



7 Ungleichungen, Intervalle und Polynombrüche

✳ **Aufgabe 7.1** Lösen Sie die folgenden Ungleichungen.

a) $2x - 4 > 2 \quad | +4$
 $2x > 6 \quad | :2$
 $x > 3$

b) $3x + 8 < 2 \quad | -8$
 $3x < -6 \quad | :3$
 $x < -2$

c) $5x + 2 \leq 3x \quad | -3x - 2$
 $2x \leq -2 \quad | :2$
 $x \leq -1$

d) $2x - 3 \geq x + 1 \quad | -x + 3$
 $x \geq 4$

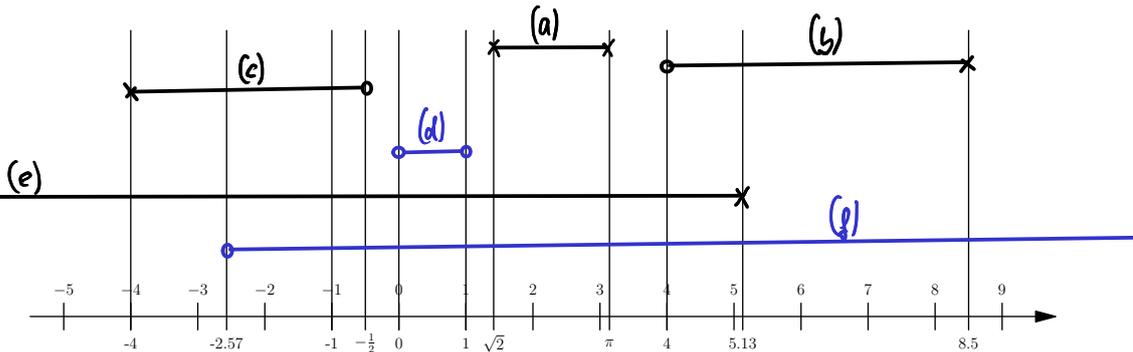
7.1 Intervalle

Um „zusammenhängende“ Bereiche von **reellen** Zahlen anzugeben, wird eine Schreibweise mit eckigen Klammern verwendet, die wir nun durch Beispiele erklären.

- (a) $[\sqrt{2}, \pi] = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \leq x \leq \pi\}$ Alle Zahlen von und mit $\sqrt{2}$ bis und mit π .
- (b) $]4, 8.5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x \leq 8.5\}$ Alle Zahlen grösser als 4 (ohne die 4) bis und mit 8.5.
- (c) $[-4, -\frac{1}{2}[= \{y \in \mathbb{R} \mid -4 \leq y < -\frac{1}{2}\}$ Alle Zahlen von und mit -4 bis $-\frac{1}{2}$ (ohne $-\frac{1}{2}$).
- (d) $]0, 1[= \{a \in \mathbb{R} \mid 0 < a < 1\}$ Alle Zahlen zwischen 0 und 1 ohne 0 und 1.
- (e) $] -\infty, 5.13] = \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 5.13\}$ Alle Zahlen kleiner oder gleich 5.13.
- (f) $] -2.57, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid -2.57 < x\}$ Alle Zahlen grösser als -2.57 (ohne -2.57).

Das Symbol ∞ (oder auch $+\infty$) bedeutet „plus Unendlich“ und ist grösser als jede reelle Zahl.
 Das Symbol $-\infty$ bedeutet „minus Unendlich“ und ist kleiner als jede reelle Zahl.

alles Intervalle



Merke

Intervalle sind Mengen von reellen Zahlen und werden mit eckigen Klammern geschrieben, wobei zuerst die untere Grenze und dann die obere Grenze angegeben wird (durch ein Komma getrennt). Ist die Klammer „richtig herum“, gehört die Grenze dazu und das Intervall ist an dieser Grenze **geschlossen**. Anderfalls ist das Intervall an dieser Grenze **offen**. Da die Symbole $-\infty$ und ∞ keine Zahlen sind, gehören sie nie zu einem Intervall und die Klammern bei diesen Symbolen als Grenzen sind immer «offen».

- $]3, 7[$
- $]3, \infty[$
- ~~$]3, \infty]$~~
- ~~$] -\infty, 3[$~~
- ~~$] -\infty, 3]$~~

✳ **Aufgabe 7.2** Geben Sie die Lösungsmengen der Aufgabe 7.1 als Intervall an.

a) $x > 3$, also $\mathbb{L} =]3, \infty[$

b) $x < -2$, also $\mathbb{L} =]-\infty, -2[$

c) $x \leq -1$, also $\mathbb{L} =]-\infty, -1]$

d) $x \geq 4$, also $\mathbb{L} = [4, +\infty[$

gibt es nicht!

