7 Ungleichungen, Intervalle und Polynombrüche

Aufgabe 7.1 Lösen Sie die folgenden Ungleichungen.

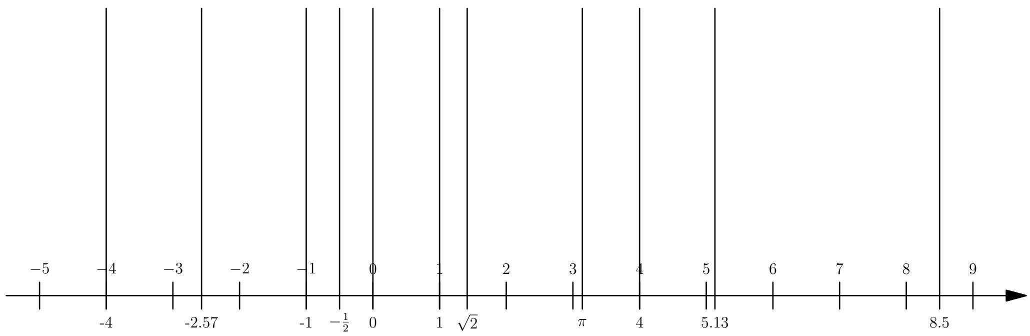
a) $2x - 4 > 2$ b) $3x + 8 < 2$ c) $5x + 2 \leq 3x$ d) $2x - 3 \geq x + 1$

7.1 Intervalle

Um „zusammenhängende“ Bereiche von **reellen** Zahlen anzugeben, wird eine Schreibweise mit eckigen Klammern verwendet, die wir nun durch Beispiele erklären.

$[\sqrt{2}, \pi] = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \leq x \leq \pi\}$	Alle Zahlen von und mit $\sqrt{2}$ bis und mit π.
$]4, 8.5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x \leq 8.5\}$	Alle Zahlen grösser als 4 (ohne die 4) bis und mit 8.5.
$[-4, -\frac{1}{2}[= \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < -\frac{1}{2}\}$	Alle Zahlen von und mit -4 bis $-\frac{1}{2}$ (ohne $-\frac{1}{2}$).
$]0, 1[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$	Alle Zahlen zwischen 0 und 1 ohne 0 und 1.
$]-\infty, 5.13] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5.13\}$	Alle Zahlen kleiner oder gleich 5.13.
$]-2.57, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid -2.57 < x\}$	Alle Zahlen grösser als -2.57 (ohne -2.57).

Das Symbol ∞ (oder auch $+\infty$) bedeutet „plus Unendlich“ und ist grösser als jede reelle Zahl.
Das Symbol $-\infty$ bedeutet „minus Unendlich“ und ist kleiner als jede reelle Zahl.



Merke

Intervalle sind **Mengen von reellen Zahlen** und werden mit eckigen Klammern geschrieben, wobei zuerst die untere Grenze und dann die obere Grenze angegeben wird (durch ein Komma getrennt). Ist die Klammer „richtig herum“, gehört die Grenze dazu und das Intervall ist an dieser Grenze **geschlossen**. Anderfalls ist das Intervall an dieser Grenze **offen**. Da die Symbole $-\infty$ und ∞ keine Zahlen sind, gehören sie nie zu einem Intervall und die Klammern bei diesen Symbolen als Grenzen sind immer «offen».

Aufgabe 7.2 Geben Sie die Lösungsmengen der Aufgabe 7.1 als Intervall an.

a) $x > 3$, also $\mathbb{L} =]3, \infty[$ b) $x < -2$, also $\mathbb{L} =]-\infty, -2[$

c) $x \leq -1$, also $\mathbb{L} =]-\infty, -1]$ d) $x \geq 4$, also $\mathbb{L} = [4, \infty[$

Aufgabe 7.3 Was ist die kleinste Zahl im Intervall $[3, 4[$? Was ist die grösste Zahl im Intervall $[3, 4[$?

7.2 Ungleichungen

Aufgabe 7.4 Lösen Sie die folgenden Ungleichungen und geben Sie jeweils die Lösungsmenge als Intervall an. Überprüfen Sie, ob Ihr Resultat stimmen kann, indem Sie als Test mindestens ein Element des Intervalls einsetzen.

a) $-5x > 5$ b) $-\frac{x}{2} \leq -6$ c) $-x < 2$

7.2.1 Umformungen von Ungleichungen

Aufgabe 7.5 Erklären Sie schlüssig mit Hilfe einer Waage (das Gewicht auf einer Seite ist höher als das auf der anderen Seite), warum bei Ungleichungen das Addieren bzw. Subtrahieren eines beliebigen Terms eine Äquivalenzumformung ist (also die Lösungsmenge nicht ändert).

Aufgabe 7.6 Wie steht es mit der Multiplikation einer Ungleichung? Worauf ist zu achten? Erklären Sie ebenfalls mit Hilfe einer Waage (und finden Sie eine Interpretation für ein negatives Gewicht auf der Waage).

Aufgabe 7.7 Lösen Sie die folgende Ungleichung auf zwei Arten: Einmal nur mit Addition/Subtraktion, einmal nur mit Multiplikation:

$$-x > 4$$

Merke

Bei Ungleichungen darf man uneingeschränkt addieren (und subtrahieren). Beim Multiplizieren (und Dividieren) mit einer ✎ negativen Zahl muss das Vergleichszeichen umgedreht werden:

- $<$ wird zu $>$ und umgekehrt;
- $\leq$ wird zu $\geq$ und umgekehrt.

7.3 Rechnen mit Polynombrüchen

Ein **Polynombruch** ist ein Bruch, dessen Zähler und Nenner Polynome sind (der Nenner muss von 0 verschieden sein); altmodisches Wort dafür: Bruchterm.

7.3.1 Kürzen und Erweitern

Beispiel:

Kürzen: $\dfrac{17x}{x^2-x} = \dfrac{17x}{x(x-1)} = \dfrac{17}{x-1}$

Erweitern (= Kürzen „andersherum“ gelesen): $\dfrac{17}{x-1} = \dfrac{17x}{x(x-1)} = \dfrac{17x}{x^2-x}$

Merke

Kürzen (bzw. Erweitern) von Brüchen: $\dfrac{P \cdot R}{Q \cdot R} = \dfrac{P}{Q}$

In Worten: Taucht ein Term (in der obigen Formel R) sowohl im Zähler als auch im Nenner eines Bruchs *als Faktor* auf, so darf dieser Term „weggekürzt“ werden.

Wenn man einen Bruch kürzen möchte, sollte man also zunächst versuchen, Zähler und Nenner als Produkt von Faktoren zu schreiben. Taucht dabei ein Faktor sowohl oberhalb als auch unterhalb des Bruchstrichs auf, kann man ihn wegkürzen. Beachten Sie, dass die Faktoren beliebig kompliziert sein dürfen.

