jedem der folgenden vier Fälle heraus, wie gross $\alpha$ ist.
a) $\gamma = 40°$ b) $\gamma = 3\alpha$ c) $\beta + \gamma = 140°$ d) $\alpha = \gamma$

**Aufgabe 4.24** Beweisen Sie: In jedem $\triangle ABC$ gilt $\sphericalangle(w_\alpha, w_\beta) = 90° - \frac{\gamma}{2}$.

**Aufgabe 4.25**
Ein Lichtstrahl wird an den beiden Schenkeln eines Winkels $\alpha$ reflektiert. Dabei gilt das Reflexionsgesetz aus der Physik:

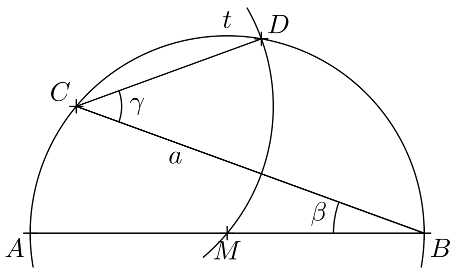
Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel.

Unter welchem Winkel $\delta$ schneiden sich der einfallende und der ausfallende Lichtstrahl? *Hinweis: Führen Sie die Hilfswinkel $\beta$ und $\gamma$ im Dreieck mit dem Winkel $\alpha$ ein.*



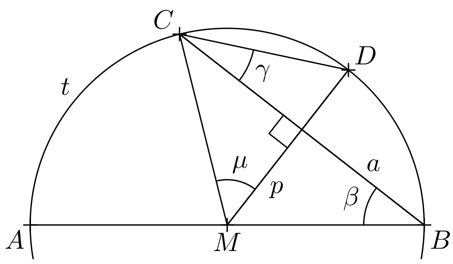

**Aufgabe 4.26**
Gegeben ist eine Strecke $[AB]$ und ein Winkel $\beta$ mit Scheitel $B$ und Schenkeln $AB$ und $a$. Es wird folgende Konstruktion ausgeführt:
1. $M_{AB}$ $\rightarrow M$
2. $k(M, \overline{MA})$ $\rightarrow t$
3. $a \cap t$ $\rightarrow C$
4. $k(C, \overline{CM}) \cap t$ $\rightarrow D$

a) Berechnen Sie $\gamma = \sphericalangle BCD$ in Abhängigkeit von $\beta$. Hinweis: Untersuchen Sie das Dreieck $\triangle MCD$.
b) Für welchen Winkel $\beta$ gilt $CD \parallel AB$? (Dies benötigt genaugenommen eine Art Umkehrung unserer Aussage zu Stufenwinkeln. Bitte mich fragen oder „Stufenwinkelsatz" auf Wikipedia anschauen.)




**Aufgabe 4.27**
Gegeben ist eine Strecke $[AB]$ und ein Winkel $\beta$ mit Scheitel $B$ und Schenkeln $AB$ und $a$. Es wird folgende Konstruktion ausgeführt:
1. $M_{AB}$ $\rightarrow M$
2. $k(M, \overline{MA})$ $\rightarrow t$
3. $a \cap t$ $\rightarrow C$
4. $\perp$ zu $a$ durch $M$ $\rightarrow p$
5. $p \cap t$ $\rightarrow D$

a) Berechnen Sie $\gamma = \sphericalangle BCD$ und $\mu = \sphericalangle CMD$ in Abhängigkeit von $\beta$.



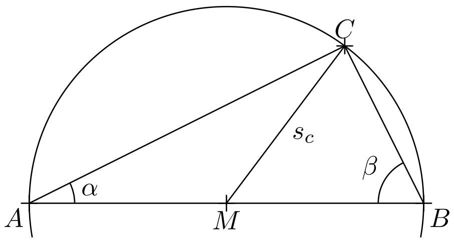
## 4.6 Kreiswinkelsätze

### 4.6.1 Thaleskreis

**Satz 1**

Liegt in einem Dreieck $ABC$ der Punkt $C$ auf dem Kreis mit Durchmesser $[AB]$, dann ist $\gamma = \sphericalangle BCA = 90°$ und umgekehrt.
Der Kreis $k(M_{AB}; \frac{1}{2}\overline{AB})$ mit Durchmesser $[AB]$ heisst **Thaleskreis**.

**Beweis:** $(C \in k(M_{AB}, \overline{AM_{AB}}) \Rightarrow \gamma = 90°)$

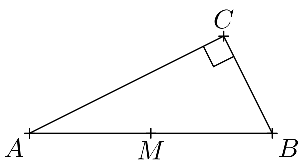



✎ $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$ und damit sind $\triangle AMC$ und $\triangle MBC$ gleichschenklig.
Also gilt: $\gamma = \alpha + \beta$.
Eingesetzt in $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ ergibt sich:

$$\gamma + \gamma = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 90°,$$

was zu beweisen war.

**Beweis:** $(\gamma = 90° \Rightarrow C \in k(M_{AB}, \overline{AM_{AB}}))$




✎ Man spiegelt $C$ an $M$ und erhält ein Rechteck ($\alpha + \beta = 90°$). Die Diagonalen in einem Rechteck halbieren sich und sind gleich lang, und damit gilt $\overline{AM} = \overline{MC} = \overline{MB}$, womit bewiesen ist, dass $C$ auf dem Kreis mit Durchmesser $[AB]$ liegt. Teilweise Alternativbeweis mit “falscher Zeichnung” erklärt („besser“, denn Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes geht analog.

**Merke**

Sind zwei beliebige Punkte $A$ und $B$ gegeben, so ist der zugehörige Thaleskreis der geometrische Ort aller Punkte $P$, von denen aus die Strecke $[AB]$ unter einem Winkel von 90° erscheint.

$$k\big(M_{AB}; \tfrac{1}{2}\overline{AB}\big) = \{P \mid \sphericalangle APB = 90°\}$$

**Merke**

Gegeben ist ein Punkt $B$ auf einem Kreis $k = k(Z, r)$. Die **Tangente** an $k$ im Punkt $B$ ist die Senkrechte zu $ZB$ durch $B$; in anderen Worten ist die Tangente diejenige Gerade, die $k$ im Punkt $B$ berührt (von lateinisch *tangere* ‚berühren‘).

⚒ **Aufgabe 4.28** Gegeben ist ein Kreis $k = k(Z, r)$ und ein Punkt $P$ ausserhalb von $k$. Konstruieren Sie die Tangenten an $k$ durch $P$.

⚙ **Aufgabe 4.29** Anschaulich: Eine Leiter lehnt fast senkrecht an einer Wand (= der $y$-Achse) und rutscht dann langsam ab, bis sie am Boden (= der $x$-Achse) liegt. Welche Kurve beschreibt der Mittelpunkt der Leiter?
Abstrakt: Wähle einen beliebigen Punkt $A$ auf der $x$-Achse ($A$ ist der Fusspunkt der Leiter) und (falls möglich) einen Punkt $B$ auf der $y$-Achse mit $\overline{AB} = 6$ (= Länge der Leiter) und markiere $M_{AB}$. Wenn $A$ variiert, was ist der geometrische Ort aller Punkte $M_{AB}$, die man auf diese Weise erhält? Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie diese.

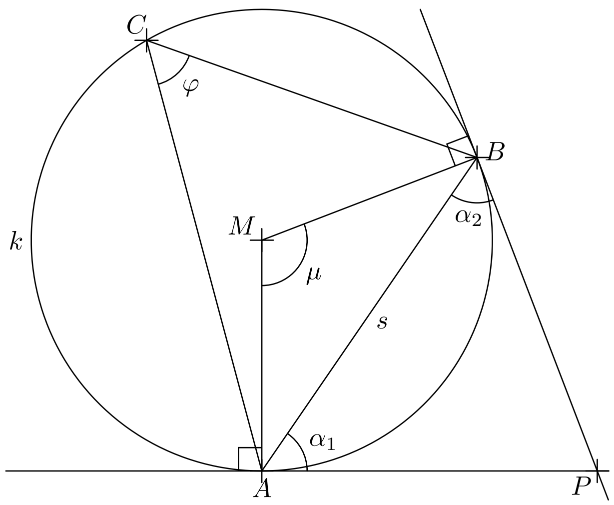
⚒ **Aufgabe 4.30** Gegeben sind zwei Kreise $k_1 = k(Z_1, r_1)$ und $k_2 = k(Z_2, r_2)$ mit $Z_1 = (-3, 1)$ und $r_1 = 3$ und $Z_2 = (4, -3)$ und $r_2 = 1.5$. Konstruieren Sie alle 4 Geraden, die beide Kreise berühren.

*Hinweis: Vergrössert oder verkleinert man die Radien beider Kreise um die gleiche Länge, verschieben sich gemeinsame Tangenten parallel. Vergrössern, bzw. verkleinern Sie einen Kreis so, dass der andere zum Punkt wird. Machen Sie erst eine Skizze, um die Situation zu verstehen.*

**Aufgabe 4.31** In einem allgemeinen Dreieck $\triangle ABC$ seien $H_a$ und $H_b$ die Höhenfusspunkte der Höhen $h_a$ und $h_b$ auf den (Verlängerungen der) Seiten $a$ bzw. $b$. Zeigen Sie, dass das Dreieck $\triangle M_{AB}H_aH_b$ gleichschenklig ist.

### 4.6.2 Sehnen-Winkel-Sätze

Wir starten mit einem Kreis $k$ mit Mittelpunkt $M$ wie dargestellt. Dann wählen wir zwei beliebige Punkte $A$ und $B$ auf dem Kreis.
Die Verbindungsstrecke $s = [AB]$ heisst ✎ Sehne des Kreises $k$.




Sie teilt den Kreis in zwei Kreisbögen.
Wir zeichnen die Tangente an $k$ in $A$ bzw. die Tangente an $k$ in $B$ und nennen den Winkel zwischen Sehne und Tangente $\alpha_1$ bzw. $\alpha_2$ (gemeint ist der kleinere der beiden möglichen Winkel). Diese Winkel heissen ✎ Sehne-Tangente-Winkel.

Wir zeichnen die Radien $[MA]$ und $[MB]$ ein. Der Winkel $\mu$ heisst ✎ Zentriwinkel oder Mittelpunktswinkel über der Sehne $s$.

Wir wählen einen beliebigen Punkt $C$ auf dem grösseren Kreisbogen über der Sehne und zeichnen $[AC]$ und $[BC]$ ein. Der Winkel $\varphi$ heisst ✎ Peripheriewinkel bei $C$ über der Sehne $s$.

Wir untersuchen nun den Zusammenhang zwischen den beiden Sehne-Tangente-Winkeln, dem Zentriwinkel und dem Peripheriewinkel (alle bezüglich einer fixierten Sehne).

Zuerst zu den Sehne-Tangente-Winkeln: ✎ Die Winkel $\sphericalangle PAM$ und $\sphericalangle MBP$ sind beide 90°. Also

$$\alpha_1 = 90^\circ - \sphericalangle BAM \quad \text{und} \quad \alpha_2 = 90^\circ - \sphericalangle MBA$$

Da das Dreieck $MAB$ gleichschenklig mit der Sehne als Basis ist, gilt $\sphericalangle BAM = \sphericalangle MBA$ und somit

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

Dies gilt natürlich auch, wenn die Sehne ein Durchmesser ist (also durch den Mittelpunkt des Kreises geht).

**Merke**

**Sehne-Tangente-Winkel-Satz:** ✎ Die beiden Sehne-Tangente-Winkel sind gleich gross (für jede fixierte, aber beliebige Sehne in jedem beliebigen Kreis):

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

**Aufgabe 4.32** Mit Hilfe der Skizze oben, beweisen Sie den folgenden Zentriwinkelsatz.

**Merke**

**Zentriwinkel-Satz:** Der Zentriwinkel über einer beliebigen Sehne ist doppelt so gross wie (jeder) der (beiden gleich grossen) Sehne-Tangente-Winkel:

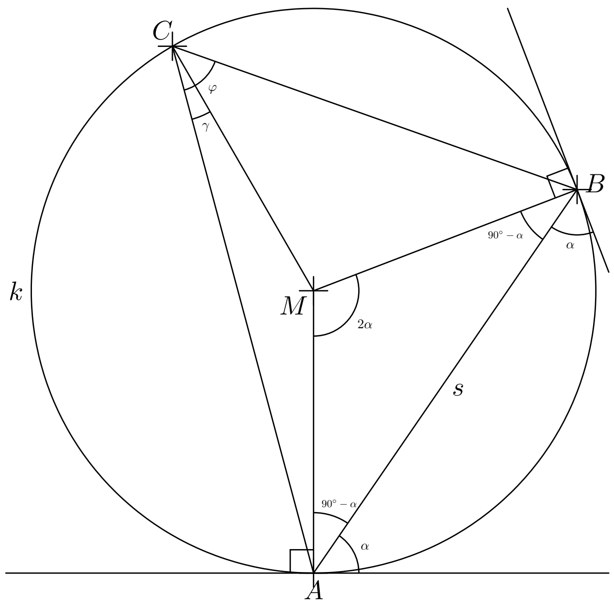
$$\mu = 2\alpha_1 = 2\alpha_2$$

✎ Innenwinkelsumme im Dreieck $ABM$:

$$\mu + (90° - \alpha_1) + (90° - \alpha_2) = 180°$$

Also $\mu = \alpha_1 + \alpha_2$ und wir wissen bereits, dass $\alpha_1 = \alpha_2$.

Nun zum Peripheriewinkel: Setze $\gamma := \sphericalangle ACM$ wie in der Skizze bereits eingetragen; die beiden gleich grossen Winkel, die zuvor $\alpha_1$ und $\alpha_2$ hiessen, sind nun durch $\alpha$ bezeichnet.




