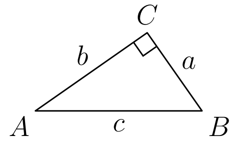
8 Satzgruppe des Pythagoras

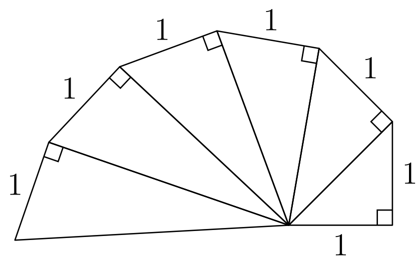
Satz 1 Satz von Pythagoras

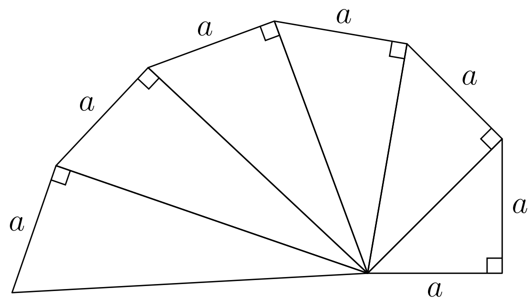
✎



Aufgabe 8.1 Wurzelkonstruktionen:

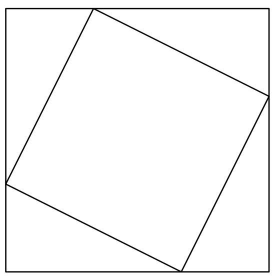
(a) Konstruiere auf Kästchenpapier eine Strecke der Länge $\sqrt{13}$ (Längenangaben in Zentimeter).
(b) Konstruiere auf Kästchenpapier eine Strecke der Länge $\sqrt{22}$.
(c) Wurzelschnecke oder -spirale oder Spirale des Theodorus: Bestimme alle nicht angegebenen Längen in den beiden folgenden Zeichnungen!



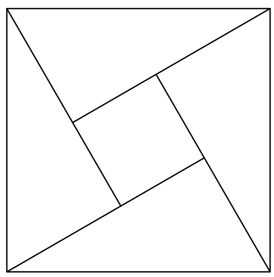


Aufgabe 8.2 Ausgehend von einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck, beweisen Sie den Satz von Pythagoras mit Hilfe der folgenden Skizzen. Wer genau ist, überlegt sich auch, warum gewisse Figuren, die wie Quadrate aussehen, wirklich Quadrate sind.

a)

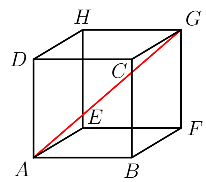


b)



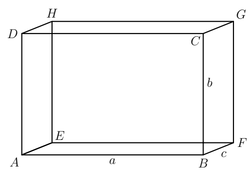
Aufgabe 8.3 Zeigen Sie, dass $\boxed{ab = hc}$ in jedem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten a und b, Hypotenuse c und Höhe h über der Hypotenuse gilt. Hinweis: Fläche.

Aufgabe 8.4 Stell dir vor, dass eine Fliege und eine Spinne in einer Ecke A eines würfelförmigen Raums der Seitenlänge 1 sitzen.



(a) Welche Flugstrecke legt die Fliege zurück, wenn sie direkt zur gegenüberliegenden Ecke G fliegt? Mit anderen Worte: Wie lang ist die (rot eingezeichnete) Raumdiagonale $[AG]$?
(b) Wie lang ist der kürzeste Weg für die Spinne zur gegenüberliegenden Ecke G? Sie kann nur auf den Wänden des Raums laufen.

Nun stell dir vor, dass der Raum quaderförmig ist mit Seitenlängen a, b und c.



(c) Wie lang ist die Raumdiagonale $[AG]$ im Quader?
(d) Wie lang ist der kürzeste Weg von A nach G über einen geeigneten Punkt der Kante $[BC]$?
(e) Wie lang ist der kürzeste Weg entlang der Wände von A nach G, wenn $a \geq b \geq c$ gilt? Über welche Kante führt der kürzeste Weg?

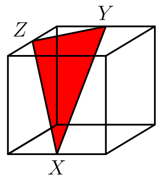
Merke

Da ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$ durch seine drei Seitenlängen a, b, c bis auf Kongruenz (= Deckungsgleichheit) eindeutig festgelegt ist, gilt auch die **Umkehrung des Satzes von Pythagoras**:
Gilt $a^2 + b^2 = c^2$ für die Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$, so ist das Dreieck rechtwinklig bei C.

Aufgabe 8.5 Welche der drei Dreiecke mit den folgenden Seitenlängen sind rechtwinklig?

a) $a = 3, b = 4, c = 5$ b) $a = 5, b = 12, c = 13$ c) $a = 17, b = 15, c = 8$ d) $a = 4, b = 5, c = 6$

Aufgabe 8.6
Im rechts abgebildeten Würfel der Seitenlänge a liegen die Punkte X, Y und Z jeweils auf den Kantenmitten. Ist das Dreieck $\triangle XYZ$ rechtwinklig?
Hinweis: Überprüfe dies mit der Umkehrung des Satzes von Pythagoras.



8.1 Höhen- und Kathetensatz

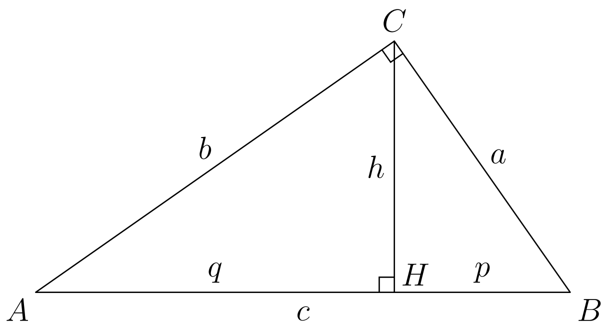
Satz 2 Höhen- und Kathetensatz

In jedem rechtwinkligen Dreieck gelten (vgl. Zeichnung für die Bezeichnungen)

Höhensatz: $h^2 = pq$ **Kathetensatz:** $a^2 = pc$ und $b^2 = qc$

Dabei sind h die Höhe über der Hypotenuse mit Höhenfusspunkt H und $p = [HB]$ und $q = [AH]$ sind die sogenannten **Hypotenusenabschnitte**. Beachte, dass p bei der Seite a liegt und q bei der Seite b.
Eselsbrücke: p bzw. a kommt im Alphabet vor q bzw. b.

Um den **Höhensatz** herzuleiten, drücken Sie c^2 einmal mit a, b und einmal mit p, q aus, setzen die beiden Ausdrücke gleich und isolieren das Produkt pq.
✎



Für den **Kathetensatz**, drücken Sie a^2 durch h und p aus, ersetzen h^2 mit Hilfe des Höhensatzes und klammern p aus:

✎

Aufgabe 8.7
Berechne in der folgenden Tabelle die fehlenden Grössen, wobei a, b, c, p, q, h jeweils die üblichen Strecken eines

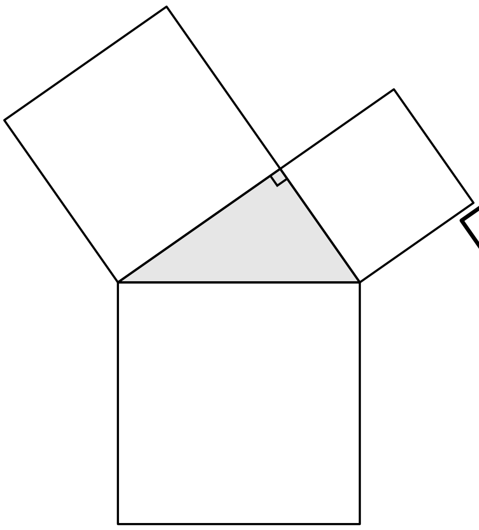
rechtwinkligen Dreiecks sind; F bezeichnet seine Fläche. (Taschenrechner erlaubt)

a	b	c	p	q	h	F
3			$\frac{9}{5} = 1.8$			
13					12	
		25		16		
			1	7		

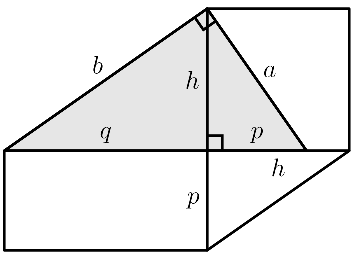
Aufgabe 8.8 In einem rechtwinkligen Dreieck teilt die Höhe h auf die Seite c diese in zwei Hypotenusenabschnitte, p und q, wobei p näher bei a liegt. Von den sechs Strecken a, b, c, h, p und q sind jeweils zwei gegeben. Finden Sie Formeln, um daraus die anderen vier zu berechnen.