✳ **Aufgabe 7.3** Was ist die kleinste Zahl im Intervall $]3, 4[$? Was ist die grösste Zahl im Intervall $]3, 4[$?

3 ✓

$3,9 = 4$ ist nicht in $]3, 4[$

7.2 Ungleichungen

✳ **Aufgabe 7.4** Lösen Sie die folgenden Ungleichungen und geben Sie jeweils die Lösungsmenge als Intervall an. Überprüfen Sie, ob Ihr Resultat stimmen kann, indem Sie als Test mindestens ein Element des Intervalls einsetzen.

a) $-5x > 5$

b) $-\frac{x}{2} \leq -6$

c) $-x < 2$

Aufgabe: a und b sind Zahlen mit $a < b$. Lösung

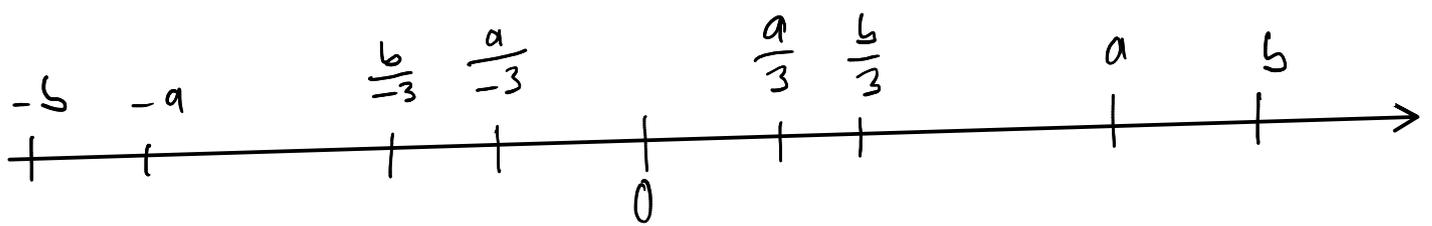
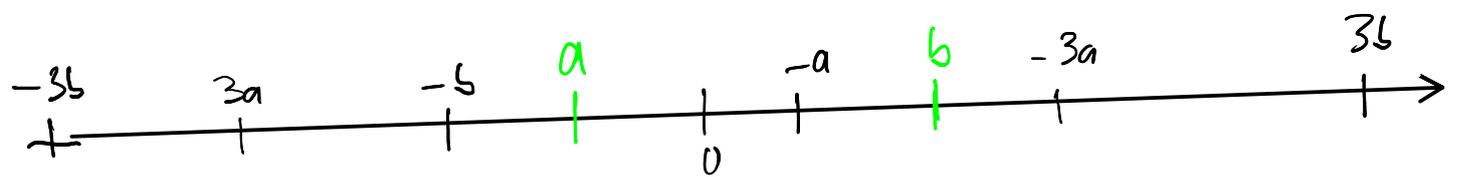
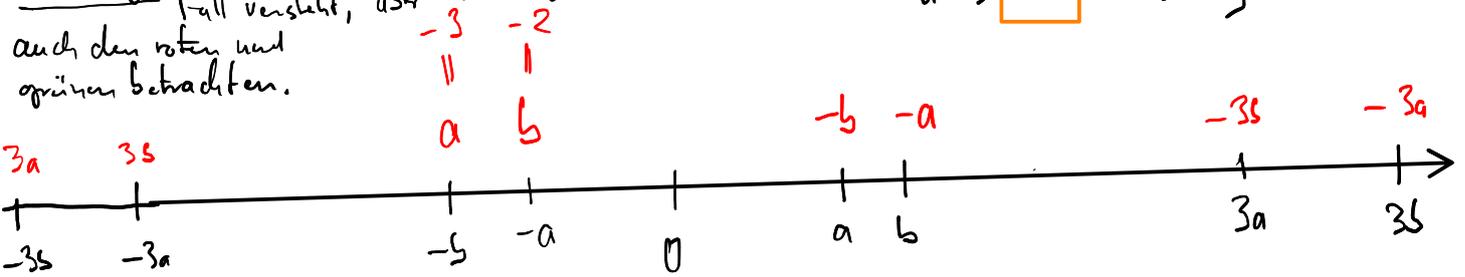
Welche Vergleichszeichen müssen ergänzt werden, damit alles stimmt?

$$\begin{array}{l}
 3a < 3b \quad \checkmark \checkmark \checkmark \\
 -a > -b \quad \checkmark \checkmark \checkmark \\
 -3a > -3b \quad \checkmark \checkmark \checkmark \\
 \frac{a}{3} < \frac{b}{3} \\
 -\frac{a}{3} = \frac{a}{-3} > \frac{b}{-3} = -\frac{b}{3} \\
 a+3 < b+3 \\
 a-3 < b-3
 \end{array}$$

Hinweis: Skizze mit Zahlenstrahl.

$$-\frac{a}{3} = \frac{a}{-3} > \frac{b}{-3} = -\frac{b}{3}$$

Lösung: Es reicht mir, wenn ihr den schwarzen Fall versteht, aber genauer sollte man auch den roten und grünen betrachten.