Aufgabe 7.8 Kürzen Sie soweit wie möglich, indem Sie gemeinsame Faktoren in Zähler und Nenner suchen!

a) $\dfrac{az+bz}{cz}$ b) $\dfrac{a+b+y^7}{y^7+b+a}$ c) $\dfrac{b-a}{a-b}$

d) $\dfrac{-a-b}{a+b}$ e) $\dfrac{x^2-y}{y-x^2}$ f) $\dfrac{6z^2+6x}{-3x-3z^2}$

g) $\dfrac{3x^2-3x^3}{x(x^2-1)}$ h) $\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-4}$ i) $\dfrac{v^3-3v^2+3v-1}{2v^3-v^2-1}$

7.3.2 Addition und Subtraktion von Brüchen

Merke

Vor der **Addition** (oder Subtraktion) von zwei Brüchen, müssen die Brüche erst **gleichnamig** gemacht werden, indem man sie **erweitert**. **Gleichnamige Brüche** werden addiert, indem man die **Zähler addiert**.

Aufgabe 7.9 Geben Sie jeweils das Ergebnis der Rechnung als möglichst weit gekürzten Bruch an. Falls möglich, faktorisieren Sie zuerst den Nenner! Machen Sie dann die Brüche gleichnamig, fassen Sie zusammen, faktorisieren Sie und kürzen Sie, falls möglich.

a) $\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y}$ b) $\dfrac{4}{z-1} + \dfrac{z-9}{z^2-1}$ c) $\dfrac{n}{n+1} - \dfrac{2n+1}{n-1} + \dfrac{n^2+5n}{n^2-1}$

d) $\dfrac{a}{a^2-b^2} + \dfrac{b}{(a-b)^2}$ e) $\dfrac{b-c}{a^2+ac} - \dfrac{a-b}{ac+c^2} + \dfrac{a^2+c^2}{a^2c+ac^2}$ f) $\dfrac{3s}{(s-2)^2} - \dfrac{2}{s} + \dfrac{s+4}{2s-s^2}$

7.3.3 Multiplikation und Division von Brüchen

Merke

Bruch mal Bruch, wie macht's der Kenner? Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner.
Es wird durch einen Bruch dividiert, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert.

Aufgabe 7.10 Vereinfachen Sie soweit wie möglich. *Hinweis: Es ist oft besser, erst die Summe oder Differenz als einen Bruch zu schreiben, bevor multipliziert wird (anstatt auszumultiplizieren).*

a) $\dfrac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\left(\dfrac{u}{u+v} + \dfrac{v}{u-v}\right)$ b) $\left(\dfrac{1}{r-s} - \dfrac{1}{r+s}\right)^2$

c) $\left(\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d}\right) : \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}\right)$ d) $\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) : \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

e) $\left(a^2 + 2 + \dfrac{1}{a^2}\right) : \left(a^2 - \dfrac{1}{a^2}\right)$ f) $\dfrac{1}{n^2+2n+1} \cdot \left(\dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right)$

g) $\left(\dfrac{3n^2(n+1) - 2n(n^2+4)}{n+1} + 12\right) : (n^2+4) - \dfrac{2}{n+1} + \dfrac{1-n^2}{n^2+n}$

7.3.4 Weitere Aufgaben

Aufgabe 7.11 Der Kilopreis (= Kilogrammpreis) von Kaffeesorte A ist 2 Franken höher als derjenige von Sorte B. Von Sorte B erhält man für 160 Franken acht Kilogramm mehr als von Sorte A für 120 Franken. Berechnen Sie den Kilopreis von Sorte A.

Aufgabe 7.12 Falls ein Fehler vorhanden ist, erklären und korrigieren Sie diesen. Wenn kein Fehler vorhanden ist, erklären Sie, wie man das einfacher machen könnte.

a) $2 \cdot \dfrac{ab}{a^2-b^2} = \dfrac{2ab}{2a^2-2b^2}$

b) $\dfrac{b}{a+b} \cdot \dfrac{a}{a-b} = \dfrac{b(a-b)}{a^2-b^2} \cdot \dfrac{a(a+b)}{a^2-b^2}$

c) $\dfrac{b(a-b)}{a^2-b^2} \cdot \dfrac{a(a+b)}{a^2-b^2} = \dfrac{b(a-b)\cdot a(a+b)}{a^2-b^2}$

d) $\dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2} - \dfrac{ab-b^2}{a^2-b^2} = \dfrac{a^2+ab-ab-b^2}{a^2-b^2} = \dfrac{a^2-b^2}{a^2-b^2} = 1$

e) $\dfrac{a-b}{a^2-ab} : \dfrac{b^2-ab}{a-b} = \dfrac{\cancel{a-b}}{a^2-ab} : \dfrac{b^2-ab}{\cancel{a-b}} = \dfrac{1}{a^2-ab} : \dfrac{b^2-ab}{1}$

f) $\dfrac{1}{a^2-ab} - \dfrac{b^2-ab}{1} = \dfrac{1}{a^2-ab} - b^2 - ab$

g) $\dfrac{a+b}{a-b} + \dfrac{a-b}{a+b} - 2 \cdot \dfrac{a^2}{a^2-b^2} = \dfrac{(a+b)^2}{a^2-b^2} + \dfrac{(a-b)^2}{a^2-b^2} - \dfrac{2(a^2-b^2)}{a^2-b^2} \cdot \dfrac{a^2}{a^2-b^2} =$
$\dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2-2(a^2-b^2)}{a^2-b^2} \cdot \dfrac{a^2}{a^2-b^2}$

h) $\dfrac{a}{a^4+b^4} = \dfrac{a}{a(a^3+b^4)} = \dfrac{1}{a^3+b^4}$

i) $\dfrac{(a+b)+ab}{(a+b)-ab} = \dfrac{\cancel{(a+b)}+ab}{\cancel{(a+b)}-ab} = \dfrac{ab}{-ab} = -1$

j)
$$\begin{aligned} \frac{4x-5}{6} &= x + \frac{5}{6} && \mid \cdot 6 \\ 4x-5 &= x+5 \end{aligned}$$

k)
$$\begin{aligned} \frac{4x+7}{6} &= \frac{4+5x}{6} && \mid -4x-4 \\ \frac{3}{6} &= \frac{x}{6} \end{aligned}$$

Und noch zwei kleine Fragen:

l) Seien a und b zwei reelle Zahlen. Was lässt sich über die Vorzeichen von a und b aussagen, wenn man weiss, dass $a \cdot b < 0$?

m) Seien a und b zwei reelle Zahlen von denen man weiss, dass $a \cdot b < 2$. Was lässt sich über die Vorzeichen von a und b aussagen?

7.4 Spezielle Ungleichungen

Beispiel: Lösen Sie folgende Ungleichung

$$\frac{x+3}{x-1} \leq 2 \qquad \mid \cdot (x-1) \qquad ⚠$$

Beachte, dass diese Ungleichung nur für $x \neq 1$ sinnvoll ist, weil sonst der Nenner des Bruches Null ist.
Erstens handelt es sich hier um eine Aufpassumformung.
Zweitens wissen wir nicht, ob $(x-1)$ positiv oder negativ ist und ob als Konsequenz das Vergleichszeichen umgedreht werden muss oder nicht.
Es müssen also zwei Fälle unterschieden werden:

Fall 1 $(x-1) > 0$, d.h. $\boxed{x > 1}$

$$\begin{aligned} x+3 &\leq 2(x-1) \\ x+3 &\leq 2x-2 && \mid -x+2 \\ 5 &\leq x && \text{und } x > 1 \\ \mathbb{L}_1 &= [5, \infty[\end{aligned}$$

Fall 2 $(x-1) < 0$, d.h. $\boxed{x < 1}$

$$\begin{aligned} x+3 &\geq 2(x-1) \\ x+3 &\geq 2x-2 && \mid -x+2 \\ 5 &\geq x && \text{und } x < 1 \\ \mathbb{L}_2 &=]-\infty, 1[\end{aligned}$$

Zusammengefasst hat die anfangs betrachtete Ungleichung also die Lösungsmenge
$\mathbb{L} = \,]-\infty, 1[\,\cup\, [5, \infty[$ Erinnerung: Das Zeichen $\cup$ bedeutet «vereinigt mit».