a) a, b b) a, p c) p, q d) p, c e) p, b

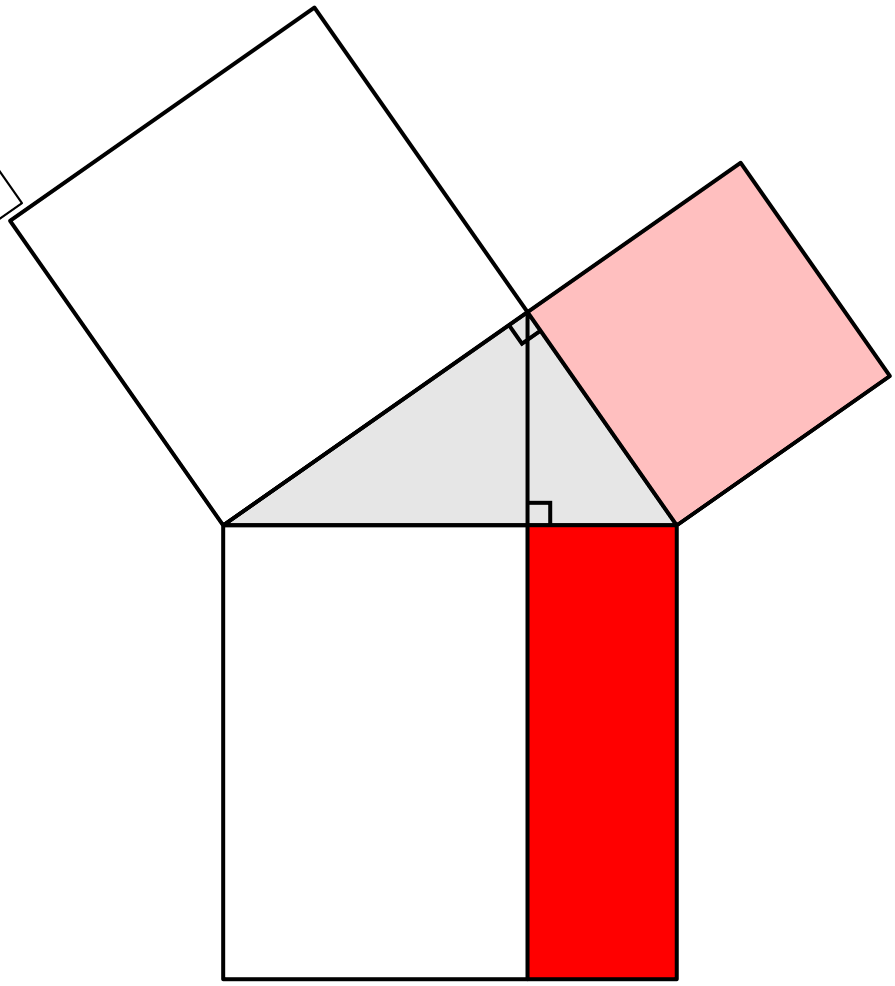
Aufgabe 8.9 Die Sätze aus der Satzfamilie des Pythagoras (Satz von Pythagoras, Höhensatz, Kathetensatz) behaupten diverse Gleichheiten für rechtwinklige Dreiecke, die jeweils eine geometrische Bedeutung haben. Zum Beispiel besagt die Gleichung $a^2 = pc$ aus dem Kathetensatz, dass das hellrote Quadrat in der folgenden Zeichnung genauso gross ist wie das dunkelrote Rechteck. Illustriere die geometrische Bedeutung der drei anderen Gleichungen in ähnlicher Weise farblich.



Satz von Pythagoras



Höhensatz



Kathetensatz

Aufgabe 8.10 Es folgt eine „alphabetische“ Liste von Wortverbindungen. Diese sind in den nachfolgenden Lückentext so einzutragen, dass korrekte Aussagen entstehen:

Wortverbindungen: der Höhe | Hypotenusenabschnitt | der beiden Hypotenusenabschnitte | der Hypotenuse | von Hypotenuse | der Katheten | der zugehörigen Kathete | das Produkt | das Produkt | das Quadrat | das Quadrat das Quadrat | der Quadrate | rechtwinkligen | die Summe

Lückentext: In jedem ______ Dreieck gilt

- laut dem Satz von Pythagoras: ______ ______ ______ ist so gross wie ______ ______
- laut dem Kathetensatz: ______ ______ und ______ ist so gross wie ______ ______
- laut dem Höhensatz: ______ ______ ist so gross wie ______ ______

Aufgabe 8.11 Löse die folgenden Aufgaben mit dem Höhensatz!

(a) Geometrisches Wurzelziehen: Gegeben sind zwei Strecken der Länge a und 1. Konstruieren Sie eine Strecke der Länge $\sqrt{a}$.

(b) Rechteck in flächengleiches Quadrat verwandeln: Gegeben ist ein Rechteck mit Seitenlängen x und y. Konstruieren Sie ein Quadrat desselben Flächeninhalts.

(c) Rechteck in flächengleiches Quadrat verwandeln: Gegeben ist ein Quadrat mit Seitenlänge s und eine Strecke x. Konstruieren Sie ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite x ist.

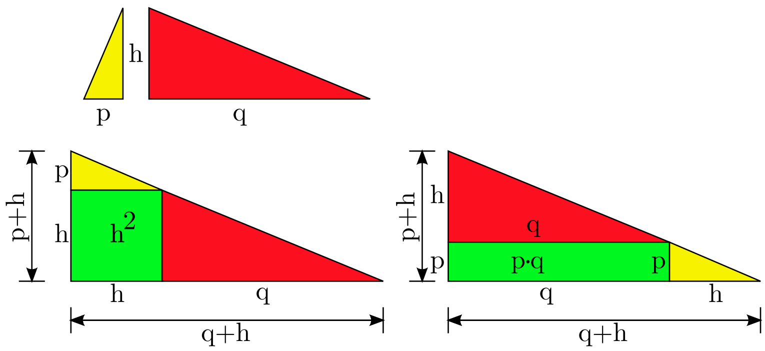
(d) Anwendung der vorigen beiden Teilaufgabe: Gegeben sind zwei Strecken der Längen x und y und eine Strecke der Länge 1 als “Masseinheit”. Konstruieren Sie eine Strecke der Länge xy.

Aufgabe 8.12 Löse die folgenden Aufgaben mit dem Kathetensatz!

(a) Rechteck in flächengleiches Quadrat verwandeln: Gegeben ist ein Rechteck mit Seitenlängen x und y. Konstruieren Sie ein Quadrat desselben Flächeninhalts.

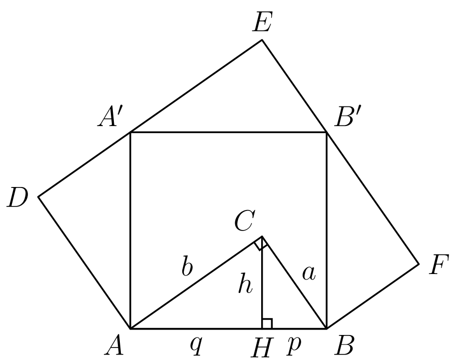
(b) Rechteck in flächengleiches Quadrat verwandeln: Gegeben ist ein Quadrat mit Seitenlänge s und eine Strecke x. Konstruieren Sie ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite x ist.