✎ Weil das Dreieck $AMC$ gleichschenklig über der Basis $AC$ ist, gilt $\sphericalangle MAC = \gamma$.
Weil das Dreieck $CMB$ gleichschenklig über der Basis $BC$ ist, gilt $\sphericalangle CBM = \sphericalangle MCB = \varphi - \gamma$ (letzte Gleichung klar).
Winkelsumme im Dreieck $ABC$ liefert

$$\begin{aligned} 180° &= \sphericalangle BAC + \sphericalangle CBA + \sphericalangle ACB \\ &= (\gamma + 90° - \alpha) + (90° - \alpha + \varphi - \gamma) + \varphi \\ &= 180° - 2\alpha + 2\varphi \end{aligned}$$

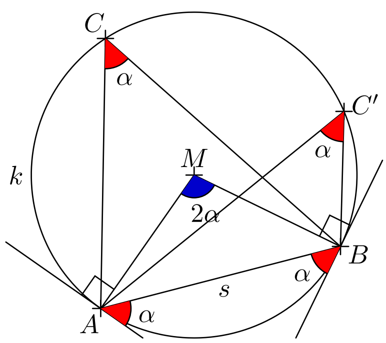
Also $\varphi = \alpha$.

Da der Punkt $C$ beliebig auf dem grösseren Kreisbogen über der Sehne $[AB]$ war (und man den Fall, dass $M$ nicht im Dreieck $ABC$ liegt, ähnlich behandeln kann), gilt:

**Merke**

**Peripheriewinkel-Satz:** Alle Peripheriewinkel auf dem grösseren Kreisbogen über einer beliebigen, fixierten Sehne sind gleich gross und genauer genauso gross wie die beiden Sehne-Tangente-Winkel:

$$\varphi = \alpha$$

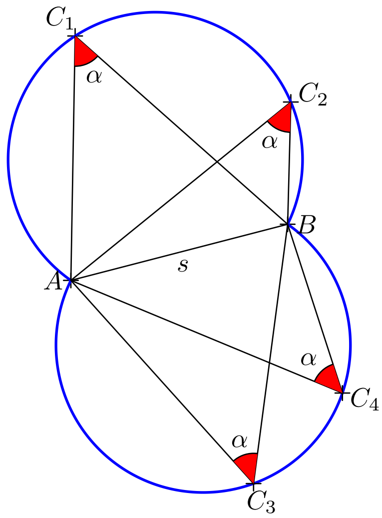



**Zusammenfassung der drei Sehne-Winkel-Sätze:** Gegeben ist der Kreis $k$ mit Mittelpunkt $M$ und einer Sehne $s$ zwischen zwei beliebigen Punkten $A$ und $B$.

- Alle roten Winkel sind gleich gross (Sehne-Tangente-Winkel-Satz und Peripheriwinkelsatz).
- Der blaue Winkel ist doppelt so gross wie jeder der roten (Zentriwinkel-Satz).

Beachte: Im Spezialfall, dass die Sehne $s$ ein Durchmesser ist, ist der blaue Zentriwinkel 180°und der Peripheriewinkelsatz ist der Satz über den Thaleskreis.

Die Peripheriewinkel auf dem kleineren Kreisbogen haben alle dieselbe Winkelweite $180^\circ - \alpha$. Als Merkhilfe: Dies ist die Hälfte der Weite $360^\circ - 2\alpha$ des „anderen“ Winkels bei $M$ (= derjenige Winkel, der dem blauen Winkel gegenüberliegt). Der Beweis geht ähnlich wie oben.

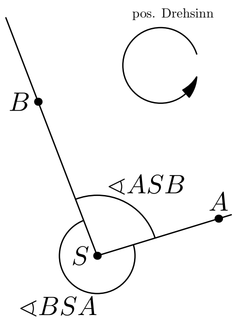



Spiegeln wir in der obigen Skizze den oberen Kreisbogen an der Sehne und färben ihn und sein Spiegelbild blau, so erhalten wir das Paar von blauen Kreisbögen in der Skizze rechts.
Die Sehne $s$ erscheint von allen blauen Punkten aus unter demselben Winkel $\alpha$: Alle roten Winkel sind gleich gross.

**Merke**

Der geometrische Ort aller Punkte $C$, die über einer vorgegebenen Strecke $s = [AB]$ einen vorgegebenen Winkel bilden, ist ein Paar von Kreisbögen, das sogenannte **Fasskreisbogenpaar** oder **Ortsbogenpaar** über $s$.

In unseren Herleitungen war dieser Winkel der Einfachheit halber stets $\leq 90^\circ$ ist, die Aussage gilt aber allgemein. Genau genommen müssen wir noch zeigen, dass dieser geometrische Ort nicht echt grösser als die blaue Menge ist. Dies folgt relativ einfach aus dem Peripheriewinkelsatz.




Nachtrag zu Winkeln: Die Schreibweise $\sphericalangle ASB$ meint den Winkel mit Scheitel $S$ und den Halbgeraden $[SA$ und $[SB$ als Schenkeln, den man erhält, wenn man den Strahl $[SA$ im **Gegenuhrzeigersinn** (= dem **mathematisch positiven Drehsinn**) dreht, bis man beim Strahl $[SB$ ankommt. Mit dieser Konvention gilt in unserer obigen Skizze (der Winkel $\alpha$ in Grad ist fixiert):

- Der obere Fasskreisbogen besteht genau aus denjenigen Punkten $C$ der Ebene mit $\sphericalangle ACB = \alpha$.
- Der untere Fasskreisbogen besteht genau aus denjenigen Punkten $C$ der Ebene mit $\sphericalangle BCA = \alpha$.

Als wir zuvor den Thaleskreis als geometrischen Ort geschrieben haben, haben wir diese Konvention noch nicht verwendet. Mit ihr ist $\{P \mid \sphericalangle APB = 90^\circ\}$ genaugenommen nur der „obere Thaleshalbkreis“; $\{P \mid \sphericalangle BPA = 90^\circ\}$ ist der „untere Thaleshalbkreis“.

**Aufgabe 4.33** Über einer gegebenen Strecke $[AB]$ konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal einen der beiden Ortsbögen/Fasskreisbögen für einen gegebenen Winkel $\gamma = 65^\circ$ (der Winkel darf abgemessen werden).

Gerne mag man sich mindestens drei verschiedene Lösungen überlegen!

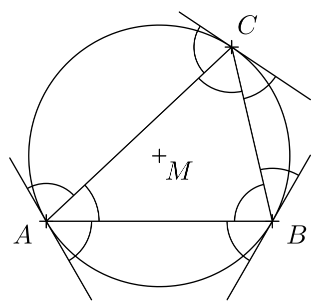
Freiwillige Bonusaufgabe (Winkelnavigation): Stellen Sie sich vor, Sie segeln auf dem Bodensee und messen mit ihrem Sextanten den Winkel $\alpha$, unter dem Arbon und Romanshorn erscheinen, und den Winkel $\beta$, unter dem Rorschach und Steinach erscheinen. Können Sie auf ihrer Seekarte die Position Ihres Segelboots bestimmen? - Bis auf das Abtragen der Winkel ist nach einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal gefragt.

**Aufgabe 4.34** Wenn von einem Dreieck $ABC$ die folgenden Daten bekannt sind, konstruieren sie jeweils das Dreieck oder die Dreiecke (Einheit jeweils 2 Häuschen oder 1cm):

a) $c = 5$, $\gamma = 60^\circ$, $h_c = 4$.
b) $c = 5$, $\gamma = 60^\circ$, $\delta = \sphericalangle ACM_{AB} = 40^\circ$.
c$^\star$) $c = 5$, $h_a = 3$, $\gamma = 70^\circ$

**Aufgabe 4.35**

Gegeben ist ein Dreieck $ABC$ samt Umkreis mit Umkreismittelpunkt im Inneren und Tangenten an den Umkreis in den Eckpunkten wie in der Skizze angedeutet. Welche der neun markierten Winkel sind gleich gross? Markiere gleich grosse Winkel mit derselben Farbe.



## 4.7 Aufgaben zum Ortsbogen

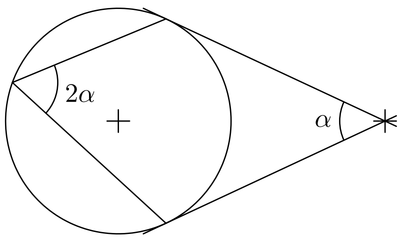
**Aufgabe 4.36** Gegeben sind zwei unterschiedlich grosse Kreise $k_1$ und $k_2$, die sich in einem Punkt $B$ von aussen berühren. Durch den Punkt $B$ wird eine Gerade $g$ gelegt, die keine Tangente an die Kreise ist. Die Gerade $g$ schneidet den Kreis $k_1$ bzw. $k_2$ in einem weiteren Punkt $T_1$ bzw. $T_2$. Sei $t_1$ bzw. $t_2$ die Tangente an $k_1$ bzw. $k_2$ im Punkt $T_1$ bzw. $T_2$.

a) Machen Sie eine saubere Skizze der Situation.

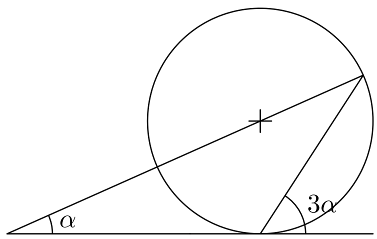
b) Beweisen Sie, dass $t_1 \parallel t_2$.

**Aufgabe 4.37** Berechnen Sie den Winkel $\alpha$:

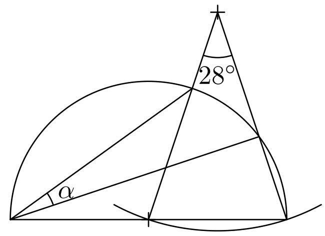
a)




b)




c)




**Aufgabe 4.38** Gegeben sind zwei unterschiedlich grosse Kreise $k_1$ und $k_2$, die sich in zwei Punkten $A$ und $B$ schneiden. Weiter ist eine beliebige Gerade $g$ durch $A$ gegeben, die jeden der beiden Kreise in einem weiteren Punkt schneidet. Sei $C$ der „neue“ Schnittpunkt von $g$ und $k_1$ und sei $D$ der „neue“ Schnittpunkt von $g$ und $k_2$.

a) Machen Sie eine saubere Skizze der Situation.

b) Beweisen Sie, dass der Winkel $\sphericalangle CBD$ immer gleich gross ist, egal wie $g$ durch $A$ gelegt wird.

**Aufgabe 4.39** Diese Aufabe kann mit GeoGebra gelöst werden.

Gegeben sind ein Kreis $k$ und vier beliebige Punkte $A, B, C, D \in k$, so dass sich die Sehnen $[AB]$ und $[CD]$ nicht schneiden.

*Hinweis: Die Sehne $[CD]$ soll mit gleichbleibender Länge auf dem Kreis wandern können. Definieren Sie darum in GeoGebra die Sehne $[CD]$ mit Hilfe eines Kreises mit Mittelpunkt $C$ auf $k$ und gegebenem Radius. Der Punkt $D$ ist dann ein Schnittpunkt der beiden Kreise.*

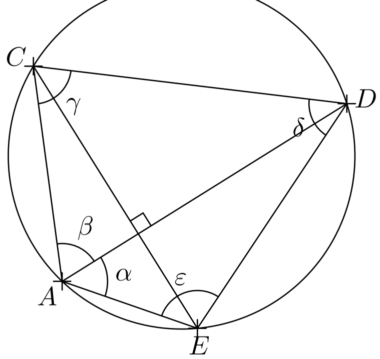
Sei $X$ der Diagonalenschnittpunk des Vierecks, geformt durch die vier Punkte $A, B, C, D$.

Wenn die Sehne $[CD]$, ohne ihre Länge zu ändern, auf $k$ wandert, wo liegen dann alle Punkte $X$? Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie diese.

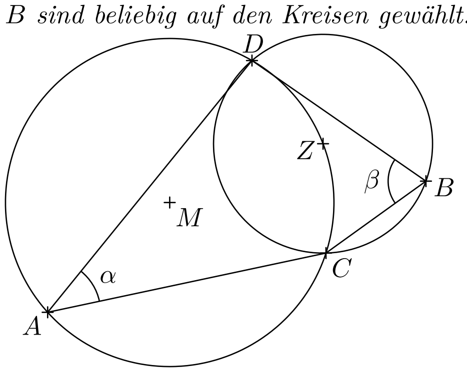
**Aufgabe 4.40** Gegeben ist ein allgemeines Dreieck $\triangle ABC$. Im Punkt $A$ wird die Tangente $t$ an den Umkreis gelegt. Berechnen Sie den Winkel $\delta = \sphericalangle(t, a)$, wenn $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ gegeben sind. Machen Sie eine saubere Skizze der Situation. *Hinweis: Das Resultat ist eine Formel für $\delta$ in Abhängigkeit von den Winkeln $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$.*

**Aufgabe 4.41**

a) Berechnen Sie die Winkel $\gamma$, $\delta$ und $\varepsilon$ aus $\alpha$ und $\beta$:




b) Wie hängen $\alpha$ und $\beta$ zusammen? *Hinweis: $A$ und $B$ sind beliebig auf den Kreisen gewählt.*




**Aufgabe 4.42** Beweisen Sie, dass in jedem beliebigen $\triangle ABC$ $w_\gamma \cap m_{AB} \in u$ gilt, wobei $u$ der Umkreis des Dreiecks ist.

### 4.8 Repetitionsaufgaben

**Aufgabe 4.43** Von einer Ellipse kennt man den einen Brennpunkt $B_1 = (2, 0)$ und zwei Punkte $P_1 = (0, 2)$ und $P_2 = (-1, 1)$ auf der Ellipse.

a) Gegeben ist die Abstandssumme $d = 5$. Konstruieren Sie den (die) zweiten Brennpunkt(e) und skizzieren Sie die Ellipse(n).
b*) Wenn die Abstandssumme nicht gegeben ist, beschreiben Sie den geometrischen Ort aller zweiten Brennpunkte $B_2$.