Aufgabe 7.13 Lösen Sie folgende Ungleichungen nach x auf (beachte den Hinweis für Teilaufgabe (d)).

a) $\dfrac{2x-3}{3x-2} \geq 2$ b) $\dfrac{x+2}{3+4x} < 5$ c) $\dfrac{x^2-3x-1}{x+1} \geq x-2$ d) $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x}{x-1} \geq 2$

Hinweis: Bei Teilaufgabe (d) dürfen Sie bereits die Lösung der ersten beiden Teilaufgaben von Aufgabe 7.15 verwenden:

- $x^2 > 1$ ist äquivalent zu $\boxed{x < -1 \text{ oder } x > 1}$;
- $x^2 < 1$ ist äquivalent zu $-1 < x < 1$.

7.4.1 Vorzeichen von Produkten und Quotienten

Merke

Hat eine Ungleichung die Form

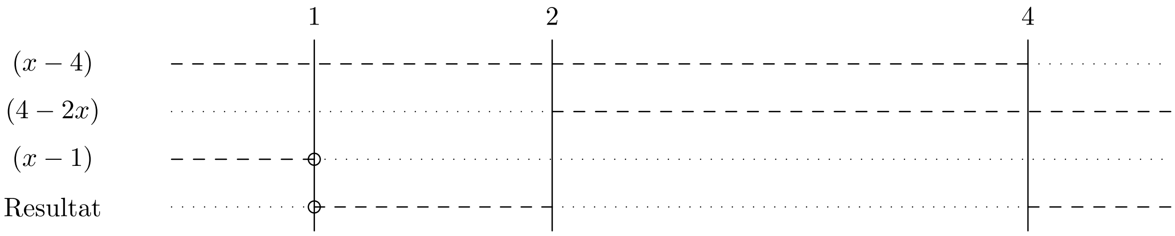
«Produkt Vergleichszeichen 0» (also «Produkt < 0» oder «Produkt ≤ 0» oder «Produkt > 0» oder «Produkt ≥ 0»),

so reicht es, die Vorzeichen der Faktoren zu untersuchen. Genau dann, wenn eine ungerade Anzahl der Faktoren negativ ist, ist auch das Produkt negativ.

Beispiel: $\frac{(x-4)(4-2x)}{x-1} < 0$

Es gilt $\frac{(x-4)(4-2x)}{x-1} = (x-4)\cdot(4-2x)\cdot\frac{1}{x-1}$. Ausserdem ist $\frac{1}{x-1}$ genau dann positiv (bzw. negativ), wenn $(x-1)$ positiv (bw. negativ) ist.

Wir untersuchen deswegen die drei Terme $(x-4)$, $(4-2x)$ und $(x-1)$ auf Vorzeichen (genauer: Positivität bzw. Negativität bzw. Verschwinden (= Nullsein)) und zeichnen die Grenzen auf dem Zahlenstrahl auf:



Wir lesen nun die Intervalle ab, wo das Vorzeichen des Produkts negativ ist und erhalten

$$\mathbb{L} =]1, 2[\cup]4, \infty[$$

Merke

Die Grenzen von Termen im Nenner sind **immer** auszuschliessen (da Division durch Null nicht definiert). Sonst sind die Grenzen genau dann einzuschliessen, wenn das Vergleichszeichen $\leq$ oder $\geq$ ist.

Aufgabe 7.14 Geben Sie die Lösungsmengen für das Beispiel an, wenn das Vergleichszeichen a) zu $\leq$; b) zu $\geq$; c) zu $>$ geändert wird.

Aufgabe 7.15 Geben Sie die Lösungsmengen für die folgenden Beispiele an.

Hinweis für die ersten beiden Teilaufgaben: Bringen Sie alles auf eine Seite (d.h. formen Sie so um, dass auf einer Seite Null steht).

a) $x^2 > 1$ b) $x^2 < 1$ c) $x^5 > 0$ d) $x^6 \leq 0$

Aufgabe 7.16 Lösen Sie folgende Ungleichungen. Wenn nötig, bringen Sie zuerst alles auf eine Seite, fassen Sie auf einem Bruchstrich zusammen und faktorisieren Sie.

a) $\dfrac{(x^4-4)}{(3-x)(x^2+1)} \geq 0$

b) $\dfrac{x^3-6x^2+9x}{x^2-1} \leq 0$

c) $\dfrac{x+8}{x+6} + \dfrac{x}{2} < 0$

d) $\dfrac{1}{x+2} > \dfrac{4x-3}{5x+3}$

Aufgabe 7.17 Lösen Sie die Ungleichungen von Aufgabe 7.13, indem Sie die Ungleichungen auf die Form «Bruch < 0» oder «Bruch ≤ 0» bringen.

7.5 Definitionsbereich eines Polynombruchs

Beispiel: Der Polynombruch $\frac{3}{x}$ liefert für jede Einsetzung von x eine reelle Zahl – aber aufgepasst: x darf nicht Null sein! Unser Polynombruch ist also für $x = 0$ nicht definiert, seine *Definitionsmenge* besteht aus allen reellen Zahlen ungleich Null.

Merke

Definition
Zu jedem Polynombruch in einer Variablen (meist x) gehört ein **Definitionsbereich**, der meist mit $\mathbb{D}$ abgekürzt wird. Dieser besteht aus allen reellen Zahlen, die für die Variable eingesetzt werden dürfen.

Beispiele

a) $\frac{3}{x}$ Es darf nicht $x = 0$ gelten, d.h. der Definitionsbereich ist $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
Erinnerung: Das Zeichen \ bedeutet «ohne».

b) $\frac{4+x}{3+x}$ Wann ist $3 + x = 0$? Genau dann, wenn $x = -3$. Also $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

c) $\frac{17x}{x^2-x}$ Wann ist $x^2-x = 0$? Genau dann, wenn $x(x-1) = 0$, also $x = 0$ oder $x = 1$. Also $\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$.

Merke

Der Polynombruch $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ hat die Definitionsmenge

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) = 0\} = \mathbb{R} \setminus \text{Menge der Nullstellen des Nenners.}$$

Hier sind $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome.

Genaugenommen muss der Polynombruch vollständig gekürzt sein: Beispielsweise hat $\frac{x^2+x}{x} = \frac{x+1}{1} = x+1$ als Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. Die unmittelbar folgenden Aufgaben sind so gestellt, dass dieses Problem nicht auftaucht.