Aufgabe 8.13 Erkläre, warum die folgenden Zeichnungen den Höhensatz beweisen. (Die Benennung von p und q ist umgekehrt als bei uns.) Bildquelle: Wikipedia: Höhensatz, Beweis, Über Zerlegungen



Aufgabe 8.14 Führe meinen geometrischen Lieblingsbeweis des Kathetensatzes:

Starte mit einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit rechtem Winkel bei C. Wie in der Zeichnung unten bereits geschehen, errichte über der Hypotenuse ein Quadrat und nenne die beiden neuen Eckpunkte A' und B'; setze drei Kopien des Ausgangsdreiecks auf die drei neuen Quadratseiten. (Offensichtlich hat der Streckenzug $DA'E$ keinen Knick bei A', weil sich die drei Winkel zu 180° ergänzen; analog hat $FB'E$ keinen Knick bei B'.)



(i) Verbinde C und E. Dies ist offensichtlich eine geradlinige Verlängerung der Höhe h. Gib ihrem Schnittpunkt mit $[A'B']$ den Namen S.

(ii) Ergänze DAC zu einem Quadrat $DACX$. Dies geht, da das Dreieck DAC rechtwinklig bei A ist und gleich lange Hypotenusen hat. Offensichtlich liegt der Punkt X auf $[DE]$.

(iii) Zeige, dass das Quadrat $DACX$ dieselbe Fläche hat wie das Rechteck $AHSA'$, indem du beide mit einem

flächengleichen Parallelogramm vergleichst.
Hinweis: Scherungen erhalten den Flächeninhalt.

(iv) Warum beweist dies $b^2 = qc$?
(v) Beweise $a^2 = pc$ analog.
(vi) Warum liefert das auch einen Beweis des Satzes von Pythagoras?

Dieser Beweis führt schnell zu einem tangram-artigen Puzzle, siehe Aufgabe 8.21.

8.2 Spezielle rechtwinklige Dreiecke

Aufgabe 8.15 Ein rechtwinkliges, *gleichschenkliges* Dreieck hat die Hypotenuse c und die Katheten $a = b$.

(a) Berechnen Sie c, wenn a gegeben ist.
(b) Berechnen Sie a, wenn c gegeben ist.

Aufgabe 8.16

(a) In einem Dreieck mit den Innenwinkeln 30°, 60°, 90° sei c die Hypotenuse, a die kürzere und b die längere Kathete.
Wenn jeweils eine der drei Längen gegeben ist, berechnen Sie daraus die anderen beiden.
(b) Anwendung: Welche Fläche hat ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a?

8.3 Reguläres Tetraeder

Aufgabe 8.17 Das **Tetraeder** ist einer der fünf platonischen Körper (altgriechisch $\tau\epsilon\tau\rho\alpha$-tetra-vier). Er besteht aus vier gleichseitigen Dreiecken einer beliebig gewählten Seitenlänge s. Bestimme die folgenden Werte (nur die letzten beiden hängen von s ab):

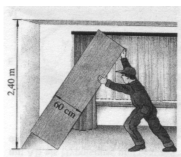
a) Anzahl der Flächen: b) Anzahl der Kanten: c) Anzahl der Ecken:

d) Seitenhöhe: e) Körperhöhe:

8.4 Weitere Aufgaben

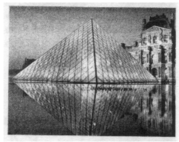
Aufgabe 8.18 Folgende Aufgaben sind grösstenteils aus der Aufgabensammlung von Angelika Rupflin der Kantonsschule am Burggraben St. Gallen

(a) Gegeben sind zwei Quadrate mit den Seitenlängen 3 cm und 5 cm. Konstruieren Sie ein Quadrat dessen Flächeninhalt a) mit der Summe b) mit der Differenz der Inhalte der beiden Quadrate übereinstimmt.
(b) Zeichnen Sie ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 3$ cm und konstruieren Sie dann ein Quadrat, das a) den halben, b) den doppelten, c) den dreifachen Inhalt wie das ursprüngliche hat.
(c) Konstruieren Sie (ausgehend von ganzzahligen Streckenlängen) auf mindestens 2 verschiedene Weisen ein Quadrat mit dem Flächeninhalt
a) 5 cm^2 b) 27 cm^2
(d) Welchen Radius muss ein rundes Backblech mindestens haben, um eine rechteckige Tiefkühlpizza mit den Abmessungen 22 cm × 17 cm in den Ofen zu schieben.
(e) Berechnen Sie die theoretische Blickweite von einem 100 m hohen Leuchtturm aufs Meer. (Erdradius $6.37 \cdot 10^6$ m)
(f) Wie weit unter Wasser liegt die gerade Verbindungslinie von Romanshorn nach Friedrichshafen? Machen Sie eine Skizze. Erdradius: 6370 km. Die Entfernung Romanshorn-Friedrichshafen bitte selbst herausfinden.
(g) Wie hoch darf ein 60 cm tiefer (und sehr breiter) Schrank höchstens sein, damit man ihn aus der liegenden Position in einem 2.4 m hohen Raum durch Kippen aufstellen kann?
Hinweis: Bitte nicht von der Wand im Bild irritieren lassen sondern den Schrank in der Raummitte aufrichten.



(h) Berechnen Sie die Länge aller Seitenhalbierenden in einem rechtwinkligen Dreieck aus den Kathetenlängen a und b. a) $a = 6$ und $b = 10$ b) allgemein mit Parameter a und b
(i) Von einem allgemeinen Dreieck ABC kennt man die Seite $c = 56$ cm, die Höhe $h_c = 15$ cm und die Seitenhalbierende $s_c = 17$ cm. Berechnen Sie die Länge der Seiten a und b.

(j) Die abgebildete Pyramide über dem Eingang des Louvre in Paris ist 21.6 m hoch. Ihre Grundfläche ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 34.2 m. Wie gross ist die Glasfläche?



(k) Gegeben sei eine Strecke der Länge a.
Konstruieren Sie a) $\sqrt{61}a$ b) $\sqrt{153}a$ c) $\sqrt{7}a$

(l) Gegeben sind die Punkte $A = (-3, -2)$, $B = (6, 1)$ und $C = (-5, 4)$. Prüfen Sie durch Rechnung, ob das Dreieck ABC rechtwinklig ist. (Keine genaue Zeichnung verlangt, aber eine Skizze ist sicherlich hilfreich!)

(m) Überprüfen Sie durch Rechnung, ob das Dreieck ABC mit $A = (2, 1)$, $B = (1, 10)$ und $C = (6, 5)$ rechtwinklig ist und geben Sie den Flächeninhalt an! (Grobe Skizze empfohlen!)

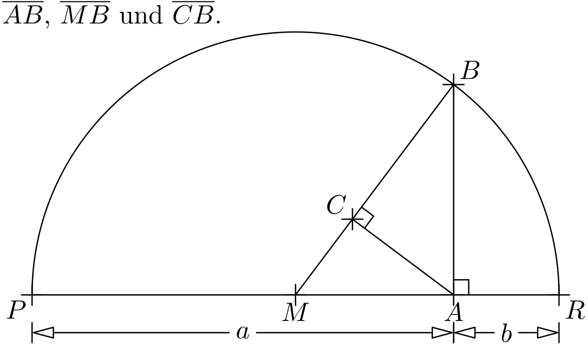
(n) Verwandeln Sie ein Dreieck mit den Seiten langweilige alte Werte 3 cm, 4 cm, 5 cm neue Werte etwa 6 cm, 7 cm, 8cm per Konstruktion mit Zirkel und Lineal in ein flächengleiches Quadrat.

(o) Verwandeln Sie ein Quadrat mit Seitenlänge 7.5 cm per Konstruktion mit Zirkel und Lineal in ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite 5.5 cm lang ist. Erläutern Sie kurz Ihr Vorgehen!

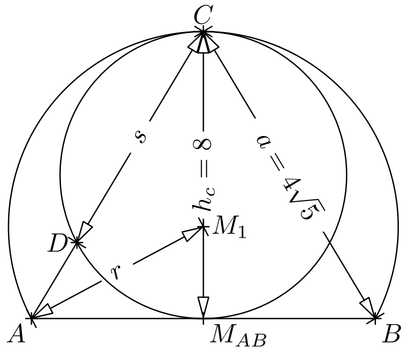
(p) Ein Matrose sitzt auf hoher (und ruhiger) See im Ausguck eines Schiffes 25 m über dem Wasser. In welcher Entfernung (Luftlinie) sieht er frühestens
(i) eine auf dem Wasser treibende Luftmatratze?
(ii) einen anderen Matrosen, der seinerseits in einem Ausguck 30 m über der Wasseroberfläche sitzt?
Hinweise: Fertigen Sie eine Skizze an. Erdradius: 6370 km

Aufgabe 8.19

a) Berechnen Sie aus a und b die Längen der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{MB}$ und $\overline{CB}$.



