4 Planimetrie Grundlagen

Die Planimetrie („flache Messkunde“, „ebene Geometrie“, „Geometrie der Ebene“) ist die Lehre der in der Ebene liegenden Figuren. Die Ebene wird als eine **Menge von Punkten** aufgefasst.

4.1 Definitionen und Notationen

Beachten Sie, dass die Notationen in der Geometrie nicht standardisiert sind. In verschiedenen Lehrmitteln werden verschiedene Notationen verwendet.

Wir definieren folgende Notationen für Objekte in der Ebene:

P	**Punkt** (ohne Ausdehnung, bezeichnet mit grossen Buchstaben)
g	**Gerade** (beidseitig unbegrenzt, bezeichnet mit kleinen Buchstaben) Durch zwei verschiedene Punkte gibt es genau eine Gerade! Eine Gerade ist eine Menge von Punkten.
$A \in g$	Der Punkt A liegt auf der Geraden g. D.h. A ist Element der Punktemenge g.
$B \notin g$	Der Punkt B liegt nicht auf der Geraden g. D.h. B ist nicht Element von g.
AB	**Gerade** (Punktemenge) durch die Punkte A und B. Z.B. $g = AB$ (Hier ist vorausgesetzt, dass A und B voneinander verschieden sind.)
$[AB]$	**Strecke** (Punktemenge) zwischen A und B, inklusive der Punkte A und B.
$\overline{AB}$	**Länge** (relle Zahl) der Strecke $[AB]$ (gemessen als Vielfaches einer definierten Einheitslänge).
$\overline{Pg}$	**Abstand** von P zu g, definiert als die kürzeste Entfernung von P zu einem Punkt auf g.
$g \parallel h$	Zwei Geraden, die keinen Punkt gemeinsam haben, heissen **parallele** Geraden. Zu einer Geraden g und einem nicht auf ihr liegenden Punkt P gibt es genau eine Parallele p durch den Punkt P.
$S = g \cap h$	**Schnittpunkt** S der Geraden g und h. Lies «g geschnitten mit h». (Hier ist vorausgesetzt, dass die Geraden nicht parallel sind.)
$g \cap h = \varnothing$	g und h **schneiden sich nicht** (also $g \parallel h$). Das Symbol $\varnothing$ ist die **leere Menge**.
$g = h$	Die beiden Geraden g und h sind **identisch**. *Manchmal werden identische Geraden ebenfalls als parallel betrachtet.*
$[AB$	**Halbgerade**, die beim Punkt A beginnt und sich durch B ins Unendliche erstreckt.
$\alpha = \sphericalangle ASB$	**Winkel** mit **Scheitel** S und **Schenkeln** $[SA$ und $[SB$. Vorläufig gilt: $\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSA$ und damit $0° \leq \sphericalangle ASB \leq 180°$. Bezeichnung mit kleinen griechischen Buchstaben: z.B. α, β, γ, δ, ε, φ, ω.
$\sphericalangle(g,h)$	**Winkel** zwischen g und h. Vorläufig gilt $\sphericalangle(g,h) = \sphericalangle(h,g)$ und damit $0° \leq \sphericalangle(g,h) \leq 90°$
$g \perp h$	$\sphericalangle(g,h) = 90°$.
m_{AB}	**Mittelsenkrechte** zu den Punkten A, B.
M_{AB}	**Mittelpunkt** der Strecke $[AB]$.
$k = k(M,r)$	**Kreis** k mit Mittelpunkt M und Radius r.
w_{gh}	**Winkelhalbierende** zu den Geraden g, h.
w_{gh}^1, w_{gh}^2	**Winkelhalbierendenpaar** zu den Geraden g, h. Beachten Sie, dass $w_{gh}^1 \perp w_{gh}^2$.