Aufgabe 7.18 Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich.
Hinweis: Wann ist der Nenner Null? Faktorzerlegung des Nenners nutzen.

a) $\dfrac{x^2+7}{3x-4x^2}$ b) $\dfrac{x+5}{x^2-36}$ c) $\dfrac{x^2-1}{x^2-x-6}$ d) $\dfrac{a^4+a^2+1}{a^3+2a^2-35a}$

Aufgabe 7.19 Finde jeweils einen Polynombruch mit dem angegebenen Definitionsbereich.

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ b) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, -\frac{1}{3}\}$ c) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ d) $\mathbb{D} = \emptyset$

7.6 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 7.1 ex-ungleichungen-einfacher-einstieg

a)
$$\begin{aligned} 2x-4 &> 2 &&|+4\\ 2x &> 6 &&|:2\\ x &> 3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x+8 &< 2 &&|-8\\ 3x &< -6 &&|:3\\ x &< -2 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 5x+2 &\leq 3x &&|-3x-2\\ 2x &\leq -2 &&|:2\\ x &\leq -1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x-3 &\geq x+1 &&|-x+3\\ x &\geq 4 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7.3 ex-intervalle-kleinste-groesste-zahl

Die kleinste Zahl im Intervall $[3,4[$ ist 3. Eine grösste Zahl in diesem Intervall gibt es nicht: Die Zahl 4 gehört nicht zu dem Intervall und für jede andere Zahl $a \in [3,4[$ ist beispielsweise $\frac{a+4}{2}$ ein echt grösseres Element unseres Intervalls (dieses Element, das sogenannte *arithmetische Mittel* (alias der Durchschnitt) liegt genau zwischen a und 4).

Lösung zu Aufgabe 7.4 ex-ungleichungen-aufgepasst

a)
$$\begin{aligned} -5x &> 5 &&|:-5 \quad ⚠\\ x &< -1\\ \mathbb{L} &=]-\infty,-1[\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} -\frac{x}{2} &\leq -6 &&|\cdot -2 \quad ⚠\\ x &\geq 12\\ \mathbb{L} &= [12,\infty[\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} -x &< 2 &&|\cdot(-1) \quad ⚠\\ x &> -2\\ \mathbb{L} &=]-2,\infty[\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7.7 ex-ungleichung-addition-oder-multiplikation

(1) Addition von $x-4$ auf beiden Seiten liefert $-4 > x$. (2) Multiplikation mit (-1) liefert $x < -4$ (Achtung, Vergleichszeichen dreht sich, vergleiche nachfolgende Merkebox). Beide Lösungswege führen also zum selben Ergebnis, die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} =]-\infty,-4[$.

Lösung zu Aufgabe 7.8 ex-bruchterme-kuerzen

a) $\dfrac{az+bz}{cz} = \dfrac{(a+b)\cdot z}{c\cdot z} = \dfrac{a+b}{c}$

b) $\dfrac{a+b+y^7}{y^7+b+a} = \dfrac{a+b+y^7}{a+b+y^7} = \dfrac{1\cdot(a+b+y^7)}{1\cdot(a+b+y^7)} = \dfrac{1}{1} = 1$

c) $\dfrac{b-a}{a-b} = \dfrac{b-a}{-b+a} = \dfrac{b-a}{-(b-a)} = \dfrac{1\cdot(b-a)}{(-1)\cdot(b-a)} = \dfrac{1}{-1} = -1$

d) $\dfrac{-a-b}{a+b} = \dfrac{-(a+b)}{a+b} = \dfrac{(-1)\cdot(a+b)}{a+b} = \dfrac{-1}{1} = -1$

e) $\dfrac{x^2-y}{y-x^2}=\dfrac{x^2-y}{-(x^2-y)}=\dfrac{1}{-1}=-1$

f) $\dfrac{6z^2+6x}{-3x-3z^2}=\dfrac{6(z^2+x)}{-3(x+z^2)}=\dfrac{6}{-3}=\dfrac{(-2)\cdot(-3)}{(-3)\cdot 1}=\dfrac{-2}{1}=-2$

g) $\dfrac{3x^2-3x^3}{x(x^2-1)}=\dfrac{3x^2(1-x)}{x(x-1)(x+1)}=\dfrac{3x(1-x)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{(-3x)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{-3x}{x+1}$

h) $\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-4}=\dfrac{x^2(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{x^2}{x-2}$

i) $\dfrac{v^3-3v^2+3v-1}{2v^3-v^2-1}=\dfrac{(v-1)^3}{2v^3-v^2-1}=\dfrac{(v-1)^3}{(v-1)(2v^2+v+1)}=\dfrac{(v-1)^2}{(2v^2+v+1)}$

Erläuterungen dazu:

- Zur ersten Umformung: Allgemein gilt $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ (Ausrechnen oder Pascalsches Dreieck).
- Da im Zähler nur $(v-1)$ als Faktor auftritt, kann man eventuell damit kürzen. Um dies zu testen, macht man eine Polynomdivision des Nenners durch $(v-1)$ und erhält $2v^3-v^2-1=(v-1)(2v^2+v+1)$ (alternativ kann man dies auch erraten).
- Wenn man den „neuen“ Nenner $(2v^2+v+1)$ durch $(v-1)$ teilt, verbleibt ein Rest. Also kann man nicht weiter kürzen.

Lösung zu Aufgabe 7.9 ex-bruchterme-addition

a) $\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x+y)(x-y)}=\dfrac{4xy}{(x+y)(x-y)}$

b) $\dfrac{4}{z-1}+\dfrac{z-9}{z^2-1}=\dfrac{4}{z-1}+\dfrac{z-9}{(z+1)(z-1)}=\dfrac{4(z+1)+z-9}{(z+1)(z-1)}=\dfrac{4z+4+z-9}{(z+1)(z-1)}\dfrac{5z-5}{(z+1)(z-1)}=\dfrac{5(z-1)}{(z+1)(z-1)}=\dfrac{5}{z+1}$

c) $\dfrac{n}{n+1}-\dfrac{2n+1}{n-1}+\dfrac{n^2+5n}{n^2-1}=\dfrac{n}{n+1}-\dfrac{2n+1}{n-1}+\dfrac{n^2+5n}{(n+1)(n-1)}=\dfrac{n(n-1)-(2n+1)(n+1)+(n^2+5n)}{(n+1)(n-1)}=\dfrac{n^2-n-(2n^2+3n+1)+n^2+5n}{(n+1)(n-1)}=\dfrac{n^2-n-2n^2-3n-1+n^2+5n}{(n+1)(n-1)}=\dfrac{n-1}{(n+1)(n-1)}=\dfrac{1}{n+1}$

d) $\dfrac{a}{a^2-b^2}+\dfrac{b}{(a-b)^2}=\dfrac{a}{(a+b)(a-b)}+\dfrac{b}{(a-b)^2}=\dfrac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)^2}+\dfrac{b(a+b)}{(a+b)(a-b)^2}=\dfrac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)^2}=\dfrac{a^2-ab+ab+b^2}{(a+b)(a-b)^2}=\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)^2}$