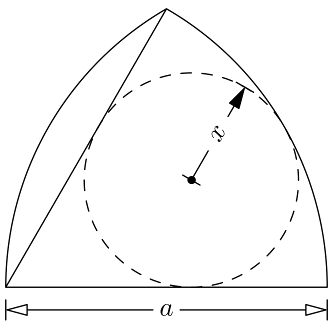
b) Berechnen Sie s und r aus $a = 4\sqrt{5}$ und $h_c = 8$.



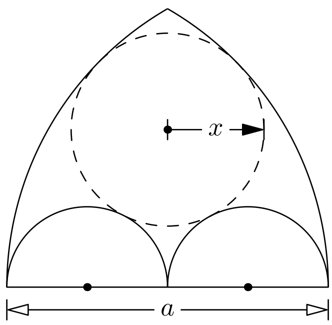
Aufgabe 8.20

Berechnen Sie aus a den Radius x der skizzierten Füllkreise.

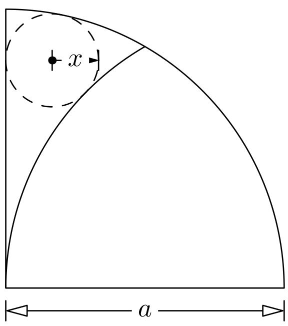
a)



b)



c)



Hinweis zu a): Suchen Sie das 30°-60° Dreieck.

Hinweise zu b) und c): Berechnen Sie den Abstand vom Kreiszentrum zur Grundlinie auf zwei Arten.

8.5 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

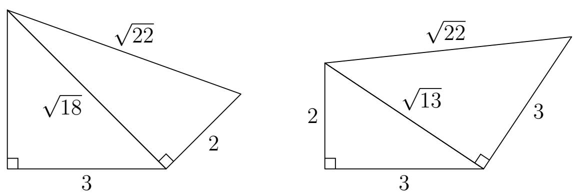
Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 8.1 ex-pythagoras-wurzelschnecke

a) Wegen $13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2$ zeichnet man ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten der Länge 3 und 2 (entlang der Linien des Kästchenpapiers). Seine Hypotenuse hat die gesuchte Länge $\sqrt{13}$.

b) Wegen $22 = 9 + 9 + 4 = 3^2 + 3^2 + 2^2 = 18 + 4 = 13 + 9$ tut es jede der rechts durch Zeichnungen angedeuteten Konstruktionen. Die Rechnungen zu den Beschriftungen in der linken Konstruktion sind $\sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$ und $\sqrt{\sqrt{18}^2 + 2^2} = \sqrt{18 + 4} = \sqrt{22}$.



c) Die Längen links sind in offensichtlicher Reihenfolge: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4} = 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$.
Die Längen rechts sind $\sqrt{2} \cdot a, \sqrt{3} \cdot a, \sqrt{4} \cdot a = 2a, \sqrt{5} \cdot a, \sqrt{6} \cdot a, \sqrt{7} \cdot a$.

Lösung zu Aufgabe 8.2 ex-pythagoras-beweise

Gegeben ist jeweils ein rechtwinkliges Dreieck mit den üblichen Bezeichnungen.

a) Zur Skizze: Man startet mit dem inneren Quadrat (mit Seitenlänge c) und setzt auf die vier Seiten jeweils das gegebene rechtwinklige Dreieck (dabei wird dieses nur verschoben und gedreht, aber nicht gespiegelt). Dabei entsteht ein grosses Quadrat mit Seitenlänge $a + b$, denn an den vier Ecken des inneren Dreiecks ergänzen sich die drei Winkel jeweils zu 180° (wegen $\alpha + \beta + 90° = \alpha + \beta + \gamma = 180°$ mit den üblichen Bezeichnungen).

Mit den Katheten a, b und der Hypotenuse c kann man die Gesamtfläche des grossen Quadrats auf zwei Arten berechnen und die entstehende Gleichung vereinfachen:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= c^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}ab\right) \\
a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 2ab \qquad \qquad | -2ab \\
a^2 + b^2 &= c^2
\end{aligned}
$$

was zu beweisen war.

b) Zur Skizze: Nun startet man mit äusseren Quadrat (mit Seitenlänge c) und legt das gegebene Dreieck „nach innen" an seine vier Seiten. Die von jeder Ecke des Quadrats ausgehenden beiden Dreiecksseiten kommen dabei auf derselben Geraden zu liegen (wegen $\alpha + \beta = 90°$). Dass innen ein Quadrat entsteht, ist dann klar. Die Seitenlänge dieses inneren Quadrats ist $b - a$ (falls $b \geq a$ wie in der Zeichnung).

Mit den Katheten a, b und der Hypotenuse c kann man die Gesamtfläche des grossen Quadrats auf zwei Arten berechnen und die entstehende Gleichung vereinfachen:

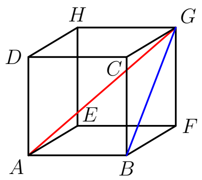
$$
\begin{aligned}
c^2 &= (b-a)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}ab\right) \\
c^2 &= b^2 - 2ba + a^2 + 2ab \\
c^2 &= a^2 + b^2
\end{aligned}
$$

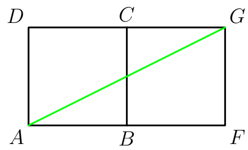
was zu beweisen war. (Im Fall $b < a$ hat das innere Quadrat Seitenlänge $a - b$ und die Rechnung geht analog wegen $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.)

Lösung zu Aufgabe 8.3 ex-pythagoras-ab-gleich-hc

Die Fläche des Dreiecks kann auf zwei Arten mit der Formel "Grundseite mal Höhe geteilt durch Zwei" berechnet werden: $\frac{1}{2}ab = (\text{Dreiecksfläche}) = \frac{1}{2}hc$. Nun multipliziere mit 2.

Lösung zu Aufgabe 8.4 ex-pythagoras-raumdiagonale





(a) Die blaue (Seitenflächen-)Diagonale $[BG]$ hat wegen Pythagoras die Länge $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Da das Dreieck $\triangle ABG$ rechtwinklig bei B ist, hat die rote Raumdiagonale die Länge $\sqrt{\sqrt{2}^2+1^2} = \sqrt{2+1^2} = \sqrt{3}$.

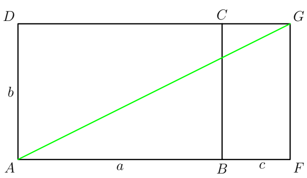
(b) Klappt man den Würfel auf, so ist die grüne Strecke $[AG]$ ein kürzestes Weg für die Spinne (es gibt fünf andere genauso kurze Wege). Seine Länge ist $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$.

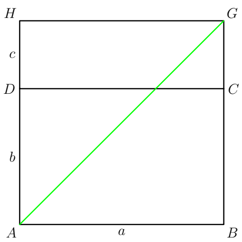
(c) Zunächst gilt $\overline{BG} = \sqrt{b^2+c^2}$. Somit hat die Raumdiagonale die Länge $\overline{AG} = \sqrt{a^2+\sqrt{b^2+c^2}^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

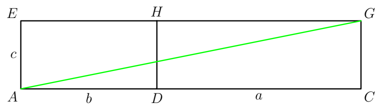
(d) Der bei der Kante $[BC]$ aufgeklappte Würfel ist unten links abgebildet und der kürzeste Weg von A nach G über diese Kante ist grün eingezeichnet. Seine Länge ist

$$\sqrt{(a+c)^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2+2ac}$$

(e) Der kürzeste Weg muss über eine der sechs Kanten $[BC]$, $[CD]$, $[DH]$, $[HE]$, $[EF]$, $[FB]$ führen. Wenn man jeweils die beiden an diesen Kanten anliegenden Würfelseiten aufklappt, erhält man sechs Figuren, von denen unten drei abgebildet sind; die anderen drei sehen bis auf Vertauschen gegenüberliegender Eckpunkte genauso aus. Man berechnet die Längen der drei grünen Strecken (von links nach rechts) zu $\sqrt{a^2+(b+c)^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2+2ac}$, $\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc}$ und $\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab}$. Wegen $0 \leq c \leq b \leq a$ gilt $bc \leq ac \leq ab$. Also ist $\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc}$ kleiner-gleich als die beiden anderen Weglängen. Der mittlere grüne Weg ist also kürzer als die beiden anderen, wie man auch leicht mit dem Lineal überprüft. In Worten ist es also für die Spinne am kürzesten, einen der beiden Wege über die längste Kante zu nehmen (genauer den über $[DC]$ oder den über $[EF]$.







