# 7 Ungleichungen, Intervalle und Polynombrüche

**Aufgabe 7.1** Lösen Sie die folgenden Ungleichungen.

a) $2x - 4 > 2 \quad |+4$
$2x > 6 \quad |:2$
$x > 3$

b) $3x + 8 < 2 \quad |-8$
$3x < -6 \quad |:3$
$x < -2$

c) $5x + 2 \le 3x \quad |-3x-2$
$2x \le -2 \quad |:2$
$x \le -1$

d) $2x - 3 \ge x + 1 \quad |-x+3$
$x \ge 4$

## 7.1 Intervalle

Um „zusammenhängende“ Bereiche von **reellen** Zahlen anzugeben, wird eine Schreibweise mit eckigen Klammern verwendet, die wir nun durch Beispiele erklären.

(a) $[\sqrt{2}, \pi] = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \le x \le \pi\}$ Alle Zahlen von und mit $\sqrt{2}$ bis und mit $\pi$.

(b) $]4, 8.5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \boxed{<} x \le 8.5\}$ Alle Zahlen grösser als 4 (ohne die 4) bis und mit 8.5.

(c) $[-4, -\frac{1}{2}[ = \{y \in \mathbb{R} \mid -4 \le y \boxed{<} -\frac{1}{2}\}$ Alle Zahlen von und mit -4 bis $-\frac{1}{2}$ (ohne $-\frac{1}{2}$).

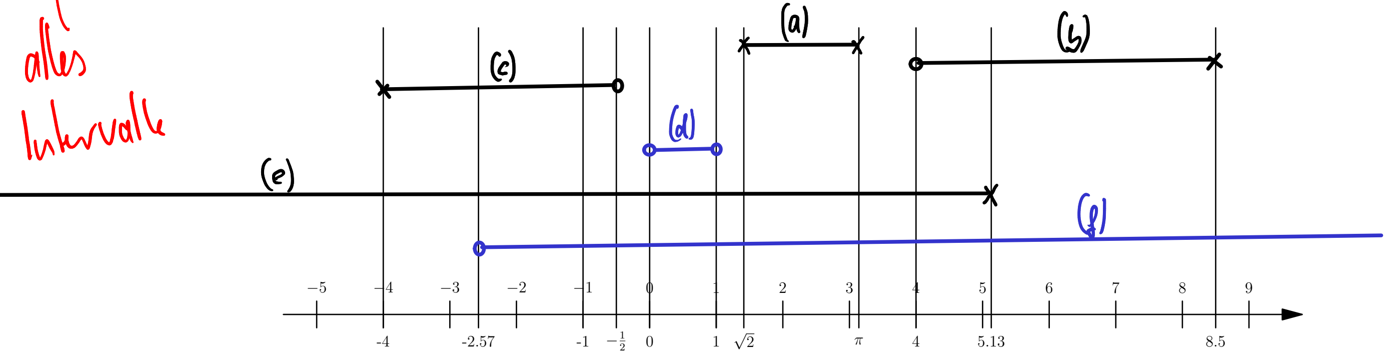
(d) $]0, 1[ = \{a \in \mathbb{R} \mid 0 < a < 1\}$ Alle Zahlen zwischen 0 und 1 ohne 0 und 1.

(e) $]-\infty, 5.13] = \{z \in \mathbb{R} \mid z \le 5.13\}$ Alle Zahlen kleiner oder gleich 5.13.

(f) $]-2.57, \infty[ = \{x \in \mathbb{R} \mid -2.57 < x\}$ Alle Zahlen grösser als $-2.57$ (ohne $-2.57$).

alles Intervalle

Das Symbol $\infty$ (oder auch $+\infty$) bedeutet „plus Unendlich“ und ist grösser als jede reelle Zahl.
Das Symbol $-\infty$ bedeutet „minus Unendlich“ und ist kleiner als jede reelle Zahl.




**Merke**

**Intervalle** sind **Mengen von reellen Zahlen** und werden mit eckigen Klammern geschrieben, wobei zuerst die untere Grenze und dann die obere Grenze angegeben wird (durch ein Komma getrennt). Ist die Klammer „richtig herum“, gehört die Grenze dazu und das Intervall ist an dieser Grenze **geschlossen**. Anderfalls ist das Intervall an dieser Grenze **offen**. Da die Symbole $-\infty$ und $\infty$ keine Zahlen sind, gehören sie nie zu einem Intervall und die Klammern bei diesen Symbolen als Grenzen sind immer «offen».