e) $\dfrac{b-c}{a^2+ac}-\dfrac{a-b}{ac+c^2}+\dfrac{a^2+c^2}{a^2c+ac^2}=\dfrac{b-c}{a(a+c)}-\dfrac{a-b}{c(a+c)}+\dfrac{a^2+c^2}{ac(a+c)}=\dfrac{c(b-c)-a(a-b)+(a^2+c^2)}{ac(a+c)}=\dfrac{cb-c^2-(a^2-ab)+a^2+c^2}{ac(a+c)}=\dfrac{cb-a^2+ab+a^2}{ac(a+c)}=\dfrac{cb+ab}{ac(a+c)}=\dfrac{b(c+a)}{ac(a+c)}=\dfrac{b}{ac}$

f) $\dfrac{3s}{(s-2)^2}-\dfrac{2}{s}+\dfrac{s+4}{2s-s^2}=\dfrac{3s}{(s-2)^2}-\dfrac{2}{s}+\dfrac{s+4}{s(2-s)}=\dfrac{3s}{(s-2)^2}-\dfrac{2}{s}-\dfrac{s+4}{s(s-2)}=\dfrac{3s^2-2(s-2)^2-(s+4)(s-2)}{s(s-2)^2}=\dfrac{3s^2-2(4-4s+s^2)-(s^2+2s-8)}{s(s-2)^2}=\dfrac{3s^2-(8-8s+2s^2)-s^2-2s+8}{s(s-2)^2}=\dfrac{3s^2-8+8s-2s^2-s^2-2s+8}{s(s-2)^2}=\dfrac{6s}{s(s-2)^2}=\dfrac{6}{(s-2)^2}$

Hinweis: Anstatt Vorzeichenakrobatik $(2-s)=-(2-s)$, könnte man auch einfach $(2-s)^2=(-(s-2))^2=(s-2)^2$ verwenden.

Lösung zu Aufgabe 7.10 ex-bruchterme-querbeet

a) $\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\left(\frac{u}{u+v}+\frac{v}{u-v}\right) = \frac{(u+v)(u-v)}{u^2+v^2}\left(\frac{u(u-v)}{(u+v)(u-v)}+\frac{v(u+v)}{(u+v)(u-v)}\right) = \frac{(u+v)(u-v)}{u^2+v^2}\left(\frac{u^2-uv+uv+v^2}{(u+v)(u-v)}\right) = \frac{(u+v)(u-v)}{u^2+v^2}\cdot\frac{u^2+v^2}{(u+v)(u-v)} = 1$

b) $\left(\frac{1}{r-s}-\frac{1}{r+s}\right)^2 = \left(\frac{r+s}{(r-s)(r+s)}-\frac{r-s}{(r+s)(r-s)}\right)^2 = \left(\frac{r+s-(r-s)}{(r-s)(r+s)}\right)^2 = \left(\frac{2s}{(r-s)(r+s)}\right)^2 = \frac{4s^2}{(r-s)^2(r+s)^2}$

c) $\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right):\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right) = \frac{ad-bc}{bd}:\frac{ad+cb}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}\cdot\frac{bd}{ad+cb} = \frac{ad-bc}{ad+cb}$

d) $\left(1-\frac{1}{n^2}\right):\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2-1}{n^2}:\frac{n+1}{n} = \frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\cdot\frac{n}{n+1} = \frac{n-1}{n}$

e) $\left(a^2+2+\frac{1}{a^2}\right):\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right) = \left(a+\frac{1}{a}\right)^2:\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{1}{a}\right) = \left(a+\frac{1}{a}\right):\left(a-\frac{1}{a}\right) = \frac{a^2+1}{a}:\frac{a^2-1}{a} = \frac{a^2+1}{a}\cdot\frac{a}{a^2-1} = \frac{a^2+1}{(a+1)(a-1)}$

f) $\frac{1}{n^2+2n+1}\cdot\left(\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}\cdot\left(\frac{n^2+n+n^2+3n+2}{2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}\cdot\left(\frac{2n^2+4n+2}{2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}\cdot\left(\frac{2(n^2+2n+1)}{2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}\cdot(n+1)^2 = 1$

g) Erster Lösungsweg: $\left(\frac{3n^2(n+1)-2n(n^2+4)}{n+1}+12\right):(n^2+4)-\frac{2}{n+1}+\frac{1-n^2}{n^2+n} = \left(3n^2-\frac{2n(n^2+4)}{n+1}+12\right):(n^2+4)-\frac{2}{n+1}+\frac{(1+n)(1-n)}{n(n+1)} = \frac{3n^2}{n^2+4}-\frac{2n}{n+1}+\frac{12}{n^2+4}-\frac{2}{n+1}+\frac{1-n}{n} = \frac{3n^2+12}{n^2+4}-\frac{2n+2}{n+1}+\frac{1-n}{n} = \frac{3(n^2+4)}{n^2+4}-\frac{2(n+1)}{n+1}+\frac{1-n}{n} = 3-2+\frac{1-n}{n} = 1+\frac{1-n}{n} = \frac{n}{n}+\frac{1-n}{n} = \frac{n+1-n}{n} = \frac{1}{n}$

Zweiter Lösungsweg: $\left(\frac{3n^2(n+1)-2n(n^2+4)}{n+1}+12\right):(n^2+4)-\frac{2}{n+1}+\frac{1-n^2}{n^2+n} = \left(\frac{3n^2(n+1)-2n(n^2+4)+12(n+1)}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{n^2+4}-\frac{2}{n+1}+\frac{(1-n)(1+n)}{n(n+1)} = \left(\frac{3n^3+3n^2-2n^3-8n+12n+12}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{n^2+4}-\frac{2}{n+1}+\frac{1-n}{n} = \frac{n^3+3n^2+4n+12}{(n+1)(n^2+4)}-\frac{2}{n+1}+\frac{1-n}{n} = \frac{n^3+3n^2+4n+12-2(n^2+4)}{(n+1)(n^2+4)}+\frac{1-n}{n} = \frac{n^3+n^2+4n+4}{(n+1)(n^2+4)}+\frac{1-n}{n} = \frac{n^2(n+1)+4(n+1)}{(n+1)(n^2+4)}+\frac{1-n}{n} = \frac{(n^2+4)(n+1)}{(n+1)(n^2+4)}+\frac{1-n}{n} = 1+\frac{1-n}{n} = \frac{n+1-n}{n} = \frac{1}{n}$

Lösung zu Aufgabe 7.11 ex-polynombruch-gleichung-textaufgabe-kaffee

Variable x: Kilopreis von Sorte A in Franken.

Gewicht des Kaffees von Sorte A, den man für 120 Franken erhält: $\frac{120}{x}$

Kilopreis von Sorte B in Franken: $x-2$

Gewicht des Kaffees von Sorte B, den man für 160 Franken erhält: $\frac{160}{x-2}$

Die Informationen in der Aufgabenstellung führen somit zur folgenden Gleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{120}{x}+8 &= \frac{160}{x-2} && |\cdot x\cdot(x-2)\\
120(x-2)+8x(x-2) &= 160x\\
120x-240+8x^2-16x &= 160x\\
8x^2-56x-240 &= 0 && |:8\\
x^2-7x-30 &= 0 && |\text{Faktorzerlegung}\\
(x+3)(x-10) &= 0
\end{aligned}$$

Also $x=-3$ oder $x=10$. Da der Preis (in aller Regel) positiv ist:
Antwort: Ein Kilogramm von Sorte A kostet 10 Franken.