Fazit: Das Vergleichszeichen dreht sich, falls man mit einer negativen Zahl multipliziert oder durch eine negative Zahl dividiert, sonst nicht.



7.2.1 Umformungen von Ungleichungen

~~* Aufgabe 7.5 Erklären Sie schlüssig mit Hilfe einer Waage (das Gewicht auf einer Seite ist höher als das auf der anderen Seite), warum bei Ungleichungen das Addieren bzw. Subtrahieren eines beliebigen Terms eine Äquivalenzumformung ist (also die Lösungsmenge nicht ändert).~~

~~* Aufgabe 7.6 Wie steht es mit der Multiplikation einer Ungleichung? Worauf ist zu achten? Erklären Sie ebenfalls mit Hilfe einer Waage (und finden Sie eine Interpretation für ein negatives Gewicht auf der Waage).~~

* Aufgabe 7.7 Lösen Sie die folgende Ungleichung auf zwei Arten: Einmal nur mit Addition/Subtraktion, einmal nur mit Multiplikation:

$$-x > 4$$

Merke

Bei Ungleichungen darf man uneingeschränkt addieren (und subtrahieren). Beim Multiplizieren (und Dividieren) mit einer **negativen Zahl muss das Vergleichszeichen umgedreht werden:**

- $<$ wird zu $>$ und umgekehrt
- \leq wird zu \geq und umgekehrt.

7.3 Rechnen mit Polynombrüchen

Ein **Polynombruch** ist ein Bruch, dessen Zähler und Nenner Polynome sind (der Nenner muss von 0 verschieden sein); altmodisches Wort dafür: Bruchterm.

7.3.1 Kürzen und Erweitern

Beispiel:

Kürzen: $\frac{17x}{x^2 - x} = \frac{17x}{x(x - 1)} = \frac{17}{x - 1}$

Erweitern (= Kürzen „andersherum“ gelesen): $\frac{17}{x - 1} = \frac{17x}{x(x - 1)} = \frac{17x}{x^2 - x}$

Merke

Kürzen (bzw. Erweitern) von Brüchen: $\frac{P \cdot R}{Q \cdot R} = \frac{P}{Q}$

In Worten: Taucht ein Term (in der obigen Formel R) sowohl im Zähler als auch im Nenner eines Bruchs als *Faktor* auf, so darf dieser Term „weggekürzt“ werden.

Wenn man einen Bruch kürzen möchte, sollte man also zunächst versuchen, Zähler und Nenner als Produkt von Faktoren zu schreiben. Taucht dabei ein Faktor sowohl oberhalb als auch unterhalb des Bruchstrichs auf, kann man ihn wegkürzen. Beachten Sie, dass die Faktoren beliebig kompliziert sein dürfen.

* Aufgabe 7.8 Kürzen Sie soweit wie möglich, indem Sie gemeinsame Faktoren in Zähler und Nenner suchen!

a) $\frac{az + bz}{cz}$

b) $\frac{a + b + y^7}{y^7 + b + a}$

c) $\frac{b - a}{a - b}$

d) $\frac{-a - b}{a + b}$

e) $\frac{x^2 - y}{y - x^2}$

f) $\frac{6z^2 + 6x}{-3x - 3z^2}$

g) $\frac{3x^2 - 3x^3}{x(x^2 - 1)}$

h) $\frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 4}$

i) * $\frac{v^3 - 3v^2 + 3v - 1}{2v^3 - v^2 - 1}$

7.8 (g)

$$\frac{3x^2 - 3x^3}{x(x^2 - 1)} = \frac{x^2(3 - 3x)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{\cancel{x} \cdot x \cdot 3 \cdot (1-x)}{\cancel{x} \cdot (x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{3x \cdot (-1) \cdot \cancel{(x-1)}}{(\cancel{x-1})(x+1)} = \frac{-3x}{x+1}$$