**Aufgabe 4.44** Gegeben sind zwei Kreise $k_1$ und $k_2$ mit Zentren $Z_1$ und $Z_2$ und unterschiedlichen Radien $r_1$ und $r_2$.

a) Beschreiben Sie, wie man die Kreiszentren $Z_3$ eines Kreises $k_3$ mit gegebenem Radius $r_3$ konstruiert, so dass $k_3$ beide Kreise $k_1$ und $k_2$ berührt.. Wie viele Lösungen kann es maximal geben? Kann es gar keine Lösungen geben?

In den beiden restlichen Teilaufgaben nehmen wir an, dass $\overline{Z_1 Z_2} > r_1 + r_2$ gilt (und somit $k_1 \cap k_2 = \varnothing$).
b) Beschreiben Sie, wie man den Kreis mit kleinstmöglichem Radius konstruiert, der beide Kreise $k_1$ und $k_2$ berührt.

c) Was ist der geometrische Ort aller Kreiszentren der Kreise, die beide gegebenen Kreise von aussen berühren?

**Aufgabe 4.45** Von einer Parabel kennt man zwei Punkte auf der Parabel $P_1 = (-4, 0)$ und $P_2 = (4, 2)$ sowie den Brennpunkt $B = (-1, -3)$. Konstruieren Sie alle möglichen Leitlinien und die entsprechenden Scheitelpunkte der Parablen (Punkte, die am nächsten an der Leitlinie sind) und skizzieren Sie die entsprechenden Parabeln.

**Aufgabe 4.46** Zeigen Sie, dass sich eine Ellipse und eine Hyperbel mit gemeinsamen Brennpunkten senkrecht schneiden. Verwenden Sie dazu die Reflexionseigenschaften der beiden Kurven. *Hinweis: Der Schnittwinkel zweier Kurven bei einem Schnittpunkt ist per Definition der (kleinere der beiden) Winkel zwischen den beiden Tangenten im Schnittpunkt.*

**Aufgabe 4.47** Physikalische Beobachtung: Ein Lichtstrahl $g$ wird von einer Kurve $k$ so reflektiert, als ob der Lichtstrahl von der Tangente im Schnittpunkt $g \cap k$ reflektiert würde.

Gegeben ist ein Kreis um $Z = (1, -2)$ mir Radius $r = 4$ und die Punkte $A = (-6, 4)$ und $B = (-4, 3)$. Konstruieren Sie die Reflexion am Kreis des von $A$ durch $B$ gehenden Lichtstrahls.

**Aufgabe 4.48** Gegeben sind zwei Kreise $k_1$ und $k_2$, die sich nicht schneiden und nicht ineinander liegen. Es gibt also zwei äussere gemeinsame Tangenten $t_1$ und $t_2$ und zwei innere gemeinsame Tangenten $t_3$ und $t_4$. Jede innere Tangente schneidet jede äussere Tangente; dies ergibt vier Schnittpunkte. Zeigen Sie, dass diese vier Schnittpunkte auf einem Thaleskreis über der Strecke $[Z_1 Z_2]$ liegen.

Machen Sie dazu eine gute Skizze mit Zirkel und Lineal, die gemeinsamen Tangenten brauchen aber nicht konstruiert zu werden.

**Aufgabe 4.49** Zeichnen Sie ein spitzwinkliges Dreieck $ABC$ und konstruieren Sie einen Halbkreis mit Mittelpunkt auf der Seite $c$ so, dass die Seiten $a$ und $b$ Tangenten des Halbkreises sind.

**Aufgabe 4.50** Gegeben sind jeweils zwei Objekte:

a) zwei sich schneidende Geraden $g$ und $h$ mit $\sphericalangle(g, h) = 60°$;
b) zwei sich schneidende Kreise $k_1 = k(M_1, r_1 = 3)$ und $k_2 = k(M_2, r_2 = 2.5)$ mit $\overline{M_1 M_2} = 4$;
c) eine Gerade $g$ und ein Kreis $k = k(M, r = 3)$ mit $\overline{Mg} = 1$.
Konstruieren Sie jeweils alle Kreise mit Radius 1, die beide Objekte berühren. Wie gross ist jeweils die Anzahl der Lösungen?

## 4.9 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

🛠 Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

⚙ Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

🔭 Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

**🛠 Lösung zu Aufgabe 4.2** ex-kb-abstand-p-g

**Gegeben:** Gerade $g$, Punkt $P$ (mit $P \notin g$).

1. Wähle $r > \overline{Pg}$ $\rightarrow r$
2. $k(P, r)$ $\rightarrow k$
3. $k \cap g$ $\rightarrow A,\ B$
4. $M_{AB}$ $\rightarrow Q$
5. $\overline{PQ}$ $\rightarrow \overline{Pg}$

**🛠 Lösung zu Aufgabe 4.3** ex-kb-strecke-abtragen

**Gegeben:** Strecke $[AB]$, Gerade $g$ mit Punkt $P \in g$.

1. $\overline{AB}$ $\rightarrow r$
2. $k(P, r)$ $\rightarrow k$
3. $k \cap g$ $\rightarrow C,\ D$

**🛠 Lösung zu Aufgabe 4.4** ex-kb-gleichseitiges-dreieck

**Gegeben:** Länge $s = 5$ cm.

1. Punkt $A$ wählen $\rightarrow A$
2. Gerade $c$ durch $A$ wählen $\rightarrow c$
3. $s$ von $A$ auf $g$ abtragen $\rightarrow B_1,\ B_2$
4. $k(A, s)$ $\rightarrow k_1$
5. $k(B_1, s)$ $\rightarrow k_2$
6. $k_1 \cap k_2$ $\rightarrow C_1,\ C_2$

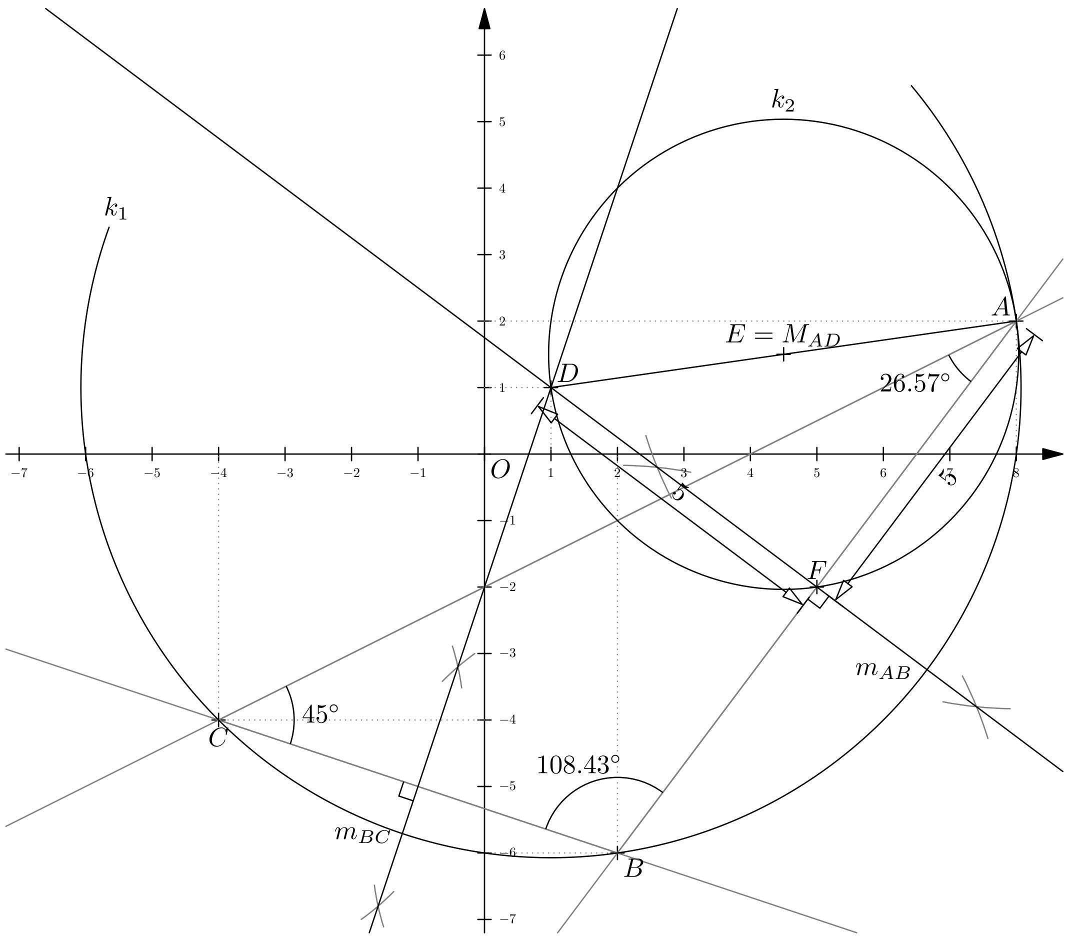
Lösung: $\Delta AB_1C_1$.

**🛠 Lösung zu Aufgabe 4.6** ex-kb-penta-aus-seite

**Gegeben:** Punkte $A$, $B$.

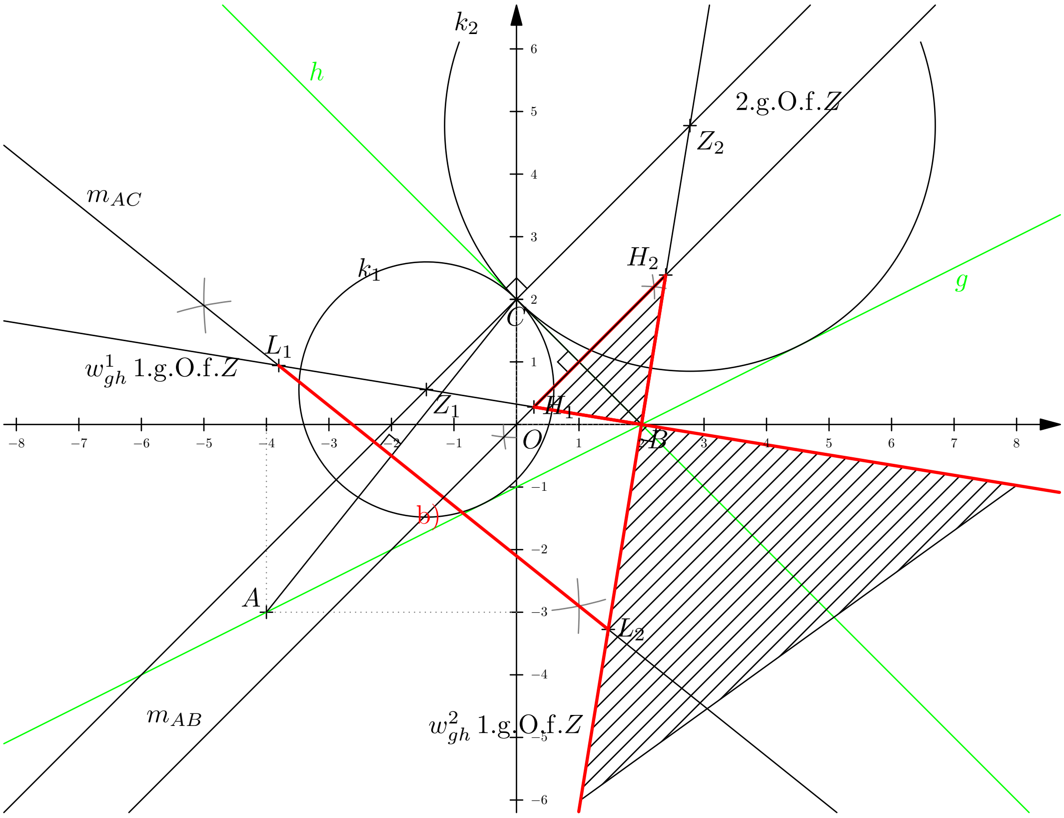
1. Senkrechte zu $AB$ durch $A$ $\rightarrow h$
2. $k(A, \overline{AB})$ $\rightarrow k_1$
3. $k_1 \cap h$ $\rightarrow H$
4. $k(M_{AB}, \overline{M_{AB}H}) \cap AB$ $\rightarrow J$
5. $k(B, \overline{BJ})$ $\rightarrow k_2$
6. $k_1 \cap k_2$ $\rightarrow E$
7. $m_{AB} \cap k_2$ $\rightarrow D$
8. $k(D, \overline{DE}) \cap k(B, \overline{AB})$ $\rightarrow C$

**Lösung zu Aufgabe 4.7** ex-koordinaten-system-einfuehrung




c) $D = (1, 1)$ (sogar exakt).
d) 10 Einheiten (bei 8mm Einheit: 80mm/8mm = 10)
e) $A, B, C \in k_1$, weil $D$ ist der Umkreismittelpunkt vom $\triangle ABC$. Weil $D \in m_{AB}$ gilt $\overline{DA} = \overline{DB}$, und weil $D \in m_{BC}$ gilt $\overline{DB} = \overline{DC}$, und damit ist $D$ gleich weit von $A, B, C$ entfernt.
g) $\alpha \approx 26.57°$, $\beta \approx 108.43°$, $\gamma = 45°$. So genau messen kann man die Winkel natürlich nicht, die Summe kann daher etwas kleiner oder grösser als die eigentlich exakten 180° sein.
i) Ja, weil $\sphericalangle DFA = 90°$ über dem Kreisdurchmesser $[DA]$ steht. Damit ist $k_2$ ein Thaleskreis auf dem alle rechten Winkel mit Schenkeln durch $A, D$ liegen.
j) In dieser speziellen Situation ja. Würde man den Punkt $C$ weiter auf $BC$ verschieben, würde sich $[DF]$ ändern, aber $[AF]$ nicht.