Lösung zu Aufgabe 8.5 ex-pythagoras-umkehrung-leicht

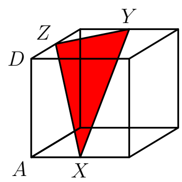
(a) $a^2 = b^2 = 9+16 = 25 = c^2$. Also ist das Dreieck rechtwinklig mit rechtem Winkel bei C.

(b) $a^2+b^2 = 25+144 = 169 = c^2$. Also ist das Dreieck rechtwinklig mit rechtem Winkel bei C.

(c) $a = 17$, $b = 15$, $c = 8$. Hier gilt $c^2+b^2 = 64+225 = 289 = a^2$. Also ist das Dreieck rechtwinklig mit Hypotenuse a, d.h. der rechte Winkel ist bei A.

(d) $a^2 = 16$, $b^2 = 25$, $c^2 = 36$ und keine Summe von zweien dieser Quadrate ist das dritte Quadrat. Also ist das Dreieck nicht rechtwinklig. Einfacher: Es genügt zu testen, dass die Summe der beiden kleineren Quadrate nicht das grösste Quadrat ist: $16+25 = 41 \neq 36$.

Lösung zu Aufgabe 8.6 ex-pythagoras-umkehrung



Mit Pythagoras berechnet man:

$$\overline{XY}^2 = a^2+a^2 = 2a^2$$
$$\overline{YZ}^2 = \left(\tfrac{a}{2}\right)^2+\left(\tfrac{a}{2}\right)^2 = 2\tfrac{a^2}{4} = \tfrac{a^2}{2}$$
$$\overline{XZ}^2 = \overline{AX}^2+\overline{AZ}^2 = \overline{AX}^2+\overline{AD}^2+\overline{DZ}^2 = \left(\tfrac{a}{2}\right)^2+a^2+\left(\tfrac{a}{2}\right)^2 = 3\tfrac{a^2}{2}$$

Wir vermuten auf Grund der Zeichnung, dass das Dreieck XYZ bei Z einen rechten Winkel hat. Wegen

$$\overline{XZ}^2 + \overline{YZ}^2 = 3\tfrac{a^2}{2} + \tfrac{a^2}{2} = 4\tfrac{a^2}{2} = 2a^2 = \overline{XY}^2$$

stimmt unsere Vermutung nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras.

Lösung zu Aufgabe 8.7 ex-tabelle-pythagoras-etc

Die Formeln für die erste Zeile findet man in der Lösung von Aufgabe 8.8.
Für die zweite Zeile verwende man Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck $\triangle HBC$: Es gilt $a^2 = p^2 + h^2$. Dann kennt man p und kann wie in der ersten Zeile alles ausrechnen.
Dritte Zeile und vierte Zeile: Verwende $c = p + q$ und berechne dann mit dem Kathetensatz a und b etc.

a	b	c	p	q	h	F
3	4	5	$\frac{9}{5} = 1.8$	$\frac{16}{5} = 3.2$	$\frac{12}{5} = 2.4$	6
13	31.2	33.8	5	28.8	12	202.8
15	20	25	9	16	12	150
$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$	$\sqrt{56} = 2\sqrt{14}$	8	1	7	$\sqrt{7}$	$4\sqrt{7}$

Bemerkung: Die Zahlen in der vorletzten Zeile gehören zu dem kleinsten rechtwinkligen Dreieck, bei dem all diese Zahlen ganzzahlig sind. Es entsteht aus dem Dreieck in der ersten Zeile durch Streckung um den Faktor $c = 5$ (wobei sich die Fläche um den Faktor $5^2 = 25$ ändert).

Lösung zu Aufgabe 8.8 ex-umkehrformeln

a) $\boxed{c = \sqrt{a^2+b^2}}$. Die doppelte Dreiecksfläche ist $ab = ch$ und daraus $h = \frac{ab}{c}$, eingesetzt für c: $\boxed{h = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$. Kathetensatz: $cp = a^2$ also $p = \frac{a^2}{c}$, eingesetzt für c: $\boxed{p = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}}$. Entsprechend $\boxed{q = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}}$.

b) $\boxed{h = \sqrt{a^2 - p^2}}$, Kathetensatz $cp = a^2$ also $\boxed{c = \frac{a^2}{p}}$. Aus $p+q = c$ ergibt sich $q = c-p$, also $\boxed{q = \frac{a^2}{p} - p}$. Für b bieten sich jetzt viele Wege an, z.B. $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, eingesetzt für c: $\boxed{b = \sqrt{\frac{a^4}{p^2} - a^2}}$. Hinweis: Die letzte Formel lässt sich zu $b = a\frac{h}{p}$ vereinfachen.

c) $\boxed{h = \sqrt{pq}}$ (dies bedeutet, dass die Höhe h das *geometrische Mittel* der beiden Hypotenusenabschnitte p und q ist; im Englischen heisst der Höhensatz deswegen *geometric mean theorem*). $\boxed{c = p + q}$. $a = \sqrt{h^2 + p^2}$, eingesetzt für h: $\boxed{a = \sqrt{pq + p^2}}$, entsprechend $\boxed{b = \sqrt{pq + q^2}}$.

d) $\boxed{q = c - p}$. Aus dem Höhensatz ergibt sich $\boxed{h = \sqrt{p(c-p)}}$, aus dem Kathetensatz $\boxed{a = \sqrt{cp}}$ und $\boxed{b = \sqrt{c(c-p)}}$

e) Kurzfassung: Der Leser überlege sich, dass $(c+q)^2 = 4b^2 + p^2$ gilt (linke Seite ausmultiplizieren; $cq = b^2$; Pythagoras in den drei rechtwinkligen Dreiecken). Damit kann man $x := c+q$ berechnen. Wegen $x+p = c+q+p = 2c$ erhält man c und dann $q = x-c$. Der Rest ist einfach.

Langfassung: Die folgende Rechnung zeigt $(c+q)^2 = 4b^2 + p^2$:

$$(c+q)^2 = c^2 + 2cq + q^2 \overset{\text{Pythagoras}}{=} a^2 + b^2 + 2cq + q^2 \overset{\text{Pythagoras und Kathetensatz}}{=} p^2 + h^2 + b^2 + 2b^2 + q^2$$
$$= p^2 + 3b^2 + h^2 + q^2 \overset{\text{Pythagoras}}{=} p^2 + 3b^2 + b^2 = 4b^2 + p^2$$

Somit gilt $c + q = \sqrt{4b^2+p^2}$. Addition von p auf beiden Seiten liefert wegen $c = q + p$ die Gleichung

$$2c = c + q + p = \sqrt{4b^2+p^2} + p$$

und dann per Division durch 2 den gesuchten Ausdruck für c in Abhängigkeit von p und b:

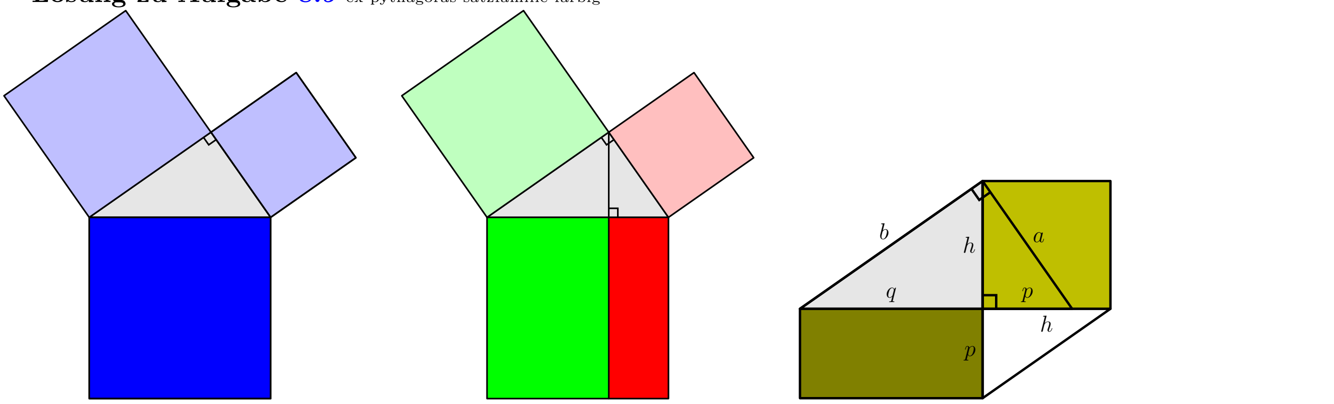
$$\boxed{c = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4b^2+p^2} + p\right)}$$

Subtraktion von p auf beiden Seiten liefert $\boxed{q} = c - p = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4b^2+p^2}+p\right) - p = \boxed{\frac{1}{2}\left(\sqrt{4b^2+p^2} - p\right)}$.
Schliesslich liefern Höhen- und Kathetensatz die (relativ komplizierten) Formeln

$$h = \sqrt{pq} = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\sqrt{4b^2+p^2} - p\right)} \quad \text{bzw.} \quad a = \sqrt{cp} = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\sqrt{4b^2+p^2} + p\right)}$$

Wie meist, gibt es auch andere Lösungswege – beispielsweise kann man a auch per $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ ausrechnen (und kommt mit etwas Rechnen auf dasselbe Ergebnis).

Lösung zu Aufgabe 8.9 ex-pythagoras-satzfamilie-farbig



Pythagoras: hellblau = blau   Kathetensatz: hellgrün = grün und hellrot = rot   Höhensatz: helloliv = oliv

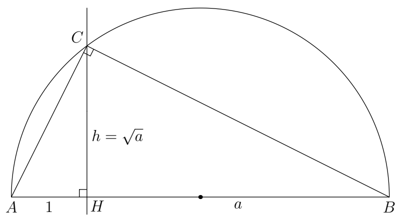
Lösung zu Aufgabe 8.10 ex-pythagoras-satzfamilie-lueckentext

In jedem $\boxed{\text{rechtwinkligen}}$ Dreieck gilt

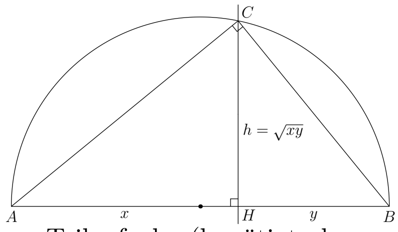
- laut dem Satz von Pythagoras: $\boxed{\text{die Summe}}$ $\boxed{\text{der Quadrate}}$ $\boxed{\text{der Katheten}}$ ist so gross wie $\boxed{\text{das Quadrat}}$ $\boxed{\text{der Hypotenuse}}$
- laut dem Kathetensatz: $\boxed{\text{das Produkt}}$ $\boxed{\text{von Hypotenuse}}$ und $\boxed{\text{Hypotenusenabschnitt}}$ ist so gross wie $\boxed{\text{das Quadrat}}$ $\boxed{\text{der zugehörigen Kathete}}$
- laut dem Höhensatz: $\boxed{\text{das Produkt}}$ $\boxed{\text{der beiden Hypotenusenabschnitte}}$ ist so gross wie $\boxed{\text{das Quadrat}}$ $\boxed{\text{der Höhe}}$

Lösung zu Aufgabe 8.11 ex-geometrisches-wurzelziehen-und-multiplizieren

(a) Geometrisches Wurzelziehen: Trage von einem beliebigen Punkt H auf einer beliebigen Geraden die Strecken 1 und a in beide Richtungen ab wie in der Zeichnung. Errichte in H die Senkrechte zu der Geraden und schneide diese mit dem Thaleskreis über $[AB]$. Nenne den Schnittpunkt C. Das Dreieck $\triangle ABC$ ist nach dem Satz von Thales rechtwinklig mit Hypotenusenabschnitten a und 1. Nach dem Höhensatz gilt $h^2 = a \cdot 1 = a$, also $h = \sqrt{a}$.



(b) Rechteck zu Quadrat: Ähnlich wie in der vorigen Teilaufgabe konstruiert man ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenusenabschnitten x und y. Nach dem Höhensatz gilt $h = \sqrt{xy}$. Also hat das Quadrat mit Seitenlänge h die Fläche $h^2 = xy$ wie gewünscht.



(c) Quadrat zu Rechteck: Man verwendet dieselbe Zeichnung wie in der vorigen Teilaufgabe (benötigt aber den Thales-Kreis gar nicht), wobei $h = s$ die Seitenlänge des Quadrats ist. Von dieser trägt man an einem Ende rechtwinklig die Seite x ab und erhält so das Dreieck $\triangle AHC$. Die Senkrechte zu (AC) durch C schneidet die Gerade (AH) in einem Punkt, den wir B nennen. Dann ist das Dreick $\triangle ABC$ rechtwinklig mit Höhe h und Hypotenusenabschnitten x und $[HB]$. Dieser zweite Hypotenusenabschnitt $y := [HB]$ ist die gesuchte zweite Rechteckseite, denn es gilt $xy = h^2 = s^2$.

(d) Geometrisches Multiplizieren: Mit Teilaufgabe (b) konstruiert man ein Quadrat mit Fläche xy. Aus diesem konstruiert man mit Teilaufgabe (c) ein flächengleiches Rechteck mit vorgegebener Seite der Länge 1. Die andere Seite hat dann die Länge xy.

Lösung zu Aufgabe 8.12 ex-flaechenverwandlung-mit-kathetensatz

(a) Nimm die längere der beiden Rechtecksseiten (nenne sie c) und trage auf ihr „von rechts“ die kürzere Rechtecksseite ab (nenne diese p). Mit Hilfe des Thaleskreis über c konstruiert man leicht ein rechtwinkliges Dreieck, dessen einer Hypotenusenabschnitt p ist. Dann gilt nach dem Kathetensatz $a^2 = cp$. Also ist a die Seitenlänge des gesuchten Quadrats.

(b) Im Wesentlichen geht das umgekehrt, jedoch muss man zwei Fälle unterscheiden:
Fall 1, $x > s$: Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks mit $a := s$ und $c := x$: Trage die Strecke $c = [AB]$ an beliebiger Stelle ab. Der Thaleskreis über dieser Strecke ist der 1.g.O.f. C. Der Kreis $k(B, a)$ ist der 2.g.O.f. C. Jeder der beiden Schnittpunkte dieser beiden Kreise ist ein möglicher Punkt C. Der Höhenfusspunkt auf c kann nun konstruiert werden, und so erhält man die beiden Hypotenusenabschnitte p und q. Dann gilt $xp = cp = a^2 = s^2$. Also ist p die gesuchte zweite Rechtecksseite.
Fall 2, $x < s$: Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks mit $a := s$ und $p := x$:
Trage die Strecke $a = [BC]$ an beliebiger Stelle ab. Der Thaleskreis über dieser Strecke ist der 1.g.O.f. H. Der 2.g.O.f H ist der Kreis $k(B, p)$. Nenne einen der beiden Schnittpunkt dieser beiden Kreise H. Das Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C kann nun ergänzt werden (nutze den rechten Winkel bei C). Dann gilt $cx = cp = a^2 = s^2$. Also ist c die gesuchte zweite Rechtecksseite.