4.2 Grundkonstruktionen mit Zirkel, Lineal und Geodreieck

m_{AB}	**Gegeben:** Punkte A und B. 1. Wähle $r > \frac{1}{2}\overline{AB}$ $\rightarrow r$ 2. $k(A, r)$ $\rightarrow k_1$ 3. $k(B, r)$ $\rightarrow k_2$ 4. $k_1 \cap k_2$ $\rightarrow P_1, P_2$ 5. P_1P_2 $\rightarrow m_{AB}$
M_{AB}	**Gegeben:** Punkte A und B. 1. $AB \cap m_{AB}$ $\rightarrow M_{AB}$
Senkrechte (Lot) p zu g durch P	**Gegeben:** Gerade g, Punkt P. 1. Mit Geodreieck $\rightarrow p$ **oder** 1. Wähle $r > \overline{Pg}$ $\rightarrow r$ 2. $k(P, r) \cap g$ $\rightarrow A, B$ 3. m_{AB} $\rightarrow p$
Parallele p zu g durch P	**Gegeben:** Gerade g, Punkt P. 1. Verschiebung mit Geodreieck $\rightarrow p$ **oder** 1. Senkrechte zu g durch P $\rightarrow h$ 2. Senkrechte zu h durch P $\rightarrow p$
w_{gh}, bzw. w_{gh}^1 und w_{gh}^2	**Gegeben:** Sich schneidende Geraden g, h. 1. $g \cap h$ $\rightarrow S$ 2. Wähle einen Radius $\rightarrow r_1$ 3. $k(S, r_1)$ $\rightarrow k$ 4. $k \cap g$, $k \cap h$ $\rightarrow G$, H 5. m_{gh} $\rightarrow w_{gh}$, bzw. w_{gh}^1 6. Optional: Rechtwinklige zu w_{gh}^1 durch S $\rightarrow w_{gh}^2$
Parallelen p_1, p_2 zu g mit gegebenem Abstand d	**Gegeben:** Gerade g, Länge d. 1. Wähle $P \in g$ $\rightarrow P$ 2. Senkrechte zu g durch P $\rightarrow h$ 3. $k(P, d) \cap h$ $\rightarrow H_1$, H_2 4. Parallelen zu g druch H_1, H_2 $\rightarrow p_1$, p_2
Winkel α übertragen	**Gegeben:** Winkel α, Scheitel S, Schenkel g, h, Halbgerade $i = [AB$ 1. Wähle einen Radius $\rightarrow r$ 2. $k(S, r)$, $k(A, r)$ $\rightarrow k_1$, k_2 3. $k_1 \cap g$, $k_1 \cap h$ $\rightarrow G$, H 4. $k_2 \cap i$ $\rightarrow I$ 5. $k(I, \overline{GH}) \cap k_2$ $\rightarrow J_1$, J_2 6. Übertragener Winkel α $\rightarrow \sphericalangle BAJ_1$, $\sphericalangle BAJ_2$

Aufgabe 4.1 Konstruieren Sie obige Grundkonstruktionen.

⚒ **Aufgabe 4.2** Erstellen Sie eine Konstruktionsbeschreibung für die Konstruktion des Abstands eines Punktes P zu einer Geraden g.

⚒ **Aufgabe 4.3** Erstellen Sie eine Konstruktionsbeschreibung für das Abtragen einer Strecke.

⚒ **Aufgabe 4.4** Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $s = 5$ cm und erstellen Sie eine Konstruktionsbeschreibung.

Aufgabe 4.5
Konstruieren Sie ein regelmässiges Fünfeck $ABCD$ nach folgender Konstruktionsbeschreibung:
Gegeben: Punkt Z, Radius r, Umkreis $k = k(Z, r)$.