(c) $\frac{b-a}{a-b} \left(= \frac{-(-b+a)}{a-b} \right) = \frac{(-1)(-b+a)}{a-b} = \frac{(-1)(\cancel{a-b})}{1 \cdot (\cancel{a-b})} = \frac{-1}{1} = -1$

Merke: $\frac{b-a}{a-b} \stackrel{\leftarrow}{=} -1$ Zähler ist negatives vom Nenner

$$\frac{x^2 - 3y + z}{3y - z - x^2} \stackrel{\leftarrow}{=} -1$$

(h) $\frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 4} = \frac{x^2 \cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}} = \frac{x^2}{x-2}$

Falsch: $\frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 4} = \frac{x^2(x+2)}{x^2 - 4} = \frac{x+2}{-4}$

stimmt z.B. nicht für $x=0$.

7.9 (e) $\frac{b-c}{a^2+ac} - \frac{a-b}{act+c^2} + \frac{a^2+c^2}{a^2c+ac^2}$

$$= \frac{b-c}{a(a+c)} - \frac{a-b}{(a+c)c} + \frac{a^2+c^2}{a \cdot c \cdot (a+c)} = \textcircled{\square}$$

möglicher Hauptnenner ist

$$a(a+c) \cdot (a+c) \cdot c \cdot a \cdot c \cdot (a+c)$$

→ sehr viel Rechenarbeit

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \textcircled{\oplus}$$

möglicher Hauptnenner ist $10 \cdot 15 \cdot 30 = 4500$

Nenner beim gleichnamig machen

Aber: besser: $30 = \text{kgV}(10, 15, 30)$

$$\textcircled{\oplus} = \frac{3}{30} - \frac{2}{30} + \frac{1}{30} = \frac{2}{30}$$

besserer Hauptnenner ist: $a \cdot c \cdot (a+c)$

$$\textcircled{a} = \frac{(b-c)c}{a \cdot c \cdot (a+c)} - \frac{(a-b)a}{(a+c) \cdot c \cdot a} + \frac{a^2+c^2}{a \cdot c \cdot (a+c)}$$

$$= \frac{bc - c^2 - (a^2 - ab) + a^2 + c^2}{a \cdot c \cdot (a+c)}$$

$$= \frac{bc - c^2 - a^2 + ab + a^2 + c^2}{a \cdot c \cdot (a+c)} = \frac{bc + ab}{a \cdot c \cdot (a+c)}$$

$$= \frac{b(c+a)}{a \cdot c \cdot (a+c)} = \frac{b}{ac}$$

7.9 (f)

$$\frac{3s}{(s-2)^2} - \frac{2}{s} + \frac{s+4}{2s-s^2}$$

Erweitere (bei Addition)
alle Brüche so, dass
die Nenner gleich sind.

$$= \frac{3s}{(s-2)^2} - \frac{2}{s} + \frac{s+4}{s(2-s)}$$

$$= \frac{3s}{(s-2)^2} - \frac{2}{s} + \frac{s+4}{s \cdot (-1) (s-2)} \quad \text{bester Hauptnenner: } (s-2)^2 s$$

$$= \frac{3s \cdot s}{(s-2)^2 \cdot s} - \frac{2 \cdot (s-2)^2}{s \cdot (s-2)^2} + \frac{(s+4) \cdot (-1) (s-2)}{s \cdot (-1) (s-2) \cdot (-1) (s-2)}$$

$$= \frac{3s^2 - 2(s-2)^2 + (-1) \cdot (s+4)(s-2)}{s(s-2)^2}$$

$$= \frac{3s^2 - 2(s^2 - 4s + 4) - (s^2 - 2s + 4s - 8)}{s(s-2)^2}$$

$$= \frac{3s^2 - 2s^2 + 8s - 8 - s^2 + 2s - 4s + 8}{s(s-2)^2}$$

$$= \frac{6s}{s(s-2)^2}$$

$$= \frac{6}{(s-2)^2}$$

7.9 (a) $\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}$ Machte gleichnamig mit
Hauptnenner $(x-y)(x+y)$

$$= \frac{(x+y) \cdot (x+y)}{(x-y) \cdot (x+y)} - \frac{(x-y) \cdot (x-y)}{(x+y) \cdot (x-y)}$$

$$= \frac{x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2)}{(x+y)(x-y)}$$

$$= \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{4xy}{x^2 - y^2}$$

Aufgaben: 7.10 - 7.12



7.3.2 Addition und Subtraktion von Brüchen

Merke

Vor der **Addition** (oder Subtraktion) von zwei Brüchen, müssen die Brüche erst **gleichnamig** gemacht werden, indem man sie **erweitert**. **Gleichnamige Brüche** werden addiert, indem man die **Zähler addiert**.