Probe (freiwillig): Kilogramm Sorte A für 120 CHF: $\frac{120}{10}=12$. Kilopreis Sorte B: 8 Franken. Kilogramm Sorte B für 160 CHF: $\frac{160}{8}=20$. Differenz: $20-12=8$ wie in Aufgabenstellung gewünscht!

Lösung zu Aufgabe 7.12 ex-bruch-verbrechen

a) Falsch. Richtig: $2\cdot\frac{ab}{a^2-b^2}=\frac{2}{1}\frac{ab}{a^2-b^2}=\frac{2ab}{a^2-b^2}$.

b) Richtig, aber unnötig kompliziert. Erweitern ist unnötig beim Multiplizieren (nur zum Addieren muss erst gleichnamig gemacht werden). Es kann nachher wieder gekürzt werden. $\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a-b}=\frac{ab}{a^2-b^2}$

c) Falsch. Richtig wäre $\frac{b(a-b)}{a^2-b^2}\cdot\frac{a(a+b)}{a^2-b^2}=\frac{b(a-b)\cdot a(a+b)}{(a^2-b^2)^2}=\frac{ab(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)^2}=\frac{ab}{a^2-b^2}$. Alternativ hätte man auch vor der Multiplikation beide Brüche kürzen können: $\frac{b(a-b)}{a^2-b^2}\cdot\frac{a(a+b)}{a^2-b^2}=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a-b}=\frac{ab}{(a+b)(a-b)}=\frac{ab}{a^2+b^2}$

d) Falsch. Schutzklammer setzen: $\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}-\frac{ab-b^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2+ab-\left(ab-b^2\right)}{a^2-b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

e) Falsch. Gekürzt werden kann nur aus Produkten von Brüchen. Richtig ist: $\frac{a-b}{a^2-ab}:\frac{b^2-ab}{a-b}=\frac{a-b}{a(a-b)}:\frac{b(b-a)}{a-b}=\frac{1}{a}:\frac{b\cdot(-1)}{1}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{-b}=-\frac{1}{ab}$

f) Falsch. Schutzklammer setzen: $\frac{1}{a^2-ab}-\frac{b^2-ab}{1}=\frac{1}{a^2-ab}-(b^2-ab)=\frac{1}{a^2-ab}-b^2+ab$

g) Erste Umformung richtig, aber unnötig. Zweite Umformung falsch: Punkt vor Strich! Richtig ist:
$\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}-2\cdot\frac{a^2}{a^2-b^2}=\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}+\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}-2\cdot\frac{a^2}{a^2-b^2}=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2-2a^2}{a^2-b^2}$
$=\frac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2-2a^2}{a^2-b^2}=\frac{2b^2}{a^2-b^2}$

h) Erste Umformung falsch: a kann nicht ausgeklammert werden. Richtig wäre, nichts zu verändern. Zweite Umformung korrekt.

i) Falsch: Aus Differenzen und Summen darf nicht gekürzt werden. (Letzte Umformung korrekt.) Richtig wäre, nichts zu verändern…

j) Falsch. Auch x muss mit 6 multipliziert werden. Die Operationen werden immer auf die **gesamte** linke und rechte Seite angewandt; wer unsicher ist, setze Klammern um beide Seiten und multipliziere dann aus (und kürze dabei):

$$\begin{aligned} \frac{4x-5}{6} &= x + \frac{5}{6} && \mid \cdot 6 \\ 6 \cdot \left(\frac{4x-5}{6}\right) &= 6 \cdot \left(x + \frac{5}{6}\right) && \mid \cdot 6 \\ 4x - 5 &= 6x + 5 \end{aligned}$$

k) Falsch. Die neue Gleichung hat zwar die gleichen Lösungen, es wurde aber nicht $4x$ sondern $\frac{4x}{6}$ subtahiert. Richtig:

$$\begin{aligned} \frac{4x+7}{6} &= \frac{4+5x}{6} && \mid -\frac{4x}{6} - \frac{4}{6} \\ \frac{3}{6} &= \frac{x}{6} \end{aligned}$$

l) Wenn $ab < 0$, muss eine Zahl positiv und die andere negativ sein. D.h. entweder ($a < 0$ und $b > 0$) oder ($a > 0$ und $b < 0$).

m) Nichts, jede Kombination ist möglich (man nehme z.B. alle möglichen Zweier-Kombinationen von $+1$ und -1).

Lösung zu Aufgabe 7.13 ex-ungleichungen-mit-bruechen-und-diskussion

a) $\dfrac{2x-3}{3x-2} \geq 2 \qquad \mid \cdot (3x-2)$ ⚠

Fall 1 $(3x-2) > 0$, d.h. $\boxed{x > \frac{2}{3}}$

$$\begin{aligned} 2x - 3 &\geq 2(3x-2) \\ 2x - 3 &\geq 6x - 4 && \mid -2x + 4 \\ 1 &\geq 4x && \mid : 4 \\ \frac{1}{4} &\geq x && \text{und } x > \frac{2}{3} \\ \mathbb{L}_1 &= \varnothing \end{aligned}$$

Fall 2 $(3x-2) < 0$, d.h. $\boxed{x < \frac{2}{3}}$

$$\begin{aligned} 2x - 3 &\leq 2(3x-2) \\ 2x - 3 &\leq 6x - 4 && \mid -2x + 4 \\ 1 &\leq 4x && \mid : 4 \\ \frac{1}{4} &\leq x && \text{und } x < \frac{2}{3} \\ \mathbb{L}_2 &= \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right[\end{aligned}$$

Beide Fälle zusammengefasst: $\mathbb{L} = \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right[$

b) $\dfrac{x+2}{3+4x} < 5 \qquad \mid \cdot (3+4x)$ ⚠

Fall 1 $(3+4x) > 0$, d.h. $\boxed{x > -\frac{3}{4}}$

$$\begin{aligned} x + 2 &< 5(3+4x) \\ x + 2 &< 15 + 20x && \mid -x - 15 \\ -13 &< 19x && \mid : 19 \\ -\frac{13}{19} &< x && \text{und } x > -\frac{3}{4} \\ \mathbb{L}_1 &= \left]-\frac{13}{19}, \infty\right[\end{aligned}$$

Fall 2 $(3+4x) < 0$, d.h. $\boxed{x < -\frac{3}{4}}$

$$\begin{aligned} x + 2 &> 5(3+4x) \\ x + 2 &> 15 + 20x && \mid -x - 15 \\ -13 &> 19x && \mid : 19 \\ -\frac{13}{19} &> x && \text{und } x < -\frac{3}{4} \\ \mathbb{L}_2 &= \left]-\infty, -\frac{3}{4}\right[\end{aligned}$$