$]3, 7[$
$[3, \infty[$
$\cancel{[3, \infty]}$
$]-\infty, 3[$
$\cancel{[-\infty, 3[}$

**Aufgabe 7.2** Geben Sie die Lösungsmengen der Aufgabe 7.1 als Intervall an.

a) $x > 3$, also $\mathbb{L} = \ ]3, \infty[$

b) $x < -2$, also $\mathbb{L} = \ ]-\infty, -2[$

c) $x \le -1$, also $\mathbb{L} = \ ]-\infty, -1]$

d) $x \ge 4$, also $\mathbb{L} = [4, +\infty[$

**Aufgabe 7.3** Was ist die kleinste Zahl im Intervall $[3, 4[$? Was ist die grösste Zahl im Intervall $[3, 4[$?

3 ✓

gibt es nicht!

$3,\overline{9} = 4$ ist nicht in $[3, 4[$

## 7.2 Ungleichungen

**Aufgabe 7.4** Lösen Sie die folgenden Ungleichungen und geben Sie jeweils die Lösungsmenge als Intervall an. Überprüfen Sie, ob Ihr Resultat stimmen kann, indem Sie als Test mindestens ein Element des Intervalls einsetzen.

a) $-5x > 5$

b) $-\frac{x}{2} \le -6$

c) $-x < 2$

Aufgabe: $a$ und $b$ sind Zahlen mit $a < b$.

Welche Vergleichszeichen müssen ergänzt werden, damit alles stimmt?

Lösung

$3a < 3b$

$-a > -b$

$-3a > -3b$

$\frac{a}{3} < \frac{b}{3}$

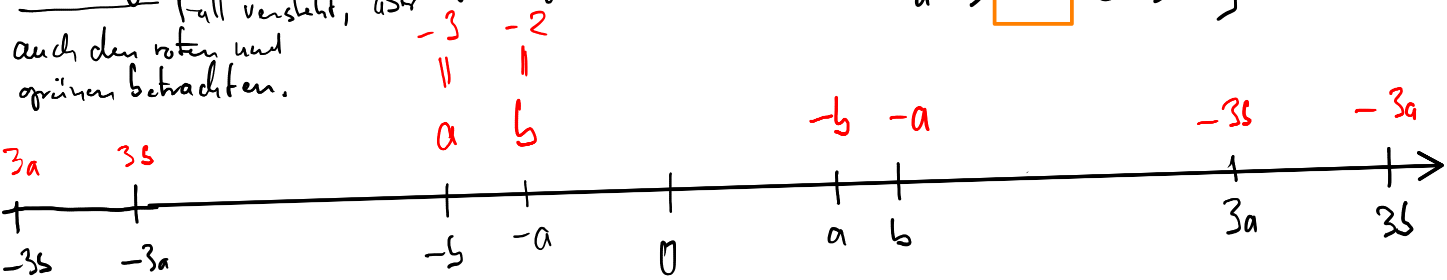
$-\frac{a}{3} = \frac{a}{-3} > \frac{b}{-3} = -\frac{b}{3}$