**Lösung zu Aufgabe 4.8** ex-geometrische-oerter3



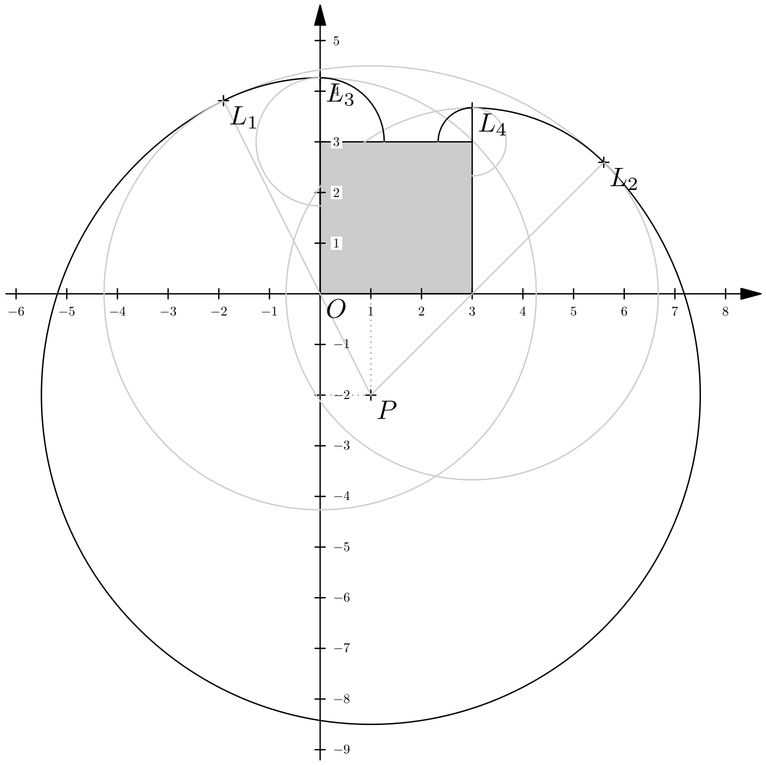

a) Für das Kreiszentrum $Z$ gilt: $\overline{Zg} = \overline{Zh}$ (Kreis berührt die Geraden) und $ZC \perp h$ (berührt $h$ in $C$). Das ergibt 2 geometrische Örter für $Z$.

b) Der erste geometrische Ort ist $m_{AC}$. Der zweite geometrische Ort ist die ganze Fläche zwischen $w_{gh}^1$ und $w_{gh}^2$ in der $g$ enthalten ist. Deren Schnitt ergibt eine Strecke.

c) Der erste geometrische Ort ist die *Halbebene*, die $B$ enthält und durch die Gerade $m_{BC}$, begrenzt ist. Der zweite geometrische Ort ist die ganze Fläche zwischen $w_{gh}^1$ und $w_{gh}^2$ in der $h$ enthalten ist. Deren Schnitt ergibt eine Fläche.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $w_{gh}^1$, $w_{gh}^2$ | $\to$ 1.g.O.f.$Z$ |
| 2. | $\perp$ zu $h$ durch $C$ | $\to$ 2.g.O.f.$Z$, $Z_1$, $Z_2$ |
| 3. | $k(Z_1, \overline{Z_1, C})$, $k(Z_2, \overline{Z_2, C})$ | $\to$ 2 Lösungen zu a) |
| 4. | $m_{AC} \cap w_{gh}^1$, $m_{AC} \cap w_{gh}^2$ | $\to$ $[L_1, L_2]$, Lösung zu b) |
| 5. | $m_{BC} \cap w_{gh}^1$, $m_{BC} \cap w_{gh}^2$ | $\to$ $H_1, H_2$ |
| 6. | Schraffierte Fläche | $\to$ Lösung zu c) |

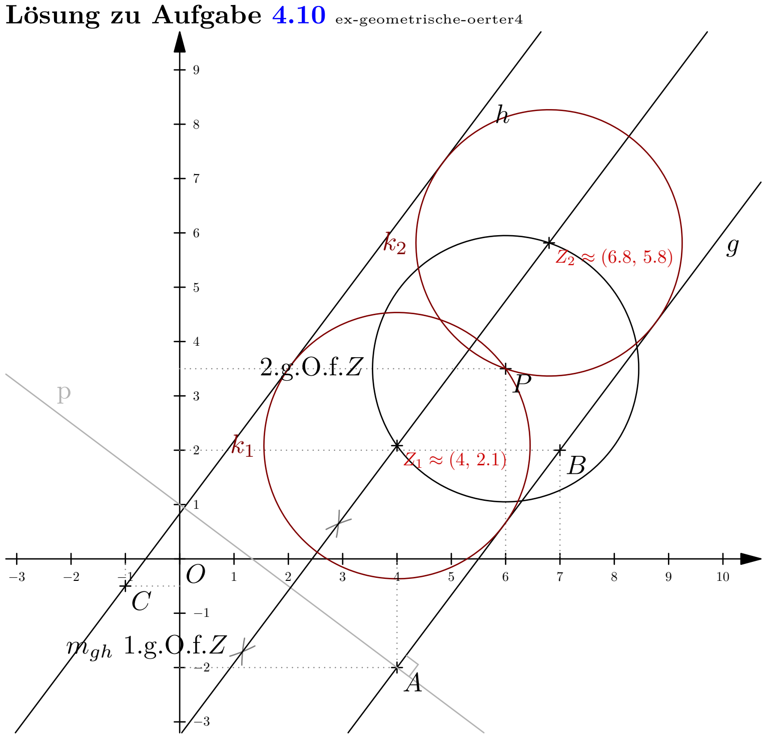
**Lösung zu Aufgabe 4.9** ex-geometrische-oerter-ziege-ums-haus




Die Eckpunkte des Hauses werden vom Nullpunkt aus im Gegenuhrzeigersinn mit $H_1$, $H_2$, $H_3$ und $H_4$ bezeichnet.

1. $k(P, 6.5)$ $\rightarrow k_1$
2. $k_1 \cap PH_1$ und $k_1 \cap PH_2$ $\rightarrow L_1$ und $L_2$
3. $k(H_0, \overline{H_1L_1})$ und $k(H_1, \overline{H_1L_2})$ $\rightarrow k_2$ und $k_3$
4. $k_2 \cap H_1H_4$ und $k_3 \cap H_2H_3$ $\rightarrow L_3$ und $L_4$

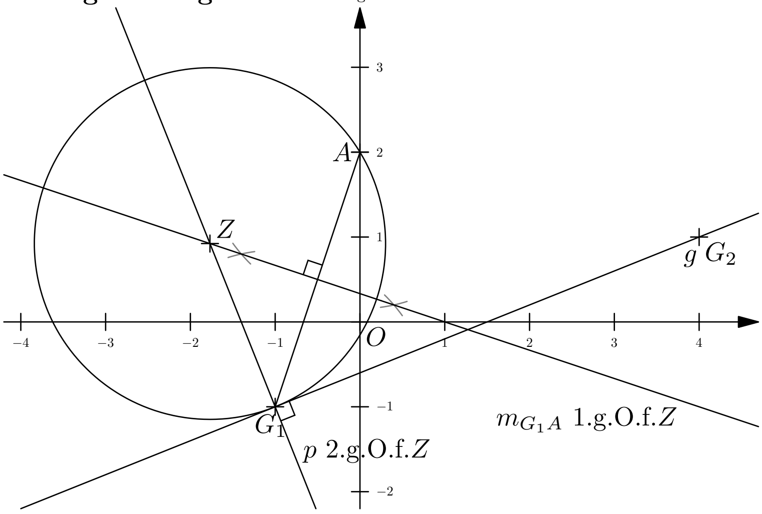
**Lösung zu Aufgabe 4.10** ex-geometrische-oerter4




Es wird zuerst das Kreiszentrum $Z$ konstruiert. Es gilt $\overline{Zg} = \overline{Zh}$. Der Kreisradius muss $\frac{1}{2}\overline{gh}$ sein, und damit $\overline{ZP} = \frac{1}{2}\overline{gh}$.

1. Mittelparallele $m_{gh}$ $\rightarrow$ 1.g.O.f.$Z$
2. $k = k(P, \frac{1}{2}\overline{gh})$ $\rightarrow$ 2.g.O.f.$Z$
3. $m_{gh} \cap k$ $\rightarrow$ $Z_1, Z_2$
4. $k(Z_1, \frac{1}{2}\overline{gh})$, $k(Z_2, \frac{1}{2}\overline{gh})$ $\rightarrow$ 2 Lösungen

**Lösung zu Aufgabe 4.11** ex-geometrische-oerter1

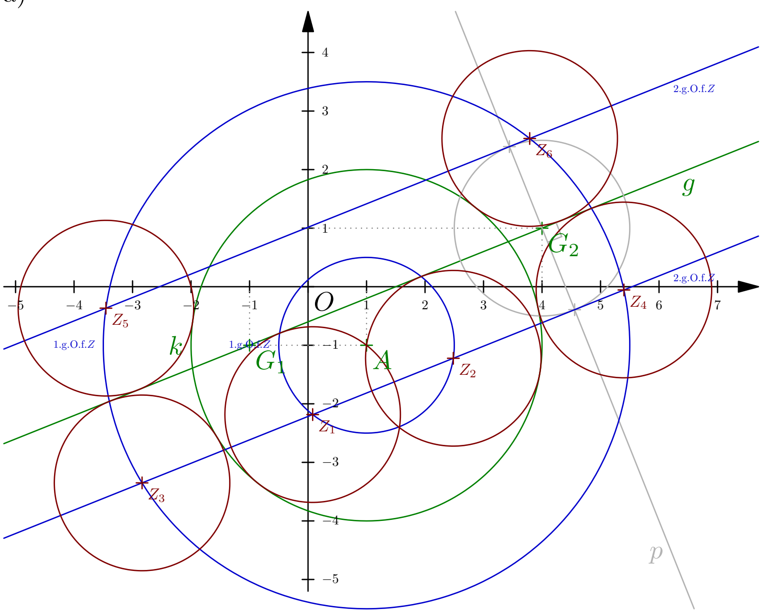



Man konstruiert zuerst das gesuchte Kreiszentrum $Z$, das folgende Bedingungen erfüllen muss: $\overline{ZA} = \overline{ZG_1}$ und $\overline{Zg} = \overline{ZG_1}$, bzw. $ZG_1 \perp g$ (damit der gesuchte Kreis die Gerade $g$ im Punkt $G_1$ berührt).

1. $m_{G_1A}$ $\rightarrow$ 1.g.O.f.$Z$
2. $\perp$ zu $g$ durch $G_1$ $\rightarrow$ 2.g.O.f.$Z$
3. $k(Z, \overline{ZG_1})$ $\rightarrow$ 1 Lösung

**Lösung zu Aufgabe 4.12** ex-geometrische-oerter2

a)




Man konstruiert das gesuchte Kreiszentrum $Z$:

1. $k_1 = k(M, r_1 - r_2)$ und $k_2 = k(M, r_1 + r_2)$ $\rightarrow$ 1.g.O.f.$Z$
2. Parallelenpaar $p_1$, $p_2$ zu $g$ im Abstand $r_2$ $\rightarrow$ 2.g.O.f.$Z$
3. $(k_1 \cup k_2) \cap (p_1 \cup p_2)$ $\rightarrow$ 6 Lösungen.

b$^\star$) Es kann zwischen 0 und 8 Lösungen geben.

**0 Lösungen** wenn $\overline{kg} > 2r$, wobei $\overline{kg} = \overline{Mg} - r_1$.

**1 Lösung** wenn $\overline{kg} = 2r$.

**2 Lösungen** wenn $\overline{kg} < 2r$ und $g \cap k = \varnothing$.

**3 Lösungen** wenn $g$ Tangente an $k$ und $r_2 > r_1$.

**4 Lösungen** wenn $g$ Tangente an $k$ ist und $r_2 \leq r_1$, oder wenn $\overline{Mg} < r_1$ und $r_2 > r_1$.

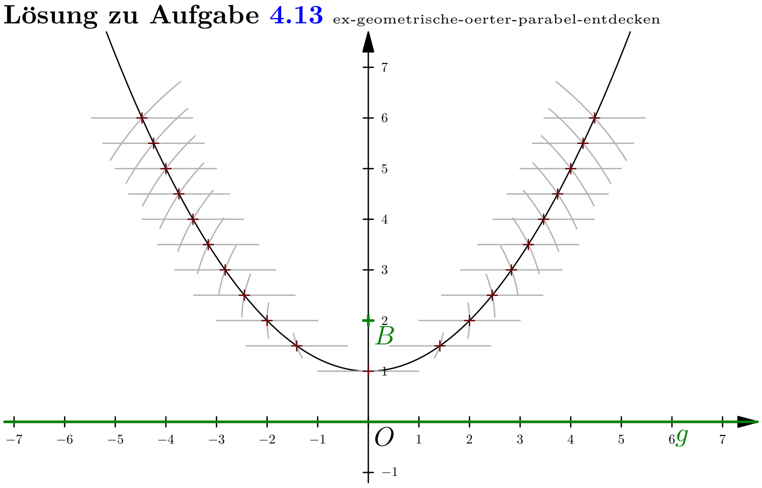
**5 Lösungen** wenn $\overline{Mg} = r_1 - r_2$ (und damit $r_1 > r_2$).