✂ **Aufgabe 7.9** Geben Sie jeweils das Ergebnis der Rechnung als möglichst weit gekürzten Bruch an. Falls möglich, faktorisieren Sie zuerst den Nenner! Machen Sie dann die Brüche gleichnamig, fassen Sie zusammen, faktorisieren Sie und kürzen Sie, falls möglich.

a) $\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}$ b) $\frac{4}{z-1} + \frac{z-9}{z^2-1}$ c) $\frac{n}{n+1} - \frac{2n+1}{n-1} + \frac{n^2+5n}{n^2-1}$
 d) $\frac{a}{a^2-b^2} + \frac{b}{(a-b)^2}$ e) $\frac{b-c}{a^2+ac} - \frac{a-b}{ac+c^2} + \frac{a^2+c^2}{a^2c+ac^2}$ f) $\frac{3s}{(s-2)^2} - \frac{2}{s} + \frac{s+4}{2s-s^2}$

7.3.3 Multiplikation und Division von Brüchen

Merke

Bruch mal Bruch, wie macht's der Kenner? Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner.
Es wird durch einen Bruch dividiert, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert.

✂ **Aufgabe 7.10** Vereinfachen Sie soweit wie möglich. *Hinweis: Es ist oft besser, erst die Summe oder Differenz als einen Bruch zu schreiben, bevor multipliziert wird (anstatt auszumultiplizieren).*

a) $\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2} \left(\frac{u}{u+v} + \frac{v}{u-v} \right)$ b) $\left(\frac{1}{r-s} - \frac{1}{r+s} \right)^2$
 c) $\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right) : \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right)$ d) $\left(1 - \frac{1}{n^2} \right) : \left(1 + \frac{1}{n} \right)$
 e) $\left(a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} \right) : \left(a^2 - \frac{1}{a^2} \right)$ f) $\frac{1}{n^2+2n+1} \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)$
 g) $\left(\frac{3n^2(n+1) - 2n(n^2+4)}{n+1} + 12 \right) : (n^2+4) - \frac{2}{n+1} + \frac{1-n^2}{n^2+n}$

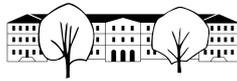
binomische Formel.

7.3.4 Weitere Aufgaben

✂ **Aufgabe 7.11** Der Kilopreis (= Kilogrammpreis) von Kaffeesorte A ist 2 Franken höher als derjenige von Sorte B. Von Sorte B erhält man für 160 Franken acht Kilogramm mehr als von Sorte A für 120 Franken. Berechnen Sie den Kilopreis von Sorte A.

✂ **Aufgabe 7.12** Falls ein Fehler vorhanden ist, erklären und korrigieren Sie diesen. Wenn kein Fehler vorhanden ist, erklären Sie, wie man das einfacher machen könnte.

a) $2 \cdot \frac{ab}{a^2-b^2} = \frac{2ab}{2a^2-2b^2}$
 b) $\frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a-b} = \frac{b(a-b)}{a^2-b^2} \cdot \frac{a(a+b)}{a^2-b^2}$
 c) $\frac{b(a-b)}{a^2-b^2} \cdot \frac{a(a+b)}{a^2-b^2} = \frac{b(a-b) \cdot a(a+b)}{a^2-b^2}$
 d) $\frac{a^2+ab}{a^2-b^2} - \frac{ab-b^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2+ab-ab-b^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2-b^2} = 1$



e) $\frac{a-b}{a^2-ab} : \frac{b^2-ab}{a-b} = \frac{\cancel{a-b}}{a^2-ab} : \frac{b^2-ab}{\cancel{a-b}} = \frac{1}{a^2-ab} : \frac{b^2-ab}{1}$

f) $\frac{1}{a^2-ab} - \frac{b^2-ab}{1} = \frac{1}{a^2-ab} - b^2 - ab$

g) $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} - 2 \cdot \frac{a^2}{a^2-b^2} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2 + (a-b)^2 - 2(a^2-b^2)} + \frac{(a-b)^2}{a^2-b^2} - \frac{2(a^2-b^2)}{a^2-b^2} \cdot \frac{a^2}{a^2-b^2} =$

h) $\frac{a}{a^4+b^4} = \frac{a}{a(a^3+b^4)} = \frac{1}{a^3+b^4}$

i) $\frac{(a+b)+ab}{(a+b)-ab} = \frac{\cancel{(a+b)}+ab}{\cancel{(a+b)}-ab} = \frac{ab}{-ab} = -1$

j) $\frac{4x-5}{6} = x + \frac{5}{6} \quad | \cdot 6$
 $4x-5 = x+5$

k) $\frac{4x+7}{6} = \frac{4+5x}{6} \quad | -4x-4$
 $\frac{3}{6} = \frac{x}{6}$

Und noch zwei kleine Fragen:

- l) Seien a und b zwei reelle Zahlen. Was lässt sich über die Vorzeichen von a und b aussagen, wenn man weiss, dass a · b < 0?
- m) Seien a und b zwei reelle Zahlen von denen man weiss, dass a · b < 2. Was lässt sich über die Vorzeichen von a und b aussagen?

7.4 Spezielle Ungleichungen

Beispiel: Lösen Sie folgende Ungleichung

$\frac{x+3}{x-1} \leq 2$

$\frac{x+3}{x-1} \leq 2 \quad | \cdot (x-1) \quad \triangle$

Beachte, dass diese Ungleichung nur für x ≠ 1 sinnvoll ist, weil sonst der Nenner des Bruches Null ist.

Also x ≠ 1

Erstens handelt es sich hier um eine Aufpassungsformung.

Wir ~~wissen~~ wissen nicht, ob (x - 1) positiv oder negativ ist und ob als Konsequenz das Vergleichszeichen umgedreht werden muss oder nicht.

Es müssen also zwei Fälle unterschieden werden:

Fall 1 (x - 1) > 0, d.h. $x > 1$

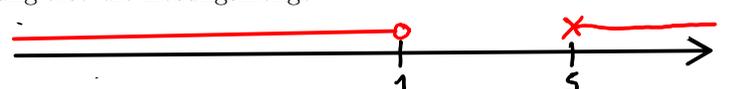
$x+3 \leq 2(x-1)$
 $x+3 \leq 2x-2 \quad | -x+2$
 $5 \leq x \quad \text{und } x > 1$
 $\mathbb{L}_1 = [5, \infty[$

Fall 2 (x - 1) < 0, d.h. $x < 1$

$x+3 \geq 2(x-1)$
 $x+3 \geq 2x-2$
 $5 \geq x \quad \text{und } x < 1$
 $\mathbb{L}_2 =]-\infty, 1[$

Zusammengefasst hat die anfangs betrachtete Ungleichung also die Lösungsmenge

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_1 =]-\infty, 1[\cup [5, \infty[$

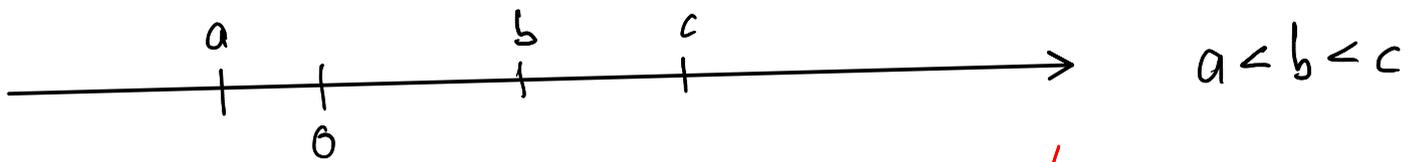


Plausibilitätscheck: $x = -1 \quad -1 = \frac{2}{-2} = \frac{-1+3}{-1-1} \stackrel{?}{\leq} 2$ stimmt.

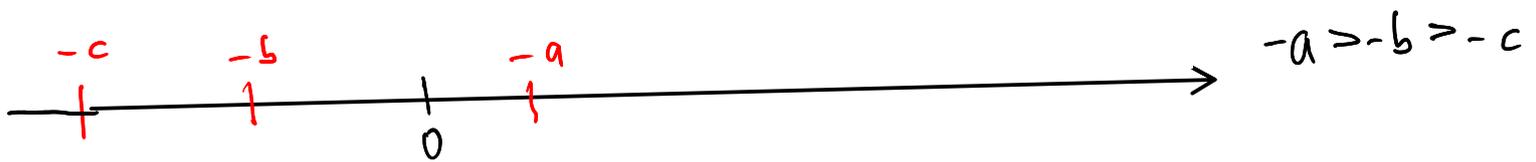
$$\frac{x=2}{S} = \frac{5}{1} = \frac{+2+3}{+2-1} \stackrel{?}{\leq} 2 \text{ stimmt nicht, da } x=2 \notin \mathbb{L}$$

$$\frac{x=6}{1.8} \stackrel{=}{=} \frac{18}{10} = \frac{9}{5} = \frac{6+3}{6-1} \stackrel{?}{\leq} 2 \text{ stimmt}$$

Erinnerung: Wenn man eine Ungleichung multipliziert mit einer negativen Zahl, muss man das Vergleichszeichen umdrehen.