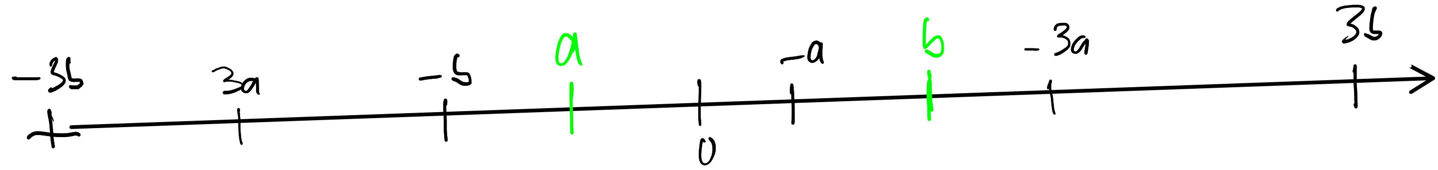
$a+3 < b+3$

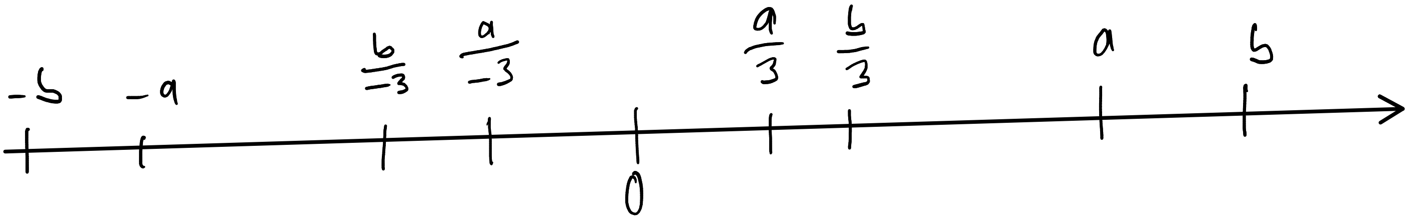
$a-3 < b-3$

Hinweis: Skizze mit Zahlenstrahl.

Lösung: Es reicht mir, wenn ihr den schwarzen Fall versteht, der genau genommen sollte man auch den roten und grünen betrachten.




**Fazit:** Das Vergleichszeichen dreht sich, falls man mit einer negativen Zahl multipliziert oder durch eine negative Zahl dividiert, sonst nicht.

### 7.2.1 Umformungen von Ungleichungen

~~**Aufgabe 7.5** Erklären Sie schlüssig mit Hilfe einer Waage (das Gewicht auf einer Seite ist höher als das auf der anderen Seite), warum bei Ungleichungen das Addieren bzw. Subtrahieren eines beliebigen Terms eine Äquivalenzumformung ist (also die Lösungsmenge nicht ändert).~~

~~**Aufgabe 7.6** Wie steht es mit der Multiplikation einer Ungleichung? Worauf ist zu achten? Erklären Sie ebenfalls mit Hilfe einer Waage (und finden Sie eine Interpretation für ein negatives Gewicht auf der Waage).~~

**Aufgabe 7.7** Lösen Sie die folgende Ungleichung auf zwei Arten: Einmal nur mit Addition/Subtraktion, einmal nur mit Multiplikation:

$$-x > 4$$

**Merke**

Bei Ungleichungen darf man uneingeschränkt addieren (und subtrahieren). Beim Multiplizieren (und Dividieren) mit einer ✎ negativen Zahl muss das Vergleichszeichen umgedreht werden:

- $<$ wird zu $>$ und umgekehrt
- $\leq$ wird zu $\geq$ und umgekehrt.

## 7.3 Rechnen mit Polynombrüchen

Ein **Polynombruch** ist ein Bruch, dessen Zähler und Nenner Polynome sind (der Nenner muss von 0 verschieden sein); altmodisches Wort dafür: Bruchterm.

### 7.3.1 Kürzen und Erweitern

**Beispiel:**

Kürzen: $$\frac{17x}{x^2-x} = \frac{17x}{x(x-1)} = \frac{17}{x-1}$$

Erweitern (= Kürzen „andersherum" gelesen): $$\frac{17}{x-1} = \frac{17x}{x(x-1)} = \frac{17x}{x^2-x}$$

**Merke**

Kürzen (bzw. Erweitern) von Brüchen: $$\frac{P \cdot R}{Q \cdot R} = \frac{P}{Q}$$

In Worten: Taucht ein Term (in der obigen Formel $R$) sowohl im Zähler als auch im Nenner eines Bruchs *als Faktor* auf, so darf dieser Term „weggekürzt" werden.
Wenn man einen Bruch kürzen möchte, sollte man also zunächst versuchen, Zähler und Nenner als Produkt von Faktoren zu schreiben. Taucht dabei ein Faktor sowohl oberhalb als auch unterhalb des Bruchstrichs auf, kann man ihn wegkürzen. Beachten Sie, dass die Faktoren beliebig kompliziert sein dürfen.

**Aufgabe 7.8** Kürzen Sie soweit wie möglich, indem Sie gemeinsame Faktoren in Zähler und Nenner suchen!

a) $\dfrac{az+bz}{cz}$ b) $\dfrac{a+b+y^7}{y^7+b+a}$ c) $\dfrac{b-a}{a-b}$

d) $\dfrac{-a-b}{a+b}$ e) $\dfrac{x^2-y}{y-x^2}$ f) $\dfrac{6z^2+6x}{-3x-3z^2}$

g) $\dfrac{3x^2-3x^3}{x(x^2-1)}$ h) $\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-4}$ i) $\dfrac{v^3-3v^2+3v-1}{2v^3-v^2-1}$