**7 Lösungen** wenn $r_2 < 2r_1$ und $\overline{gM} + r_2 = r_1$.

**8 Lösungen** wenn $r_2 < 2r_1$ und $\overline{gM} + r_2 < r_1$.

**6 Lösungen** sonst.

**Lösung zu Aufgabe 4.13** ex-geometrische-oerter-parabel-entdecken

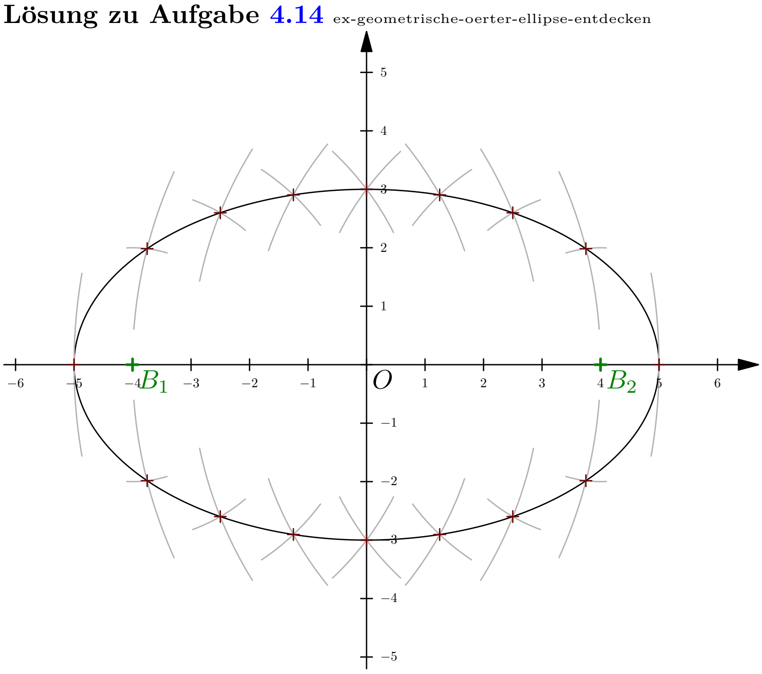



Für alle halbzahligen $d$ wird folgende Konstruktion durchgeführt:

1. Parallele zu $g$ im Abstand $d$ $\rightarrow p$
2. $k(B, d) \cap p$ $\rightarrow P_1$, $P_2$ (ausser für $d = 1$ nur ein Punkt

Die entstehende Kurve (eine Parabel) ist rund und hat nirgends einen Knick!

**Lösung zu Aufgabe 4.14** ex-geometrische-oerter-ellipse-entdecken



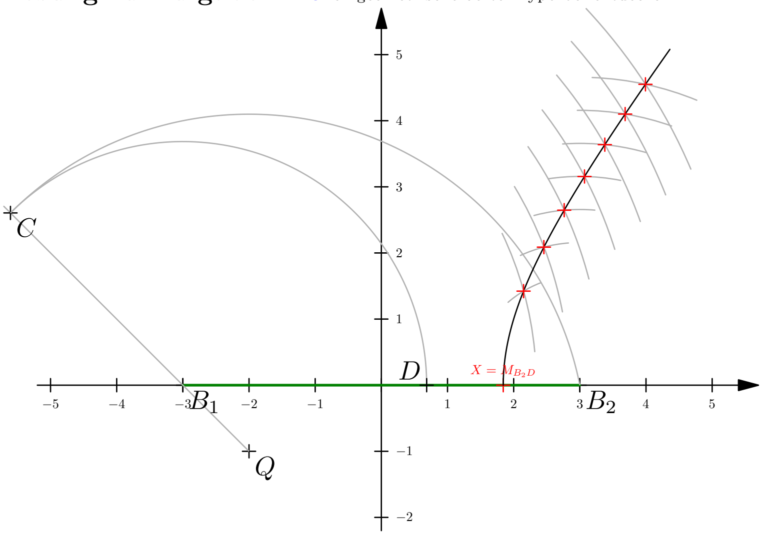

Für alle ganzzahligen $d$ von 1 bis 9 wird folgende Konstruktion durchgeführt:

1. $k(B_1, d) \cap k(B_2, 10 - d)$ $\rightarrow$ 2 Punkte (ausser für $d = 1$ und $d = 9$)

Die entstehende Kurve (eine Ellipse) ist rund und hat nirgends einen Knick!

Schlägt man bei $B_1$ und $B_2$ zwei Nägel ein und legt eine Fadenschlaufe der Länge $10 + \overline{B_1B_2} = 10 + 8 = 18$ um die Nägel, kann mit einem Stift, der die Schlaufe spannt, die Ellipse gezeichnet werden.

**Lösung zu Aufgabe 4.15** ex-geometrische-oerter-hyperbel-entdecken




Zuerst wird der Punkt $D$ auf $[B_1B_2]$ konstruiert, der via $B_1$ gleich weit von $Q$ entfernt ist, wie der Punkt $B_2$. Der Mittelpunkt von $D$ und $B_2$ ist dann $X$:

1. $k(Q, \overline{QB_2}) \cap [QB_1 \quad \to C$
2. $k(B_1, \overline{B_1C}) \cap [B_1B_2] \quad \to D$
3. $M_{B_2D} \quad \to X$

Für alle halbzahligen $d$ von 0.5 bis 4 wird folgende Konstruktion durchgeführt:

1. $k(B_1, d + \overline{B_1X}) \cap k(B_2, d + \overline{B_2X}) \quad \to$ 1 Punkt oberhalb $B_1B_2$

Die entstehende Kurve (ein halber Hyperbelast) ist rund und hat nirgends einen Knick! Die Tangente an die Hyperbel in $X$ ist vertikal, also senkrecht zur Mauer.

Man beachte, dass für alle Punkte $P$ auf der Hyperbel folgendes gilt: $\overline{PB_1} - \overline{PB_2} = \overline{XB_1} - \overline{XB_2}$ (denn beide Ausdrücke stimmen mit $\overline{QB_2} - \overline{QB_1}$ überein).

**Lösung zu Aufgabe 4.16** ex-geometrische-oerter-ellipse1

Damit überhaupt ein Dreieck gezeichnet werden kann muss $\ell \geq 2\overline{AB}$ sein. Ansonsten ist der geometrische Ort die leere Menge $\varnothing$.

Es gilt also $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \ell$, bzw. $\overline{AC} + \overline{BC} = \ell - \overline{AB}$ und damit ist der geometrische Ort aller Punkte $C$ eine Ellipse mit Brennpunkten $A$ und $B$ und Abstandssumme $\ell - \overline{AB}$.

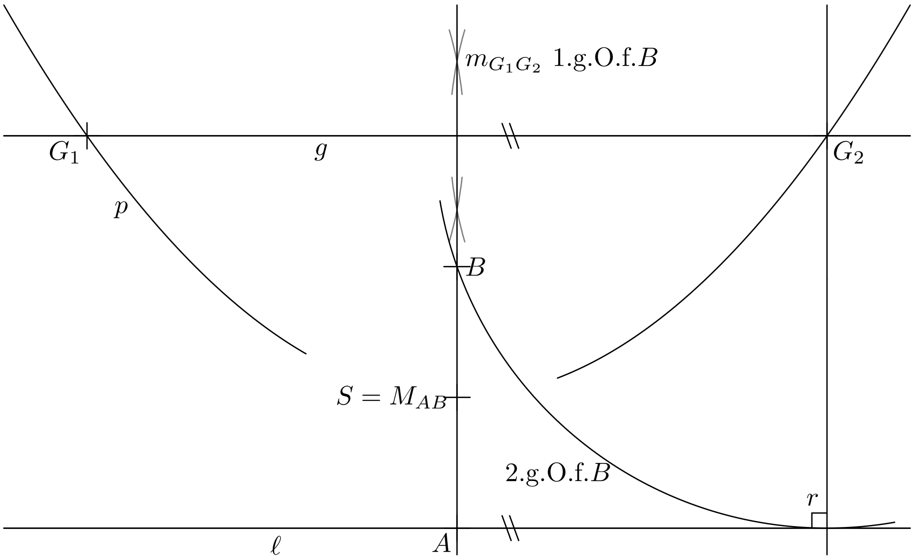
**Lösung zu Aufgabe 4.17** ex-geometrische-oerter-parabel1

a) Da $g$ Tangente an die Kreise ist und der Berührungspunkt $P$ auf $g$ ist, ist der geometrische Ort die Rechtwinklige zu $g$ durch $P$.

b) Für die Kreiszentren $Z$ gilt: $\overline{ZP} = \overline{Zg}$. Damit ist der gesuchte geometrische Ort eine Parabel mit Brennpunkt $P$ und Leitlinie $g$.

**Lösung zu Aufgabe 4.18** ex-geometrische-oerter-parabel2

Zuerst wird die Symmetrieachse $a$ der Parablel konstruiert. Es gilt: $B \in a$. Danach wird ein Punkt $Q \in p$ gewählt und die Bedingung $\overline{Q\ell} = \overline{QB}$ genutzt.




1. Wähle $G_1$ auf $p$ $\rightarrow G_1$
2. Parallele zu $\ell$ durch $G_1$ $\rightarrow g$
3. $g \cap p$ $\rightarrow G_2$
4. $m_{G_1G_2}$ $\rightarrow$ 1.g.O.f.$B$
5. $k(G_2, \overline{G_2\ell})$ $\rightarrow$ 2.g.O.f.$B$
6. $m_{G_1G_2} \cap \ell$ $\rightarrow A$
7. $M_{AB}$ $\rightarrow$ Scheitel $S$

**Lösung zu Aufgabe 4.19** ex-geometrische-oerter-ellipse2
Seien $A$, $B$ die Schnittpunkte $e \cap g$, und $C$, $D$ die Schnittpunkte $e \cap h$ und $M = g \cap h$.
Seien $B_1$ und $B_2$ die unbekannten Brennpunkte auf $g$, symmetrisch zu $M = g \cap h$, d.h.

$$\overline{AB_1} = \overline{BB_2}.$$

Für jeden Punkt $P \in e$ gilt:

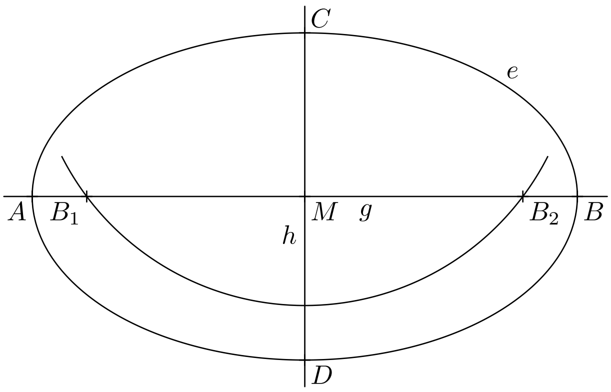
$$\overline{B_1P} + \overline{B_2P} = s \quad \text{(konstante Abstandssumme)}$$

Insbesondere gilt dies für den Punkt $A$, also

$$s = \overline{AB_1} + \overline{AB_2} = \overline{AB_1} + \overline{AB_1} + \overline{B_1B_2} = \overline{AB_1} + \overline{B_2B} + \overline{B_1B_2} = \overline{AB}$$

Damit ist die Abstandssumme $s$ bekannt. Aus Symmetriegründen gilt $\overline{CB_1} = \overline{CB_2}$ und damit $\overline{CB_1} = \frac{1}{2}s = \overline{AM}$.
Damit ist die Konstruktionsbeschreibung wie folgt:

1. $k(C, \overline{MA}) \cap g$ $\rightarrow B_1$, $B_2$




**Lösung zu Aufgabe 4.21** ex-winkelsaetze-geraden1
a)

$\sphericalangle DAB = 88°$ (Ergänzungswinkel an Parallelen).
$\triangle ACD$ ist gleichschenklig damit ist $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ACD = (180° - \sphericalangle CDA)/2 = (180° - 92°)/2 = 44°$.
Damit ist $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DAB - \sphericalangle DAC = 88° - 44° = 44°$.
$\delta ABC$ ist gleichschenlig und damit $\alpha = (180° - \sphericalangle CAB)/2 = (180° - 44°)/2 = 136°/2 = 68°$.

Antwort: $\alpha = 68°$.

b)

$\delta = 180° - 82° = 98°$ (Ergänzungswinkel).
$\gamma = 180° - 40° = 140°$ (Ergänzungswinkel).
$\alpha = 180° - \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\gamma = 180° - 49° - 70° = 61°$. (Winkelsumme im $\triangle$).

Antwort: $\alpha = 61°$.

c)

$\sphericalangle BDC = 42°$ (Stufenwinkel).
$\sphericalangle ADB = 180° - 2 \cdot 42° = 96°$ (gleichschenkliges $\triangle ABD$ mit Basis $[AB]$).
$\sphericalangle ADC = \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC = 96° + 42° = 138°$.
$\sphericalangle ACD = \frac{1}{2} \cdot (180° - \sphericalangle ADC) = \frac{1}{2} \cdot (180° - 138°) = \frac{1}{2}42° = 21°$. (gleichschenkliges $\triangle ACD$ mit Basis $[AC]$).
$\sphericalangle DFC = 180° - \sphericalangle FDC - \sphericalangle FCD = 180° - 42° - 21° = 117°$ (Winkelsumme im $\triangle DFC$).
$\alpha = 180° - \sphericalangle DFC = 180° - 117° = 63°$

Antwort: $\alpha = 63°$.

Alternative: $\alpha = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DCF$. Man denke sich eine dritte Parallele durch $F$ und $\alpha$ als Summe zweier Stufenwinkel.

**Lösung zu Aufgabe 4.22** ex-winkelsaetze-geraden2
Seien $g$, $h$ zwei sich schneidende Geraden mit $\sphericalangle(g,h) = \alpha$. Sei $\beta = 180° - \alpha$ der Nebenwinkel von $\alpha$. Damit gilt

$$\sphericalangle(w_{gh}^1, g) = \frac{\alpha}{2} \qquad \text{und} \qquad \sphericalangle(w_{gh}^2, g) = \frac{\beta}{2}$$

und damit

$$\sphericalangle(w_{gh}^1, w_{gh}^2) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$$

Es gilt $\alpha + \beta = 180°$ und damit $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90°$, was zu beweisen war.

**Lösung zu Aufgabe 4.23** ex-winkelsaetze-geraden3
a) $\alpha = (180° - \gamma)/2 = 70°$.
b) $180° = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \alpha + 3\alpha = 5\alpha$ also $\alpha = 36°$.
c) $\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 40°$.
d) $180° = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \alpha + \alpha = 3\alpha$ also $\alpha = 60°$.