Beide Fälle zusammengefasst: $\mathbb{L} = \left]-\infty, -\frac{3}{4}\right[\cup \left]-\frac{13}{19}, \infty\right[$

c) $\dfrac{x^2-3x-1}{x+1} \geq x-2 \qquad | \cdot (x+1) \qquad ⚠$

Fall 1 $x+1>0$, d.h. $\boxed{x>-1}$

$$\begin{aligned} x^2-3x-1 &\geq (x-2)(x+1) \\ x^2-3x-1 &\geq x^2-x-2 && |-x^2+3x+2 \\ 1 &\geq 2x && |:2 \\ \frac{1}{2} &\geq x && \text{und } x>-1 \\ \mathbb{L}_1 &= \left]-1, \frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

Fall 2 $x+1<0$, d.h. $\boxed{x<-1}$

$$\begin{aligned} x^2-3x-1 &\leq (x-2)(x+1) \\ x^2-3x-1 &\leq x^2-x-2 && |-x^2+3x+2 \\ 1 &\leq 2x && |:2 \\ \frac{1}{2} &\leq x && \text{und } x<-1 \\ \mathbb{L}_2 &= \varnothing \end{aligned}$$

Beide Fälle zusammengefasst: $\mathbb{L} = \left]-1, \frac{1}{2}\right]$

d)

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1} &\geq 2 \\ \frac{x(x-1)+x(x+1)}{x^2-1} &\geq 2 \\ \frac{x^2-x+x^2+x}{x^2-1} &\geq 2 \\ \frac{2x^2}{x^2-1} &\geq 2 && |:2 \\ \frac{x^2}{x^2-1} &\geq 1 && |\cdot(x^2-1) \quad ⚠ \end{aligned}$$

Fall 1 $x^2-1>0$, d.h. $x^2>1$, d.h. $\boxed{x<-1 \text{ oder } x>1}$

$$\begin{aligned} x^2 &\geq x^2-1 && |-x^2 \\ 0 &\geq -1 \\ \mathbb{L}_1 &=]-\infty,-1[\ \cup\ ]1,\infty[\end{aligned}$$

Fall 2 $x^2-1<0$, d.h. $\boxed{-1<x<1}$

$$\begin{aligned} x^2 &\leq x^2-1 && |-x^2 \\ 0 &\leq -1 \\ \mathbb{L}_2 &= \varnothing \end{aligned}$$

Beide Fälle zusammengefasst: $\mathbb{L} =]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$

Lösung zu Aufgabe 7.14 ex-ungleichungen-beispiel-andere-vergleichszeichen

a) $\mathbb{L} =]1,2]\ \cup\ [4,\infty[$ b) $\mathbb{L} =]-\infty,1[\ \cup\ [2,4]$ c) $\mathbb{L} =]-\infty,1[\ \cup\ ]2,4[$

Lösung zu Aufgabe 7.15 ex-ungleichungen-quadrat-groesser-bzw-kleiner-eins

Wir argumentieren verbal. Wer mag, kann auch mit einer Zeichnung ähnlich wie im Beispiel argumentieren.

a)

$$\begin{aligned} x^2 &> 1 && |-1 \\ x^2-1 &> 0 \\ (x-1)(x+1) &> 0 \end{aligned}$$

Damit dies gilt, müssen beide Faktoren entweder positiv oder negativ sein:

- Beide positiv bedeutet $x-1>0$ und $x+1>0$, also $x>1$ und $x>-1$, also $x>1$.
- Beide negativ bedeutet $x-1<0$ und $x+1<0$, also $x<1$ und $x<-1$, also $x<-1$.

Insgesamt ist die Lösungsmenge also $]-\infty,-1[\ \cup\ ]1,\infty[$.

b) $x^2 < 1$ ist ähnlich wie oben zu $(x-1)(x+1) < 0$ äquivalent. Damit dies gilt, muss genau einer der beiden Faktoren negativ sein und der andere muss positiv sein:

- Erster Faktor positiv und zweiter Faktor negativ bedeutet $x-1 > 0$ und $x+1 < 0$, also $x > 1$ und $x < -1$, also keine Lösung (leere Lösungsmenge).
- Erster Faktor negativ und zweiter Faktor positiv bedeutet $x-1 < 0$ und $x+1 > 0$, also $x < 1$ und $x > -1$, also $-1 < x < 1$ (Lösungsmenge $]-1,1[$).

Insgesamt ist die Lösungsmenge $]-1,1[$.

c) Wir unterscheiden drei Fälle:

- 1. Fall, $x < 0$: Dann ist $x^5 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ negativ als Produkt von fünf negativen Zahlen.
- 2. Fall, $x = 0$: Dann $x^5 = 0$.
- 3. Fall, $x > 0$: Dann ist $x^5 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ positiv.

Lösungsmenge: $]0,\infty[$.

d) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^6 = x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \geq 0$, denn x^2 ist stets ≥ 0. Dies bedeutet, dass die erwünschte Ungleichung $x^6 \leq 0$ nur dann gilt, wenn $x^6 = 0$ gilt. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn $x = 0$ gilt (denn ein Produkt ist dann und nur dann Null, wenn jeder der Faktoren Null ist).

Lösungsmenge: $\{0\}$.

Lösung zu Aufgabe 7.16 ex-ungleichungen-vorzeichen

a)

$$\frac{(x^4-4)}{(3-x)(x^2+1)} \geq 0$$
$$\frac{(x^2+2)(x^2-2)}{(3-x)(x^2+1)} \geq 0$$
$$\frac{(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{(3-x)(x^2+1)} \geq 0$$

(x^2+2) und (x^2+1) sind immer positiv (weil x^2 immer positiv oder Null ist) und können daher ignoriert werden.

		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		3	
$(x+\sqrt{2})$	− − −	|	· · · · ·		· · · · ·		· · · · ·
$(x-\sqrt{2})$	− − −		− − − − −	|	· · · · ·		· · · · ·
$(3-x)$	· · · · ·		· · · · ·		· · · · ·	○	− − −
Resultat	· · · · ·	|	− − − − −	|	· · · · ·	○	− − −

$\mathbb{L} =]-\infty,-\sqrt{2}] \ \cup \ [\sqrt{2},3[$
$x = 3$ ist nicht Teil der Lösungsmenge, weil $(x-3)$ im Nenner vorkommt.

b)

$$\frac{x^3-6x^2+9x}{x^2-1} \leq 0$$
$$\frac{x(x-3)^2}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

$(x-3)^2$ ist zwar nie negativ wird aber 0 (für $x = 3$).

		-1		0		1		3	
x	− − −	|	− − −	|	· · · · ·		· · · · ·	|	· · · · ·
$(x-3)^2$	· · · · ·		· · · · ·		· · · · ·		· · · · ·	|	· · · · ·
$(x+1)$	− − −	○	· · · · ·		· · · · ·		· · · · ·		· · · · ·
$(x-1)$	− − −		− − −		− − −	○	· · · · ·		· · · · ·
Resultat	− − −	○	· · · · ·	|	− − −	○	· · · · ·	|	· · · · ·

$\mathbb{L} =]-\infty,-1[\cup [0,1[\cup \{3\}$
$x = 3$ ist Teil der Lösungsmenge weil $(x-3)^3$ dort 0 ist. Anstatt $\{3\}$ könnte auch $[3,3]$ geschrieben werden.