Lösung zu Aufgabe 8.13 ex-beweis-hoehensatz-durch-zerlegung

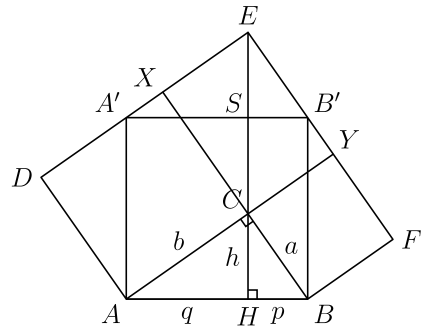
In der ersten Zeile ist die Zerlegung des rechtwinkligen Ausgangsdreiecks durch Zerschneiden entlang der Höhe in zwei rechtwinklige Teildreiecke dargestellt. Nun dreht man des gelbe Dreieck und legt es wie in der zweiten Zeile gezeigt einmal oberhalb und einmal unterhalb an das rote Dreieck. Zusammen mit den grün dargestellten Flächen ergeben sich zwei grosse Dreiecke (es handelt sich wirklich um Dreiecke, denn am Übergang vom roten zum gelben Dreieck entsteht kein Knick, da sich die drei Winkel dort jeweils zu 180° ergänzen). Diese beiden grossen Dreiecke sind per Konstruktion deckungsgleich, haben also insbesondere dieselbe Fläche. Also gilt

$$\begin{aligned} h^2 &= (\text{Fläche grünes Quadrat}) = (\text{Fläche grosses Dreieck}) - (\text{Fläche gelbes Dreieck}) - (\text{Fläche gelbes Dreieck}) \\ &= (\text{Fläche grünes Rechteck}) = pq \end{aligned}$$

Dies ist der Höhensatz!

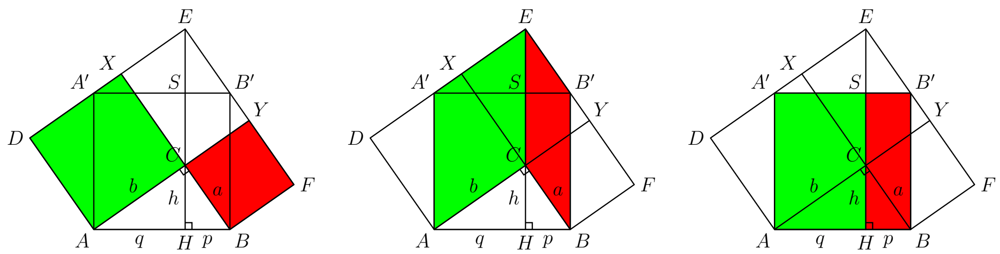
Lösung zu Aufgabe 8.14 ex-beweis-kathetensatz-durch-scherung

Die fertiggestellte Zeichnung ist rechts dargestellt. Die drei Zeichnungen unten illustrieren, dass das grüne Quadrat $DACX$ dieselbe Fläche hat wie das grüne Rechteck $AHSA'$. Dies liegt daran, dass das in der Mitte eingezeichnete grüne Parallelogramm $ACEA'$ sowohl aus dem Quadrat als auch aus dem Rechteck durch Scherung hervorgeht (jeweils eine gemeinsame Grundseite und dieselbe Höhe). Wie gewünscht erhält man daraus die eine Aussage des Kathetensatzes:



$$b^2 = (\text{Fläche grünes Quadrat}) = (\text{Fläche grünes Rechteck}) = qc$$

Analog sind die roten Gebiete flächengleich, was $a^2 = pc$ zeigt.
Addition der beiden Gleichungen $a^2 = pc$ und $b^2 = qc$ liefert $a^2+b^2 = pc+qc = (p+q)c = c^2$ alias den Satz von Pythagoras.



Lösung zu Aufgabe 8.15 ex-rechtwinklig-gleischschenkliges-dreieck

a) $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, also $c = \sqrt{2}a$.

b) Aus $c = \sqrt{2}a$ erhält man $a = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{c\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot c$.

Lösung zu Aufgabe 8.16 ex-30-60-90-dreieck

a) Erst ist zu bemerken, dass das 30°-60°-90°-Dreieck ein halbes gleichseitiges Dreieck ist, d.h. $a = \frac{1}{2}c$.

$\boxed{a \text{ gegeben:}}$ $c = 2a$ und $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3} \cdot a$.

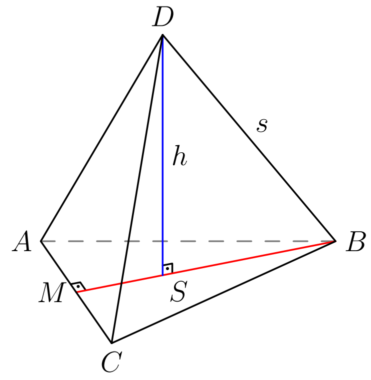
$\boxed{b \text{ gegeben:}}$ Aus $b = \sqrt{3}a$ erhält man $a = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{b\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot b$.

Wegen $c = 2a$ folgt daraus $c = 2a = \frac{2\sqrt{3}}{3}b$.

$\boxed{c \text{ gegeben:}}$ $a = \frac{1}{2}c$ und $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}c^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}c = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

b) Zeichnet man eine Höhe h ein, so erhalten wir ein 30°-60°-90°-Dreieck mit *Hypotenuse* a und Katheten $\frac{1}{2}a$ und h. Nach Pythagoras gilt $h^2 = a^2 - (\frac{1}{2}a)^2 = \frac{3}{4}a^2$, also $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (bis auf Umbenennungen ist dies die letzte Formel in der vorigen Teilaufgabe). Die Fläche ist damit $F = \frac{1}{2}ah = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Lösung zu Aufgabe 8.17 ex-pythagoras-tetraeder



Der Tetraeder besteht – wie schon der Name besagt – aus 4 Flächen. Er hat 6 Kanten und 4 Ecken; das ist hoffentlich klar aus dem Bild rechts. Der Punkt M dort ist der Mittelpunkt zwischen A und C.
Zur Seitenhöhe: Die rot eingezeichnete Strecke $[MB]$ ist eine solche Höhe (der „unten liegenden" Seite). Wie in Aufgabe 8.16 berechnet, hat sie die Länge $\overline{MB} = \frac{\sqrt{3}}{2}s \approx 0.8660s$.
Zur Körperhöhe: Sei S derjenige Punkt im Dreieck ABC, für den $[DS]$ senkrecht auf dem Dreieck steht. Dann ist $h = [DS]$ die Höhe des Tetraeders. Aus Symmetriegründen muss S der Schwerpunkt des Dreiecks ABC sein (erkläre ich gerne genauer, wenn gewünscht).
Hoffentlich ist aus der Sekundarschule bekannt, dass der Schwerpunkt jedes Dreiecks jede Seitenhalbierende im Verhältnis $2 : 1$ teilt. Also gilt $\overline{SB} = \frac{2}{3}\overline{MB} \overset{\text{siehe oben}}{=} \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}s = \frac{\sqrt{3}}{3}s$. Pythagoras, angewandt auf das *rechtwinklige* Dreieck BDS liefert somit

$$h = \sqrt{s^2 - \overline{SB}^2} = \sqrt{s^2 - \frac{3}{9}s^2} = \sqrt{\frac{6}{9}s^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}s \approx 0.8165s$$