$\cdot (-1)$



1. Fall: $3x - 2 > 0$ (oder äquivalent $3x > 2$ oder äquivalent $x > \frac{2}{3}$)



✳ **Aufgabe 7.13** Lösen Sie folgende Ungleichungen nach x auf (beachte den Hinweis für Teilaufgabe (d)).

a) $\frac{2x-3}{3x-2} \geq 2$ b) $\frac{x+2}{3+4x} < 5$ c) $\frac{x^2-3x-1}{x+1} \geq x-2$ d) $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1} \geq 2$

Hinweis: Bei Teilaufgabe (d) dürfen Sie bereits die Lösung der ersten beiden Teilaufgaben von Aufgabe 7.15 verwenden:

- $x^2 > 1$ ist äquivalent zu $x < -1$ oder $x > 1$;
- $x^2 < 1$ ist äquivalent zu $-1 < x < 1$.

Multipliziere mit $3x-2$

$\frac{(2x-3) \cdot (3x-2)}{3x-2} \geq 2(3x-2)$

7.4.1 Vorzeichen von Produkten und Quotienten

Merke

Hat eine Ungleichung die Form

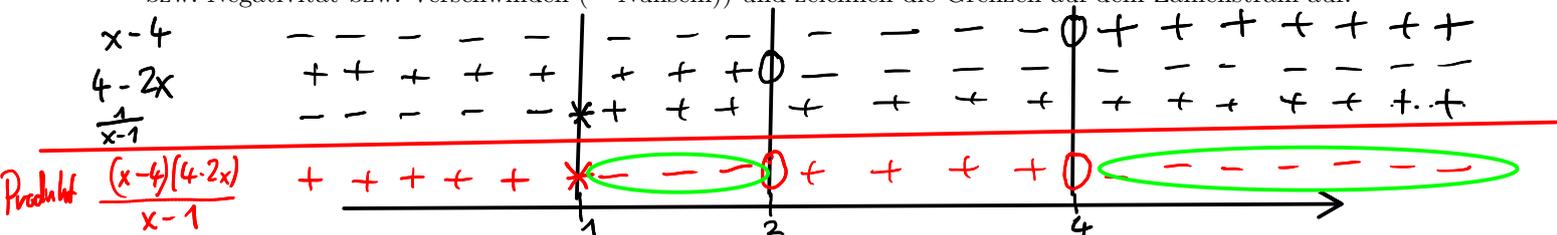
«Produkt Vergleichszeichen 0» (also «Produkt < 0» oder «Produkt ≤ 0» oder «Produkt > 0» oder «Produkt ≥ 0»),

so reicht es, die Vorzeichen der Faktoren zu untersuchen. Genau dann, wenn eine ungerade Anzahl der Faktoren negativ ist, ist auch das Produkt negativ.

Beispiel: $\frac{(x-4)(4-2x)}{x-1} < 0$ \rightsquigarrow Foto nächste Seite

Es gilt $\frac{(x-4)(4-2x)}{x-1} = (x-4) \cdot (4-2x) \cdot \frac{1}{x-1}$. Ausserdem ist $\frac{1}{x-1}$ genau dann positiv (bzw. negativ), wenn $(x-1)$ positiv (bzw. negativ) ist.

Wir untersuchen deswegen die drei Terme $(x-4)$, $(4-2x)$ und $(x-1)$ auf Vorzeichen (genauer: Positivität bzw. Negativität bzw. Verschwinden (= Nullsein)) und zeichnen die Grenzen auf dem Zahlenstrahl auf:



Wir lesen nun die Intervalle ab, wo das Vorzeichen des Produkts negativ ist und erhalten

$\mathbb{L} =]1, 2[\cup]4, \infty[$

* nicht definiert

Merke

Die Grenzen von Termen im Nenner sind **immer** auszuschliessen (da Division durch Null nicht definiert). Sonst sind die Grenzen genau dann einzuschliessen, wenn das Vergleichszeichen \leq oder \geq ist.

✳ **Aufgabe 7.14** Geben Sie die Lösungsmengen für das Beispiel an, wenn das Vergleichszeichen a) zu \leq ; b) zu \geq ; c) zu $>$ geändert wird.

✳ **Aufgabe 7.15** Geben Sie die Lösungsmengen für die folgenden Beispiele an.