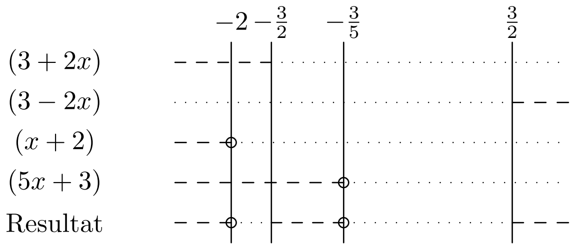
c)

$$
\begin{aligned}
\frac{x+8}{x+6} + \frac{x}{2} &< 0 \\
\frac{2(x+8)}{2(x+6)} + \frac{x(x+6)}{2(x+6)} &< 0 \\
\frac{2x+16}{2(x+6)} + \frac{x^2+6x}{2(x+6)} &< 0 \\
\frac{2x+16+x^2+6x}{2(x+6)} &< 0 \\
\frac{x^2+8x+16}{2(x+6)} &< 0 \\
\frac{(x+4)^2}{2(x+6)} &< 0
\end{aligned}
$$

$(x+4)^2$ ist nie negativ, es reicht also $(x+6)$ zu betrachten.
$\mathbb{L} =]-\infty, -6[$

d)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x+2} &> \frac{4x-3}{5x+3} \qquad \left| - \frac{4x-3}{5x+3} \right. \\
\frac{1}{x+2} - \frac{4x-3}{5x+3} &> 0 \\
\frac{5x+3}{(x+2)(5x+3)} - \frac{(x+2)(4x-3)}{(x+2)(5x+3)} &> 0 \\
\frac{5x+3-(4x^2+5x-6)}{(x+2)(5x+3)} &> 0 \\
\frac{5x+3-4x^2-5x+6}{(x+2)(5x+3)} &> 0 \\
\frac{-4x^2+9}{(x+2)(5x+3)} &> 0 \\
\frac{(3+2x)(3-2x)}{(x+2)(5x+3)} &> 0
\end{aligned}
$$

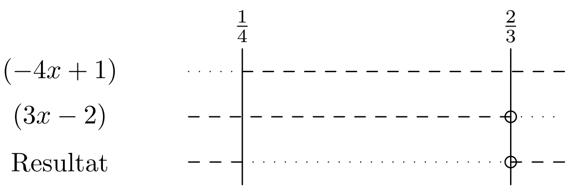


$\mathbb{L} = \left]-2, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{3}{5}, \frac{3}{2}\right[$

Lösung zu Aufgabe 7.17 ex-149-ohne-diskussion

a)

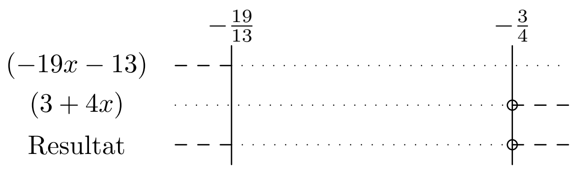
$$
\begin{aligned}
\frac{2x-3}{3x-2} &\geq 2 \qquad | -2 \\
\frac{2x-3}{3x-2} - 2 &\geq 0 \\
\frac{2x-3}{3x-2} - \frac{2(3x-2)}{3x-2} &\geq 0 \\
\frac{2x-3-(6x-4)}{3x-2} &\geq 0 \\
\frac{-4x+1}{3x-2} &\geq 0
\end{aligned}
$$



Und damit ist $\mathbb{L} = \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right[$

b)

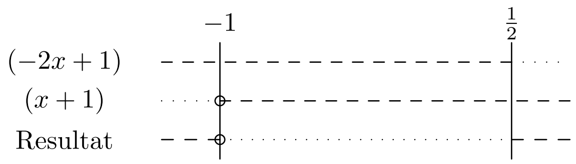
$$
\begin{aligned}
\frac{x+2}{3+4x} &< 5 \qquad | -5 \\
\frac{x+2-5(3+4x)}{3+4x} &< 0 \\
\frac{-19x-13}{3+4x} &< 0
\end{aligned}
$$



Und damit ist $\mathbb{L} = \left]-\frac{13}{19}, \infty\right[$

c)

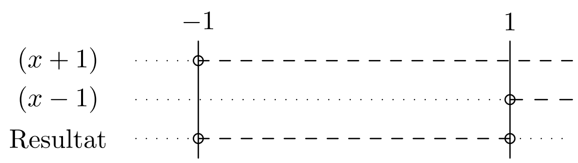
$$\begin{aligned}
\frac{x^2-3x-1}{x+1} &\geq x-2 \quad \big| -(x-2)\\
\frac{x^2-3x-1}{x+1} - \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} &\geq 0\\
\frac{x^2-3x-1-(x^2-x-2)}{x+1} &\geq 0\\
\frac{-2x+1}{x+1} &\geq 0
\end{aligned}$$



Und damit ist $\mathbb{L} = \left]-1, \frac{1}{2}\right]$

d)

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1} &\geq 2 \quad \big| -2\\
\frac{x(x-1)+x(x+1)-2(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} &\geq 0\\
\frac{x^2-x+x^2+x-(2x^2-2)}{(x+1)(x-1)} &\geq 0\\
\frac{2}{(x+1)(x-1)} &\geq 0
\end{aligned}$$



Und damit ist $\mathbb{L} =]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$.

Lösung zu Aufgabe 7.18 ex-polynombruch-definitionsbereich

a) Nenner Nullsetzen: $0 = 3x - 4x^2 = x(3-4x)$. Äquivalent nach Produkt-Null-Regel: $x = 0$ oder $3 - 4x = 0$, d.h. $x = 0$ oder $x = \frac{3}{4}$.
Also $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{3}{4}\}$.

b) Der Nenner $x^2 - 36 = (x+6)(x-6)$ hat (nach der Produkt-Null-Regel) die Nullstellen $x = -6$ und $x = 6$, also $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-6, 6\}$.

c) $\dfrac{x^2-1}{x^2-x-6}$ Faktorzerlegung des Nenners: $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$. Also hat der Nenner die Nullstellen -2 und 3, also $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$.

d) Faktorzerlegung des Nenners: $a^3 + 2a^2 - 35a = a(a^2 + 2a - 35) = a(a-5)(a+7)$. Also $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-7, 0, 5\}$.

Beachte: Der Definitionsbereich hängt nur vom Nenner, nicht aber vom Zähler ab.

Lösung zu Aufgabe 7.19 ex-polynombruch-finde-polynombruch
Statt 1 tun es auch andere Zähler.

a) $\frac{1}{(x+2)(x-1)}$

b) $\frac{1}{x(x+\frac{1}{3})}$

c) $\frac{1}{1}$

d) Es gibt keinen solchen Polynombruch:

Zu Teilaufgabe (d): Vielleicht hat jemand $\frac{1}{0}$ oder $\frac{1}{x-x}$ als Lösung angegeben. Genaugenommen ist das aber nicht erlaubt, denn in einem Polynombruch darf der Nenner nicht Null (= das Nullpolynom) sein.
Da jedes von Null verschieden Polynom aber höchstens endlich viele Nullstellen hat (denn sonst könnte man unendlich oft Polynomdivision durch (x − Nullstelle) durchführen), gibt es keinen Polynombruch mit Definitionsmenge $\emptyset$.