Lösung zu Aufgabe 8.18 ex-pythagoras-angelikas-sammlung

(a) a) Katheten mit Länge 3 und 5, dann ist das Hypotenusenquadrat die Lösung
b) Kathete mit Länge 3, Hypotenuse mit Länge 5, dann ist das andere Kathetenquadrat die Lösung
(b) Flächenverwandlung Rechteck → Quadrat (z.B. mit Hilfe des Höhensatzes, wobei ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenusenabschnitt 3 und a) $\frac{3}{2}$, b) 6 und c) 9 zu konstruieren ist. Die Höhe ist dann die gesuchte Quadratseite).
(c) a) z.B. $5 = 1^2 + 2^2$ oder $5 = 3^2 - 2^2$ oder $5 = 1 \cdot 5$. b) $27 = 6^2 - 3^2$ oder $5^2 + 1^2 + 1^2$ oder $27 = 3 \cdot 9$.
(d) 13.9 cm (Halbe Diagonale im Rechteck, zu berechnen mit dem Satz von Pythagoras).
(e) 35.7 km. Sei M der Erdmittelpunkt, L die Spitze des Leuchtturms, T der Berührungspunkt der Tangente durch L an $k(M, r_e)$. Im $\triangle MLT$ gilt: $\overline{LT}^2 = \overline{ML}^2 - \overline{MT}^2 = (r_e + l)^2 - r_e^2$.
(f) Alle Angaben in km. Erdradius $r = 6370$, Distanz $d = 12.2$. Die gesuchte Tiefe ist $r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} \approx 0.0029207$. Also knapp 3m.
(g) maximal 2.32 m. Entscheidend ist die Rechtecksdiagonale bei Schrank. Diese darf höchstens gleich lang wie der Raum hoch sein.
(h) $s_a = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} = \sqrt{109} = 10.44$, $s_b = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}} = \sqrt{61} = 7.81$. Die Schwerlinien sind Hypotenusen in rechtwinkligen Dreiecken!
$s_c = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} = \frac{\sqrt{136}}{2} = 5.83$ C liegt auf dem Thaleskreis und damit ist s_c ein Radius. Das gilt natürlich nur im rechtwinkligen Dreieck!
(i) $a = 39$ $b = 25$. Seien H der Höhenfusspunkt und M_c die Seitenmitte von c.
Erster Fall, H liegt näher bei A als M_c: HM_c ist Kathete im $\triangle HM_cC$. $\overline{HM_c} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$. Damit ist $\overline{HA} = \frac{c}{2} - \overline{HM_c} = 28 - 8 = 20$. b ist Hypotenuse im $\triangle AHC$. $b = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$. a ist Hypotenuse im $\triangle HBC$. $a = \sqrt{15^2 + 36^2} = 39$.
Zweiter Fall, M_c liegt näher bei A als H: Ähnlich wir oben erhält man $a = 25$ und $b = 39$.
(j) Die Höhe jeder der vier Seiten der Pyramide beträgt $h = \sqrt{21.6^2 + (\frac{34.2}{2})^2} \approx 27.54$ m. Die Fläche beträgt deswegen $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 34.2 \cdot h \approx 1884.38$ m^2
(k) a) z.B. $61 = 6^2 + 5^2$ b) z.B. $153 = 12^2 + 3^2$ c) $7 = 4^2 - 3^2$
(l) Die Distanz zweier Punkte kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden. Z.B. ist die Strecke $[AB]$ die Hypotenuse und die Katheten sind parallel zu den Achsen. Deren Länge entspricht dann genau der Differenz der jeweiligen Koordinaten. Berechnet man diese Längen, stellt man fest, dass die Summe der Quadrate von zweien die dritte ergeben und damit ist das Dreieck rechtwinklig.
(m) rechtwinklig, Fläche 20.
(n) Dreieck in ein flächengleiches Rechteck umwandeln etwa per Scherung, so dass ein rechter Winkel entsteht, dann zum Rechteck ergänzen, dann dieses halbieren. Dann Höhen- oder Kathetensatz anwenden.
(o) Höhen- oder Kathetensatz anwenden
(p) (i) 17.85 km (Lösung analog zu Aufgabe (e)). (ii) 37.39 km (Lösung ganz ähnlich zu Aufgabe (f)).

Lösung zu Aufgabe 8.19 ex-satzgruppe-pythagoras-figuren

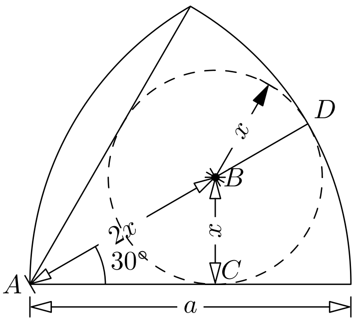
a) Der Kreisbogen ist ein Thaleskreis über $[PR]$, damit ist $\triangle PRB$ rechtwinklig. Damit gilt der Höhensatz und so ist $\overline{AB} = \sqrt{ab}$.
$\overline{MB} = \overline{MR} = \frac{a+b}{2}$ (Kreisradien).
Der Kathetensatz im $\triangle MAB$ besagt: $\overline{MB} \cdot \overline{CB} = \overline{AB}^2$ und damit $\overline{CB} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{MB}} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}$
b) Im $\triangle M_{AB}BC$ gilt: $\overline{M_{AB}B} = \sqrt{a^2 - h_c^2} = \sqrt{80 - 64} = \sqrt{16} = 4$.
Im $\triangle M_{AB}M_1A$ gilt: $r^2 = \overline{M_{AB}A}^2 + (h_c - r)^2$. Eingesetzt:

$$\begin{aligned}
r^2 &= 4^2 + (8-r)^2 && \\
r^2 &= 16 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot r + r^2 && \mid -r^2 \\
0 &= 80 - 16r && \mid +16r \\
16r &= 80 && \mid :16 \\
r &= 5 &&
\end{aligned}$$

Der Punkt D liegt auf dem Thaleskreis über $M_{AB}C$ und damit ist $[M_{AB}D]$ die Höhe im rechtwinkligen $\triangle AM_{AB}C$. Der Kathetensatz besagt: $a \cdot s = h_c^2$ und damit ist $s = \frac{h_c^2}{a} = \frac{64}{4\sqrt{5}} = \frac{16}{\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{5}$

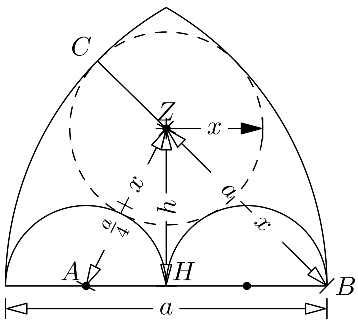
Lösung zu Aufgabe 8.20 ex-pythagoras-fuellkreise

a)



$\triangle ABC$ ist ein 30°-60° Dreieck und damit ist $\overline{AB} = 2\overline{CB}$. Weiter ist $\overline{AD} = a = 3x$ und damit ist $x = \frac{1}{3}a$.

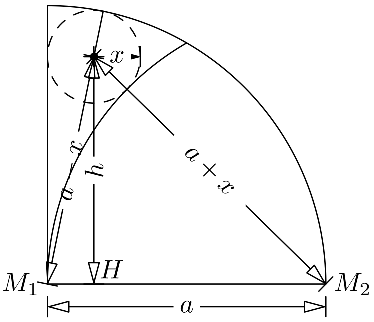
b)



Die Höhe h lässt sich auf 2 Arten berechnen, einmal im $\triangle AHZ$ und einmal im $\triangle HBZ$.

$$\begin{aligned}
h^2 &= h^2 && \\
\left(x + \frac{a}{4}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 &= (a-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 && \\
x^2 + 2x\frac{a}{4} + \frac{a^2}{16} - \frac{a^2}{16} &= a^2 - 2ax + x^2 - \frac{a^2}{4} && \mid -x^2 \\
\frac{ax}{2} &= \frac{3a^2}{4} - 2ax && \mid + \frac{4ax}{2} \\
\frac{5ax}{2} &= \frac{3a^2}{4} && \mid \cdot \frac{2}{5a} \\
x &= \frac{3a}{10} &&
\end{aligned}$$

c)



Die Höhe h kann auf zwei Arten berechnet werden, einmal im $\triangle M_1HZ$ und einmal im $\triangle HM_2Z$:

$$
\begin{aligned}
h^2 &= h^2 \\
(a-x)^2 - x^2 &= (a+x)^2 - (a-x)^2 \\
a^2 - 2ax &= 4ax && \mid +2ax \\
a^2 &= 6ax && \mid :6a \\
\frac{a}{6} &= x
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8.21 Dasselbe Puzzle ist viermal auf dieser Seite abgedruckt, falls noch jemand mitpuzzlen möchte. Das Legespiel wird schwieriger, wenn man die hier angegebene Ausgangsposition nicht kennt - netterweise habe ich die Puzzlesteine nicht zufällig auf der Seite verteilt.)

Schneide die tangram-artigen Puzzle-Teile aus und lege mit ihnen einerseits das grosse Quadrat in der Abbildung zum Kathetensatz aus Aufgabe 8.9 aus, andererseits die beiden kleinen Quadrate in derselben Zeichnung: Dies illustriert den Satz von Pythagoras.

Genauer kannst du mit einem Teil der Puzzle-Teile das rote Rechteck oder alternativ das hellrote Quadrat auslegen; mit dem anderen Teil der Puzzle-Teile kannst du das weisse Rechteck oder alternativ das weisse Quadrat auslegen: Dies illustriert den Kathetensatz.