**Lösung zu Aufgabe 4.24** ex-winkelsaetze-geraden4
Sei $I = w_\alpha \cap w_\beta$. Es gilt:

$$\sphericalangle AIB = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \quad \text{Innenwinkelsumme im } \triangle$$

Der gesuchte Winkel $\delta$ ist der Nebenwinkel von $\sphericalangle AIB$, also

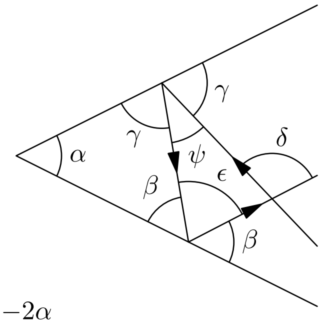
$$\delta = 180° - (180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

Man hätte dies auch direkt aufschreiben können, da der Aussenwinkel in einem Dreieck immer die Summe der gegenüberliegenden Innenwinkel ist.
In jedem Dreieck gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$$

Und damit ist $\delta = \sphericalangle(w_\alpha, w_\beta) = 90° - \frac{\gamma}{2}$.

**Lösung zu Aufgabe 4.25** ex-winkelsaetze-geraden5
Für den Aussenwinkel $\delta$ gilt:




$$\delta = \epsilon + \psi$$

Mit $\epsilon = 180° - 2\beta$ und $\psi = 180° - 2\gamma$. Und damit

$$\delta = \epsilon + \psi = 180° - 2\beta + 180° - 2\gamma = 360° - (2\beta + 2\gamma)$$

Es gilt

$$\alpha+\beta+\gamma = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 2\alpha+2\beta+2\gamma = 360° \quad \Leftrightarrow \quad 2\beta+2\gamma = 360°-2\alpha$$

Oben eingesetzt erhält man

$$\delta = 360° - (360° - 2\alpha) = 2\alpha$$

**Lösung zu Aufgabe 4.26** ex-winkelsaetze-geraden6
a) Das Dreieck $\triangle MBC$ ist gleichschenklig, also ist $\sphericalangle MCB = \beta$.
Es gilt

$$\overline{CD} = \overline{CM} = \overline{MA} = \overline{MD}$$

und damit ist $\triangle MCD$ gleichseitig und alle Innenwinkel gleich 60°.
Somit gilt:

$$\sphericalangle MCD = \beta + \gamma = 60° \qquad \Leftrightarrow \qquad \gamma = 60° - \beta.$$

b) Wenn $\beta = \gamma$ sind dies Wechselwinkel (Scheitelwinkel zu Stufenwinkel) und damit $CD \parallel AB$. Eingesetzt in obige Gleichung:

$$\beta = 60° - \beta \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\beta = 60° \qquad \Leftrightarrow \qquad \beta = 30°.$$

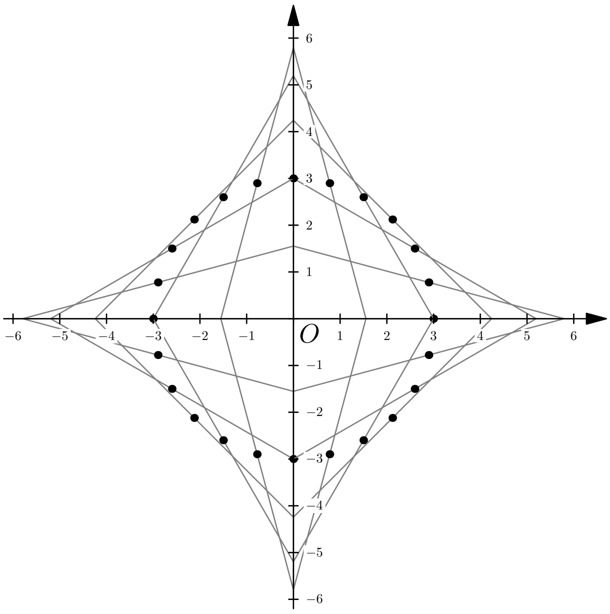
**Lösung zu Aufgabe 4.27** ex-winkelsaetze-geraden7
Das Dreieck $\triangle MBC$ ist gleichschenklig und damit ist $\sphericalangle MCB = \beta$. Damit ist $p$ die Mittelsenkrechte zu $BC$ und Winkelhalbierende vom $\sphericalangle CMB$. Damit ist $M_{CD} = a \cap p$. Im Dreieck $\triangle CMM_{BC}$ gilt

$$\mu = 180° - 90° - \beta = 90° - \beta$$

Das Dreieck $\triangle MCD$ ist gleichschenklig mit Basis $[CD]$. Damit ist $\sphericalangle MDC = (180° - \mu)/2 = (180° - (90° - \beta))/2 = (90° + \beta)/2 = 45° + \frac{\beta}{2}$.
Im Dreieck $\triangle CM_{BC}D$ gilt:

$$\gamma = 180° - 90° - \sphericalangle MDC = 90° - (45° + \frac{\beta}{2}) = 45° - \frac{\beta}{2}$$

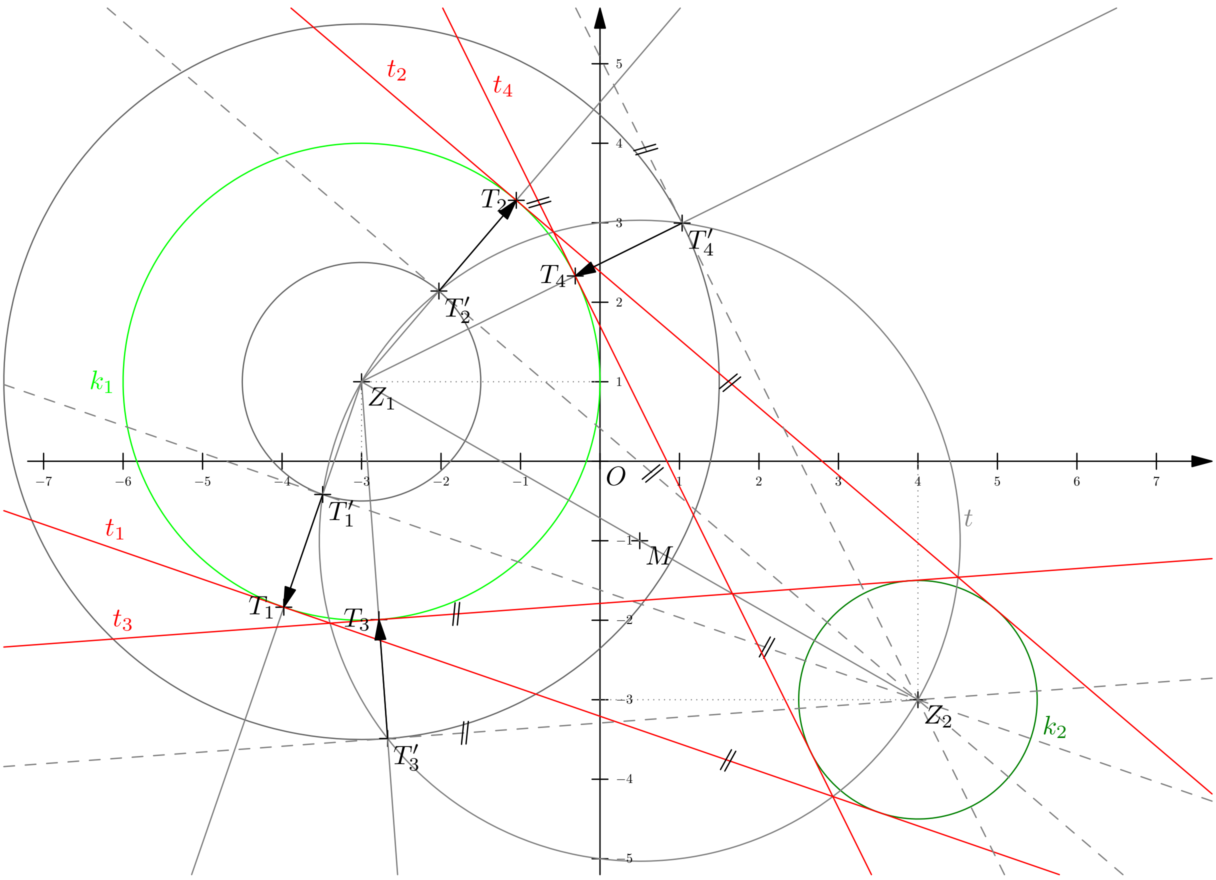
**Lösung zu Aufgabe 4.29** ex-thaleskreis-leiter



$M_{AB}$ ist der Mittelpunkt der Stecke $[AB]$, über der der Nullpunkt des Koordinatensystem einen rechten Winkel bildet. D.h. $O$ liegt auf dem Thaleskreis über $[AB]$ und somit $\overline{OM} = \overline{AM_{AB}}$.
Damit ist bewiesen, dass alle Punkte $M_{AB}$ auf einem Kreis um $O$ liegen.

**Lösung zu Aufgabe 4.30** ex-tangenten-an-zwei-kreise

1. Thaleskreis über $[Z_1Z_2]$ $\to t$
2. $k(Z_1, r_1 - r_2) \cap t$ $\to T_1', T_2'$
3. $[Z_1T_{1,2}' \cap k_1$ $\to T_{1,2}$
4. $k(Z_1, r_1 + r_2) \cap t$ $\to T_3', T_4'$
5. $[Z_1T_{3,4}' \cap k_1$ $\to T_{3,4}$
6. Paralellen zu $Z_2T_{1,2,3,4}'$ durch $T_{1,2,3,4}$ $\to t_{1,2,3,4}$



**Lösung zu Aufgabe 4.31** ex-thaleskreis-hoehenfusspunkte

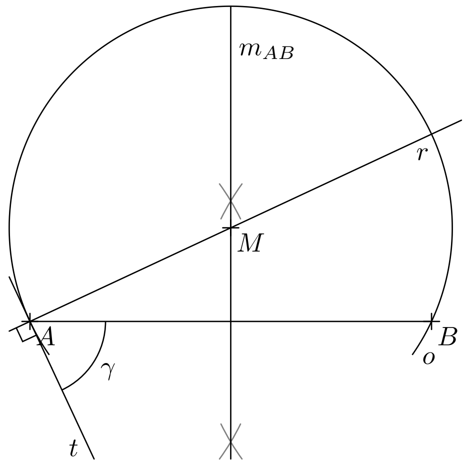
$H_a$ und $H_b$ sind Scheitel von rechten Winkeln über der Strecke $[AB]$, also liegen beide auf dem Thaleskreis über

$[AB]$. Somit gilt $\overline{M_{AB}H_a} = \overline{M_{AB}H_b} = \overline{M_{AB}A}$, was zu beweisen war.

**Lösung zu Aufgabe 4.33** ex-geom-ort-ortsbogen0

Es gilt: Der Peripheriewinkel ist gleich dem Sehnen-Tangentenwinkel. Die Tangente kann also konstruiert werden, indem der Winkel $\gamma$ an der Strecke $[AB]$ abgetragen wird. Das gesuchte Ortsbogenzentrum muss einerseits auf der Rechtwinkligen dazu liegen, andererseits auf der Mittelsenkrechte $m_{AB}$.

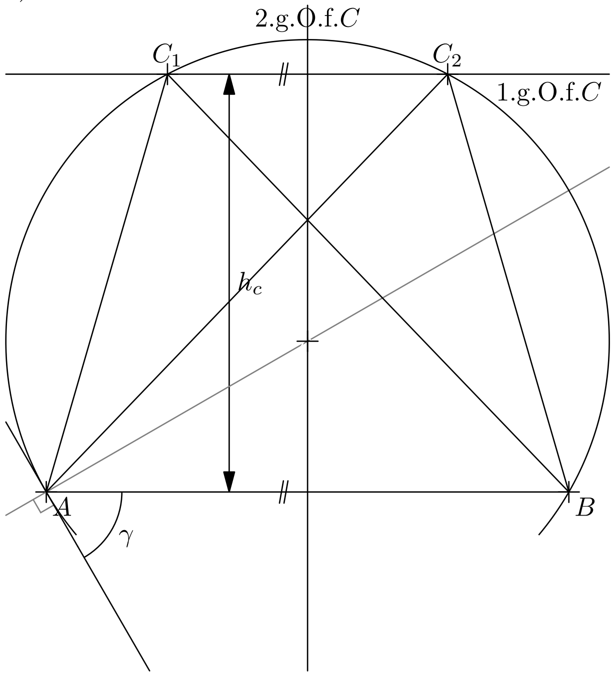
1. Winkel $\gamma$ bei $A$ abtragen $\to$ Tangente $t$
2. $\perp$ zu $t$ durch $A$ $\to r$
3. $m_{AB} \cap r$ $\to M$
4. $k(M, \overline{MA})$ $\to$ Gesuchter Ortsbogen




Zur Bonusaufgabe: Nach dem ersten Teil können Sie sowohl die beiden Fasskreisbögen zur Strecke Arbon-Romanshorn als auch zur Strecke Rorschach-Steinach konstruieren. Die Schnittpunkte der beiden Fasskreisbogenpaare sind die möglichen Aufenthaltsorte. (Es kann mehrere Schnittpunkte geben, aber hoffentlich wissen Sie ungefähr, wo sie sind bzw. wo Land ist.)