Hinweis für die ersten beiden Teilaufgaben: Bringen Sie alles auf eine Seite (d.h. formen Sie so um, dass auf einer Seite Null steht).

- a) $x^2 > 1$ b) $x^2 < 1$ c) $x^5 > 0$ d) $x^6 \leq 0$

✳ **Aufgabe 7.16** Lösen Sie folgende Ungleichungen. Wenn nötig, bringen Sie zuerst alles auf eine Seite, fassen Sie auf einem Bruchstrich zusammen und faktorisieren Sie.

NO SIGNAL

Für welche x gilt die Ungleichung
 $(x-4)(4-2x) \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{(x-4)(4-2x)}{x-1} < 0$?

$$\begin{array}{ccccccc} (-2) & \cdot & 3 & (-5) & \cdot & \frac{1}{-3} & < 0 \\ - & + & - & - & & & \text{stimmt} \end{array}$$

Wann ist $x-4$ positiv?

$$\begin{array}{l} x-4 \geq 0 \\ x \geq \boxed{4} \end{array}$$

Wann ist $4-2x$ positiv?

$$\begin{array}{l} 4-2x > 0 \\ 4 > 2x \\ \boxed{2} > x \end{array}$$

Wann ist $\frac{1}{x-1}$ positiv?

Frage mit demselben Antwort: Wann ist $x-1$ positiv?

$$\begin{array}{l} (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) \\ \parallel \\ x-1 > 0 \\ x > \boxed{1} \end{array}$$

$$\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

$$\underline{(x-4)(6-5x) \geq 0}$$

Tipp für 7/15:

$$x^2 > 5 \quad | -5$$

$$x^2 - 5 > 0$$

$$(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) > 0$$



a) $\frac{(x^4 - 4)}{(3 - x)(x^2 + 1)} \geq 0$

b) $\frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^2 - 1} \leq 0$

c) $\frac{x + 8}{x + 6} + \frac{x}{2} < 0$

d) $\frac{1}{x + 2} > \frac{4x - 3}{5x + 3}$

✂ **Aufgabe 7.17** Lösen Sie die Ungleichungen von Aufgabe 7.13, indem Sie die Ungleichungen auf die Form «Bruch < 0 » oder «Bruch ≤ 0 » bringen.

7.5 Definitionsbereich eines Polynombruchs

Beispiel: Der Polynombruch $\frac{3}{x}$ liefert für jede Einsetzung von x eine reelle Zahl – aber aufgepasst: x darf nicht Null sein! Unser Polynombruch ist also für $x = 0$ nicht definiert, seine *Definitionsmenge* besteht aus allen reellen Zahlen ungleich Null.

Merke

Definition

Zu jedem Polynombruch in einer Variablen (meist x) gehört ein **Definitionsbereich**, der meist mit \mathbb{D} abgekürzt wird. Dieser besteht aus allen reellen Zahlen, die für die Variable eingesetzt werden dürfen.

Beispiele

a) $\frac{3}{x}$ Es darf nicht $x = 0$ gelten, d.h. der Definitionsbereich ist $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
Erinnerung: Das Zeichen \setminus bedeutet «ohne».

b) $\frac{4+x}{3+x}$ Wann ist $3 + x = 0$? Genau dann, wenn $x = -3$. Also $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

c) $\frac{17x}{x^2-x}$ Wann ist $x^2 - x = 0$? Genau dann, wenn $x(x-1) = 0$, also $x = 0$ oder $x = 1$. Also $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Merke

Der Polynombruch $\frac{P(x)}{Q(x)}$ hat die Definitionsmenge

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) = 0\} = \mathbb{R} \setminus \text{Menge der Nullstellen des Nenners.}$$

Hier sind $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome.

Genaugenommen muss der Polynombruch vollständig gekürzt sein: Beispielsweise hat $\frac{x^2+x}{x} = \frac{x+1}{1} = x+1$ als Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. Die unmittelbar folgenden Aufgaben sind so gestellt, dass dieses Problem nicht auftaucht.

✂ **Aufgabe 7.18** Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich.
Hinweis: Wann ist der Nenner Null? Faktorzerlegung des Nenners nutzen.

a) $\frac{x^2 + 7}{3x - 4x^2}$

b) $\frac{x + 5}{x^2 - 36}$

c) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 6}$

d) $\frac{a^4 + a^2 + 1}{a^3 + 2a^2 - 35a}$

✂ **Aufgabe 7.19** Finde jeweils einen Polynombruch mit dem angegebenen Definitionsbereich.

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

b) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, -\frac{1}{3}\}$

c) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

d) ✂ $\mathbb{D} = \emptyset$