**Lösung zu Aufgabe 4.34** ex-geom-ort-ortsbogen1

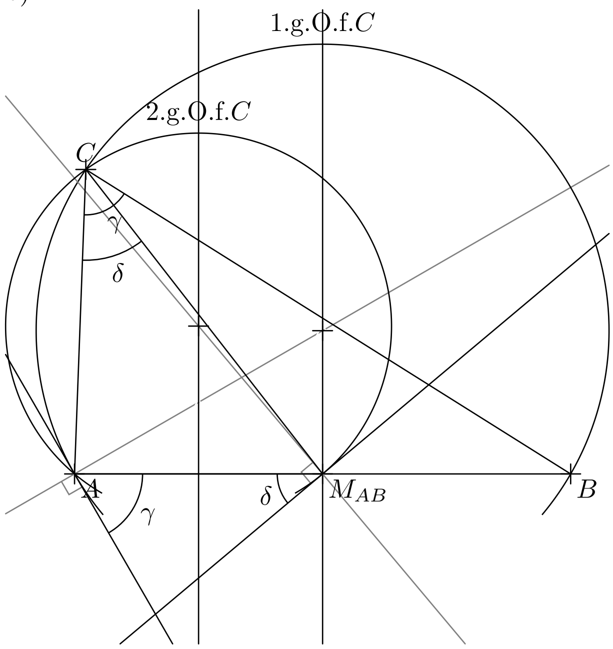
a)




1. $\parallel$ zu $AB$ im Abstand $h_c$ $\to$ 1.g.O.f.$C$
2. Ortsbogen zu $\gamma$ über $[AB]$ $\to$ 2.g.O.f.$C$

Es gibt 2 Lösungen (die 2 an $AB$ gespiegelten Lösungen mit anderem Umlaufsinn nicht mitgezählt).

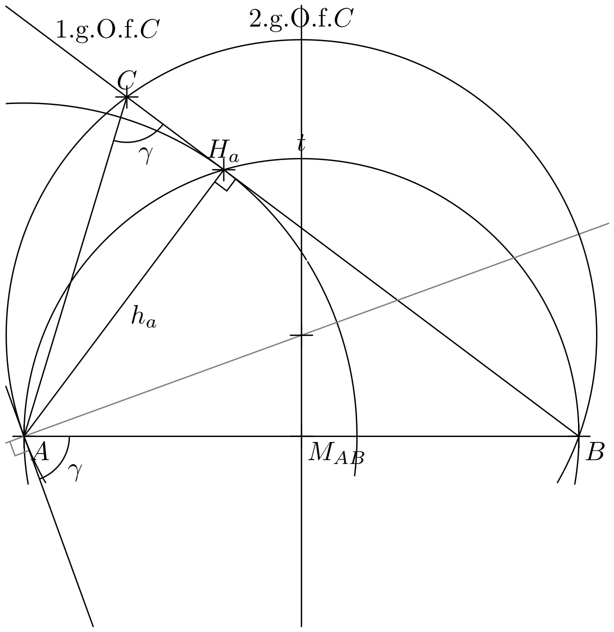
b)




1. Ortsbogen zu $\gamma$ über $[AB]$ $\to$ 1.g.O.f.$C$
2. Ortsbogen zu $\delta$ über $[AM_{AB}]$ $\to$ 2.g.O.f.$C$

Es gibt 1 Lösung (die an $AB$ gespiegelte Lösung mit anderem Umlaufsinn nicht mitgezählt).

c)



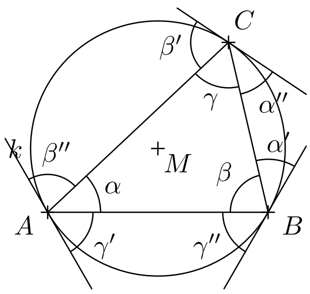

Zuerst wird der Höhenfusspunkt $H_a$ konstruiert, womit man die Lage der Seite $a$ erhält.

1. Thaleskreis über $[AB]$ $\to t$
2. $t \cap k(A, h_a)$ $\to H_a$
3. $BH_a$ $\to$ 1.g.O.f.$C$
4. Ortsbogen zu $\gamma$ über $[AB]$ $\to$ 2.g.O.f.$C$

Es gibt 1 Lösung (die an $AB$ gespiegelte Lösung mit anderem Umlaufsinn nicht mitgezählt).

**Lösung zu Aufgabe 4.35** ex-sehne-winkelsaetze-faerbe-gleiche-winkel

Für die Sehne $[BC]$ sagen Sehne-Tangente-Winkel-Satz und Peripheriewinkelsatz, dass $\alpha'' = \alpha' = \alpha$. Analog gelten $\beta = \beta' = \beta''$ und $\gamma = \gamma' = \gamma''$.

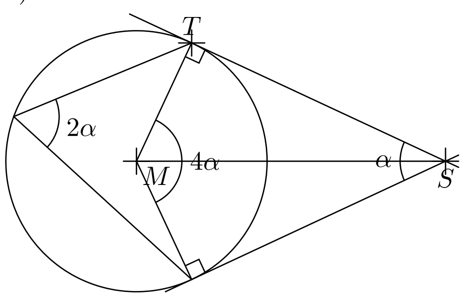



**Lösung zu Aufgabe 4.36** ex-ortsbogen-aufgabe-beweisen

Sei $t$ die gemeinsame Tangente an $k_1$ und $k_2$ im Punkt $B$. Der Winkel $\alpha = \sphericalangle(t, g)$ ist ein Sehnen-Tangenten-Winkel für beide Kreise über den Sehnen $[BT_1]$ und $[BT_2]$. Der andere Sehnen-Tangenten-Winkel $\sphericalangle(t_1, g)$ bzw. $\sphericalangle(t_2, g)$ ist gleich gross wie $\alpha$. Damit haben wir in den Punkte $T_1$ und $T_2$ Wechselwinkel an der Geraden $g$ und damit sind $t_1 \parallel t_2$.

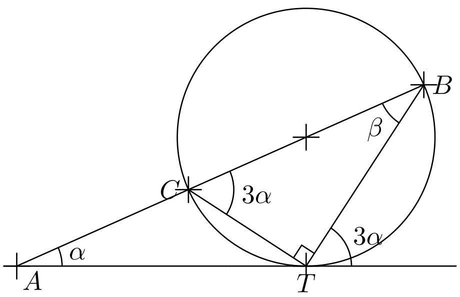
**Lösung zu Aufgabe 4.37** ex-ortsbogen-winkel-berechnen-formell

a)



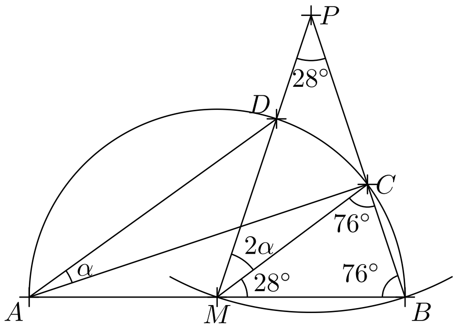

Der Zentriwinkel ist doppelt so gross wie der entsprechende Peripheriewinkel. $MS$ halbiert die Winkel $4\alpha$ und $\alpha$.
Im $\triangle MST$ gilt: $180° = 90° + 2\alpha + \frac{1}{2}\alpha$, also $\frac{5}{2}\alpha = 90°$ und damit $\alpha = \frac{2}{5} \cdot 90° = 36°$.

b)




$\sphericalangle TCB = 3\alpha$ (Peripheriew. zum Sehnen-Tangenten-W.in $T$.)
$\sphericalangle CTB = 90°$ (Thaleskreis über $[BC]$).
$\sphericalangle CBT = \beta = 180° - 3\alpha - 90° = 90° - 3\alpha$
$\sphericalangle ATB = 180° - 3\alpha$ (Nebenwinkel).
Im $\triangle ATB$ gilt: $180° = \alpha + (180° - 3\alpha) + (90° - 3\alpha) = 270° - 5\alpha$
Nach $\alpha$ aufgelöst erhält man $\alpha = 18°$.

c)




$\sphericalangle PMC = 2\alpha$ (Zentriwinkel zum Peripheriewinkel $\alpha$)
$\triangle PMB$ ist gleichschenklig mit Basis $[MB]$ und Basiswinkeln $(180° - 28°)/2 = 76°$.
$\triangle MBC$ ist gleichschenklig mit Basis $[BC]$ und damit ist der Winkel an der Spitze $\sphericalangle BMC = 28°$.
Somit gilt $\sphericalangle PMB = 76° = 2\alpha + 28°$. Also $2\alpha = 76° - 28° = 48°$ und damit $\alpha = 24°$.

### Lösung zu Aufgabe 4.38 ex-ortsbogen-aufgabe-beweisen2

Hinweis: Dieser Beweis geht davon aus, dass $[AB]$ innerhalb des Dreiecks $\triangle BDC$ liegt:

Die Winkel $\sphericalangle BCD$ und $\sphericalangle BDC$ sind Peripheriewinkel über $[AB]$ und damit, unabhängig von $g$ immer gleich gross. Damit ist auch der dritte Winkel im $\triangle BDC$ immer gleich gross, was zu beweisen war.

Wenn $[AB]$ ausserhalb des Dreiecks $\triangle BDC$ liegt, ist der Peripheriewinkel das Komplement zu 180° und ein Aussenwinkel des Dreiecks, womit der Innenwinkel wieder gleich gross ist.

### Lösung zu Aufgabe 4.39 ex-ortsbogen-aufgabe-beweisen3-geogebra

Annahme: $[AC]$ und $[AD]$ sind die Diagonalen (andernfalls sind $C$ und $D$ zu vertauschen).

Die Winkel $\sphericalangle DAC$ und $\sphericalangle ADB$ sind Peripheriewinkel über den Sehnen $[DC]$ und $[AB]$. Diese Winkel sind immer gleich gross, auch wenn die Sehne $[CD]$ auf $k$ wandert. Diese Winkel sind Innenwinkel im $\triangle AXD$ und damit ist der Winkel $\sphericalangle AXD$ auch immer gleich gross. Damit liegen alle möglichen Punkte $X$ auf einem Ortsbogen über $[AB]$.

### Lösung zu Aufgabe 4.40 ex-ortsbogen-winkel-berechnen-formell2

Diese Lösung ist für den Fall $\beta > \gamma$.

Sei $T = t \cap a$.

$\sphericalangle BAT = \gamma$ (Sehnen-Tangenten-Winkel zum Peripheriewinkel $\gamma$).

$\beta$ ist Aussenwinkel im $\triangle ABT$ und damit $\beta = \gamma + \delta$ und somit $\delta = \beta - \gamma$.

Im Falle $\gamma = \beta$ gibt es keinen Schnittpunkt (der Winkel zwischen den Geraden ist dann 0°). Wenn $\gamma > \beta$ ist $\delta = \gamma - \beta$ mit ähnlicher Herleitung.

### Lösung zu Aufgabe 4.41 ex-ortsbogen-winkel-berechnen-formell3

a) Sei $X = AD \cap CE$ der Diagonalenschnittpunkt.

Es gilt: $\sphericalangle CED = \beta$ (Peripheriewinkel über $[CD]$) und $\sphericalangle AEC = 90° - \alpha$ (Innenwinkelsumme im $\triangle AXE$). Und damit:

$\varepsilon = 90° - \alpha + \beta$

Analog erhält man $\gamma = 90° - \beta + \alpha$.

Im $\triangle EDC$ ist der Winkel bei E gleich gross wie $\beta$ und der Winkel bei $C$ gleich gross wie $\alpha$ (Periepheriewinkel über gleichen Sehnen). Damit ist

$\delta = 180° - \alpha - \beta$.

b) Der Winkel $\sphericalangle DZC = 2\beta$ ist Zentriwinkel zum Peripheriewinkel $\beta$ über der Sehne $[CD]$ im kleinen Kreis. Dieser Winkel ist aber auch Peripheriewnkel über $[CD]$ im grossen Kreis. Peripheriewinkel auf gegenüberliegenden

Seiten der Kreissehne ergänzen sich zu 180° (die entsprechenden Sehnen-Tangenten-Winkel sind Nebenwinkel). Also gilt folgende Beziehung zwischen $\alpha$ und $\beta$:

$$2\beta = 180^\circ - \alpha$$

Hinweis: Die obige Beziehung kann natürlich auch umgeformt und nach $\alpha$ oder $\beta$ aufgelöst werden.

**Lösung zu Aufgabe 4.42** ex-ortsbogen-aufgabe-beweisen4

Sei $X = w_\gamma \cap u$, der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden $w_\gamma$ mit dem Umkreis. Zu zeigen ist also, dass $X \in m_{AB}$.

Es gilt: $\sphericalangle ACX = \sphericalangle XCB = \frac{1}{2}\gamma$. Da beide Winkel Peripheriewinkel im Umkreis sind, müssen die entsprechenden Sehnen $[AX]$ und $[BX]$ gleich lang sein, d.h. $X \in m_{AB}$, was zu beweisen war.

**Lösung zu Aufgabe 4.43** ex-geom-ort-kegelschnitte1

a) Es gilt $\overline{B_1P_1} + \overline{P_1B_2} = d$ also $\overline{P_1B_2} = d - \overline{B_1P_1}$. Analog dazu gilt $\overline{P_2B_2} = d - \overline{B_1P_2}$.

1. $k(P_1, d - \overline{B_1P_1})$ $\rightarrow k_1$, 1.g.O.f.$B_2$
2. $k(P_2, d - \overline{B_1P_2})$ $\rightarrow k_2$, 2.g.O.f.$B_2$
3. $k_1 \cap k_2$ $\rightarrow$ 2 Lösungen

b)

$$\overline{B_1P_1} + \overline{P_1B_2} = \overline{B_1P_2} + \overline{P_2B_2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{P_1B_2} - \overline{P_2B_2} = \overline{B_1P_2} - \overline{B_1P_1}$$

Die rechte Seite ist konstant, die linke Seite die Differenz der Abstände von $B_2$ zu zwei gegebenen Punkten $P_1$ und $P_2$. Alle Punkte $B_2$ liegen also auf einem Hypbel-Ast mit Brennpunkten $P_1$ und $P_2$ und Abstandsunterschied $\overline{B_1P_2} - \overline{B_1P_1}$.

**Lösung zu Aufgabe 4.44** ex-geom-ort-kegelschnitte2

a) Der 1.g.O.f.$Z_3$ ist ein konzentrisches Kreispaar $k_{1,1} = k(Z_1, r_1 + r_3)$ und $k_{1,2} = k(Z_1, r_1 - r_3)$, wobei letzterer nur existiert, wenn $r_1 > r_3$.

Der 2.g.O.f.$Z_3$ ist ein konzentrisches Kreispaar $k_{2,1} = k(Z_2, r_2 + r_3)$ und $k_{2,2} = k(Z_2, r_2 - r_3)$, wobei letzterer nur existiert, wenn $r_2 > r_3$.

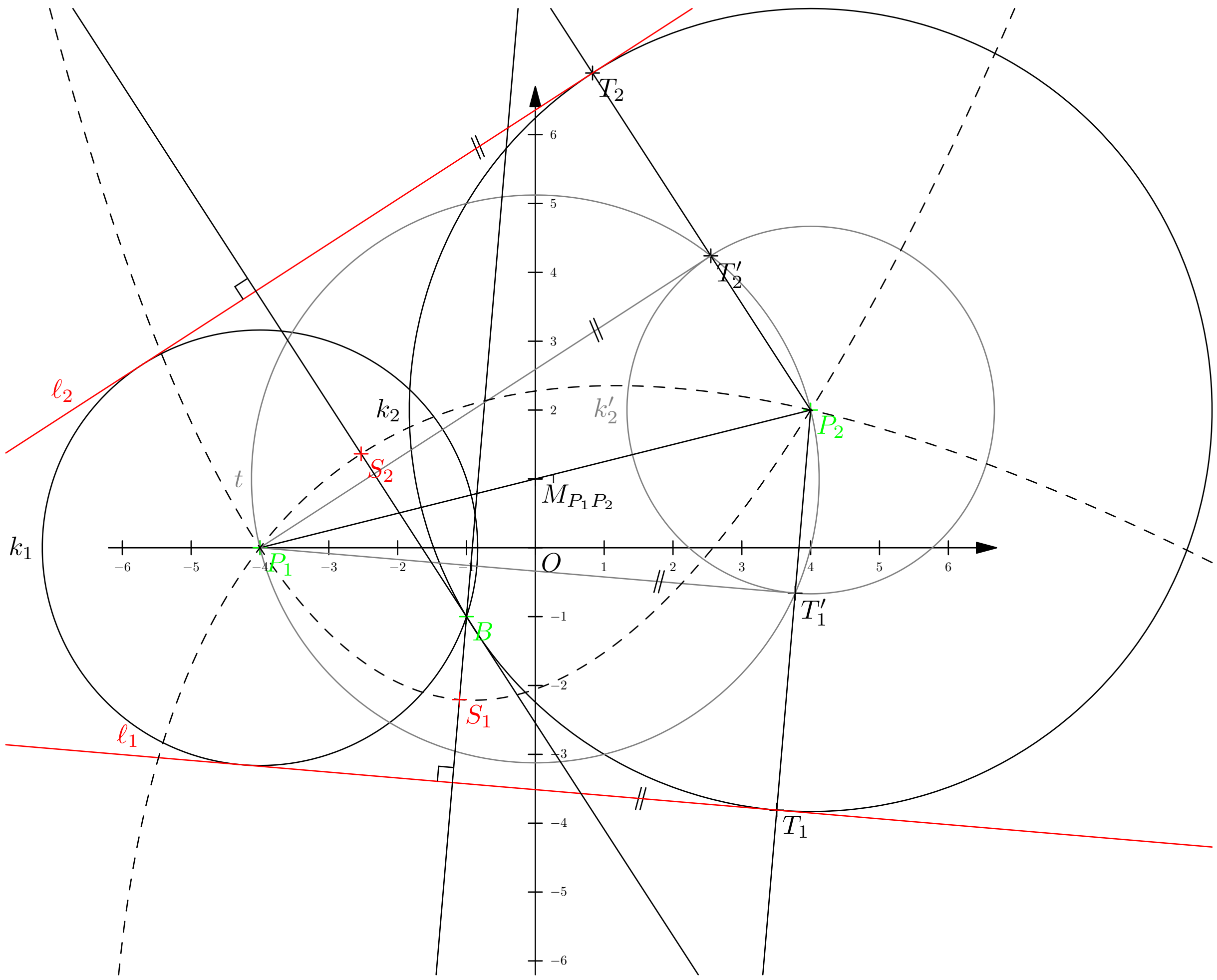
Die Schnittpunkte dieser beiden geometrischen Örter ergeben die möglichen Kreiszentren. Es kann zwischen 0 und 8 Lösungen geben (jeder Kreis kann mit den anderen beiden zwischen 0 und 4 Schnittpunkte bilden).

b) Die Kreise $k_1$ und $k_2$ schneiden sich nicht und liegen nicht ineinander. Der kleinste Kreis liegt also genau zwischen den beiden Kreisen. Das Kreiszentrum liegt also auf $Z_1Z_2$ und zwar genau in der Mitte zwischen den Schnittpunkten der Kreise mit $[Z_1Z_2]$.

c) Es gilt $\overline{Z_3Z_1} = r_3 + r_1$ und $\overline{Z_3Z_2} = r_3 + r_2$. Man kennt zwar $r_3$ nicht, aber für die Differenz gilt: $\overline{Z_3Z_1} - \overline{Z_3Z_2} = (r_3 + r_1) - (r_3 + r_2) = r_1 - r_2$. Damit ist die Abstandsdifferenz zu zwei Punkten konstant, die Punkte $Z_3$ liegen also auf einem Hyperbelast mit Brennpunkten $Z_1$, $Z_2$ und Abstandsdifferenz $r_1 - r_2$.

**Lösung zu Aufgabe 4.45** ex-geom-ort-kegelschnitte3

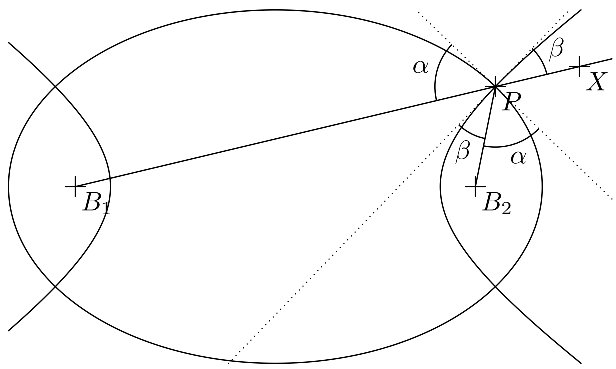
Es gilt $\overline{P_1B} = P\ell$ und damit muss $\ell$ den Kreis $k(P_1, \overline{P_1B})$ berühren. Analog dazu für $P_2$. Die Leitlinien sind also gemeinsame Tangenten an diese beiden Kreise. Da sich die Kreise schneiden (in $B$), gibt es nur zwei solche Tangenten und damit 2 Lösungen.



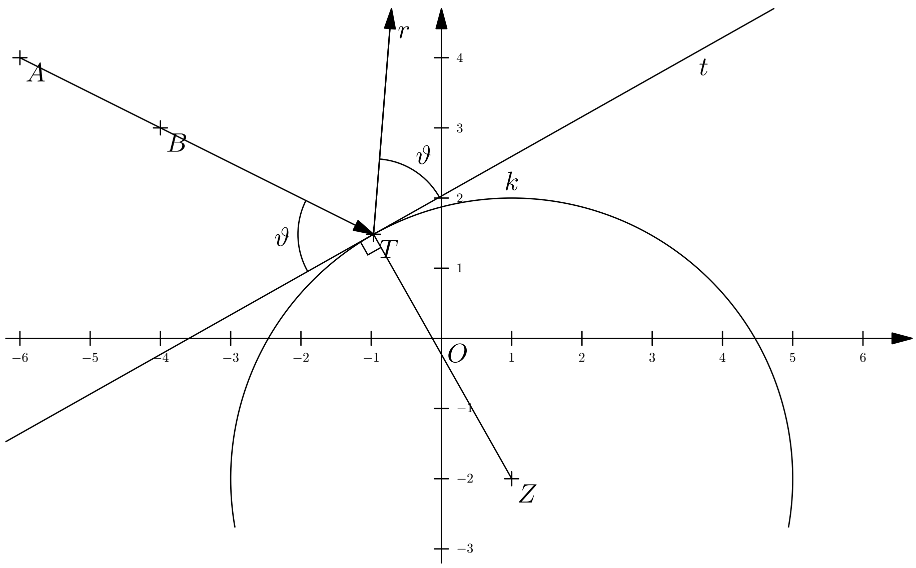

1. $k(P_1, \overline{P_1B}$ $\to k_1$
2. $k(P_2, \overline{P_2B}$ $\to k_2$
3. $k(P_2, \overline{P_2B} - \overline{P_1B}$ $\to k_2'$
4. Thaleskreis über $[P_1P_2]$ $\to t$
5. $t \cap k_2'$ $\to T_1', T_2'$
6. $[P_2T_1' \cap k_2$ $\to T_1$
7. $[P_2T_2' \cap k_2$ $\to T_2$
8. $\|$ zu $P_1T_1'$ durch $T_1$ $\to \ell_1$
9. $\|$ zu $P_1T_2'$ durch $T_2$ $\to \ell_2$
10. $M_{B\ell_1}$ $\to S_1$
11. $M_{B\ell_2}$ $\to S_2$

**Lösung zu Aufgabe 4.46** ex-geom-ort-kegelschnitte4

Seien $B_1$ und $B_2$ die gemeinsamen Brennpunkte und $P$ ein Schnittpunkt der beiden Kurven.
Aus der Reflexionseigenschaft (Winkel $\alpha$) in der Ellipse folgt, dass die Tangente an die Ellipse in $P$ die äussere Winkelhalbierende vom $\sphericalangle B_1PB_2$ ist.
Analog bei der Hyperbel (Winkel $\beta$) folgt, dass die Tangente an die Hyperpel in $P$ die äussere Winkelhalbierende vom $\sphericalangle B_2PX$ ist.
Da die Geraden $B_1P$ und $PX$ identisch sind, bilden die Tangenten das Winkelhalbierendenpaar zu den Geraden $B_1P$ und $B_2P$ und stehen somit senkrecht aufeinander, was zu beweisen war.

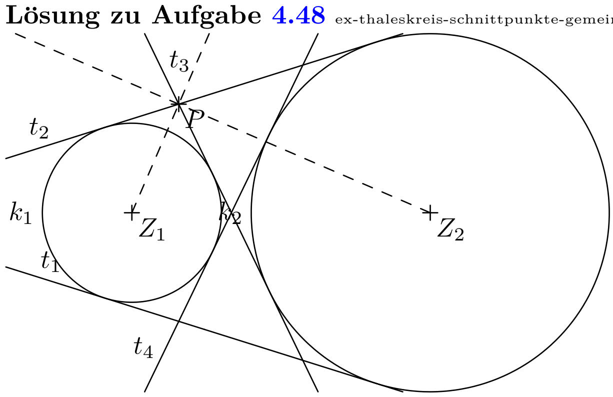



**Lösung zu Aufgabe 4.47** ex-thaleskreis-reflexion-an-kreis




1. $g \cap k$ $\rightarrow T$
2. $\perp$ zu $ZT$ durch $T$ $\rightarrow$ Tangente $t$
3. $\vartheta = \sphericalangle(g, t)$ $\rightarrow$ Einfallswinkel $\theta$ (theta)
4. $\vartheta$ an $t$ bei $T$ abtragen $\rightarrow$ Lösung $r$

**Lösung zu Aufgabe 4.48** ex-thaleskreis-schnittpunkte-gemeinsamer-tangenten




Der Beweis wird hier exemplarisch für den Punkt $P = t_2 \cap t_3$ geführt. Da $t_2$ und $t_3$ Tangenten an $k_1$ sind, halbiert $Z_1P$ den Winkel $\sphericalangle(t_2, t_3)$. Analog teilt auch $Z_2P$ den Winkel $\sphericalangle(t_2, t_3)$. D.h. $Z_1P$ und $Z_2P$ sind ein Winkelhalbierendenpaar und somit rechtwinklig aufeinander, was beweist, dass $P$ auf dem Thaleskreis über $[Z_1Z_2]$ liegt.

**Lösung zu Aufgabe 4.49** ex-geom-ort-winkelhalbierende

Ein Kreis, der zwei Geraden berührt, muss sein Zentrum $Z$ auf der Winkelhalbierenden haben. Die Konstruktion des Kreiszentrums und des Kreises ist wie folgt:

1. $c$ $\rightarrow$ 1.g.O.f.$Z$
2. $w_\gamma$ $\rightarrow$ 2.g.O.f.$Z$
3. $\perp$ zu $b$ durch $Z$ $\rightarrow g$
4. $g \cap b$ $\rightarrow$ Berührungspunkt $P$
5. $k(Z, \overline{ZP})$ $\rightarrow$ 1. Lösung

**Lösung zu Aufgabe 4.50** ex-geometrische-oerter5

a)
1. $w^1_{gh}$, $w^2_{gh}$ $\rightarrow$ 1.g.O.f.$Z$
2. Parallelenpaar zu $g$ im Abstand 1 $\rightarrow$ 2.g.O.f.$Z$

Es gibt 4 Lösungen.

b)
1. Kreise $k(M_1, 3 \pm 1)$ $\rightarrow$ 1.g.O.f.$Z$
2. Kreise $k(M_1, 2.5 \pm 1)$ $\rightarrow$ 2.g.O.f.$Z$

Es kann bis zu 8 Lösungen geben. Im konkreten Fall gibt es 6 Lösungen.

c)
1. Kreise $k(M, 3 \pm 1)$ $\rightarrow$ 1.g.O.f.$Z$
2. Parallelenpaar zu $g$ im Abstand 1 $\rightarrow$ 2.g.O.f.$Z$

Es kann bis zu 8 Lösungen geben. Im konkreten Fall gibt es 7 Lösungen.