1.	Wähle $A \in k$	$\to A$
2.	Rechtwinklige zu ZA durch Z	$\to g$
3.	$k \cap g$	$\to G$
4.	$k(M_{ZG}, \overline{M_{ZG}A}) \cap g$	$\to F$ (nimm denjenigen Schnittpunkt, der näher bei Z liegt
5.	$\overline{AF}$ von A aus auf k 4 mal abtragen	$\to B, C, D, E$

Aufgabe 4.6 «Übersetzen» und verkürzen Sie die Konstruktionsbeschreibung zur «*Konstruktion mit Zirkel und Lineal bei gegebener Seitenlänge*» zu finden im Wikipedia-Artikel «Fünfeck» in die hier vorgestellte Kurzschreibweise für Konstruktionsbeschreibungen.

4.3 Koordinatensystem

Um ein (rechtwinkliges) Koordinatensystem in der Ebene zu definieren, müssen 3 Dinge festgelegt werden:

- Ein Ursprung (auch Nullpunkt genannt) O (der Buchstabe 'O').
- Eine Einheitslänge.
- Eine Richtung für die erste Achse (x-Achse).

Die letzten zwei Dinge können z.B. durch die Wahl eines weiteren Punkts X festgelegt werden. Die Einheitslänge ist dann $\overline{OX}$. Normalerweise erhält man die y-Achse durch eine Drehung der x-Achse um 90° im **Gegenuhrzeigersinn**. Die x-Achse OX wird normalerweise horizontal mit positiver Richtung nach rechts und die y-Achse nach oben eingezeichnet.

Aufgabe 4.7 Zeichnen Sie auf kariertem Papier ein Koordinatensystem mit Mittelpunkt in der Blattmitte, Einheit 2 Häuschen und x-Achse nach rechts, y-Achse nach oben. Zeichnen Sie (in der gegebenen Reihenfolge) folgende Objekte ein:
a) Punkte $A = (8, 2)$, $B = (2, -6)$, $C = (-4, -4)$.
b) Mittelsenkrechten m_{AB} und m_{BC}.
c) Schnittpunkt $D = m_{AB} \cap m_{BC}$. Schätzen Sie die Koordinaten von D ab.
d) Strecke AB, Angabe der Länge $\ell = \overline{AB}$ (in Einheitslängen!).
e) Kreis $k_1 = k(D, \overline{DA})$. Was stellen Sie fest? Können Sie Ihre Feststellung beweisen?
f) $E = M_{AD}$ und $k_2 = k(E, \overline{EA})$.
g) Messen Sie die Dreieckswinkel $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$ und $\gamma = \sphericalangle BCA$. Berechnen Sie deren Summe. Was sollte das Ergebnis sein? Warum ist dem eher nicht so?
h) Strecken $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.
i) $F = m_{AB} \cap c$. Gilt $F \in k_2$? Ist das Zufall oder können Sie das beweisen?
j) Ist $\overline{DF} = \overline{AF}$? Gilt das auch, wenn man die Punkte A, B, C etwas anders wählt?

4.4 Geometrische Örter (auch: geometrische Orte)

Ein **geometrischer Ort** ist eine Menge von Punkten, die eine bestimmte Eigenschaft haben, bzw. eine bestimmte Bedingung erfüllen. In der konstruktiven Geometrie sind geometrische Örter normalerweise Geraden oder Kreise.

4.4.1 Geometrische Örter der konstruktiven Geometrie

m_{AB}	Gegeben sind zwei Punkte $A \neq B$. m_{AB} ist die Menge aller Punkte P für die gilt: $\overline{PA} = \overline{PB}$. Kurz: $m_{AB} = \{P \mid \overline{PA} = \overline{PB}\}$
✎	Gegeben sind ein Punkt M und eine Länge r. ✎ ist die Menge aller Punkte P für die gilt: $\overline{MP} = r$. Kurz: ✎
✎	Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden $g \neq h$. ✎ Kurz: ✎ $= \{P \mid \overline{Pg} = \overline{Ph}\}$.
✎	Gegeben sind zwei parallele Geraden $g \neq h$. ✎ Kurz: ✎ $= \{P \mid \overline{Pg} = \overline{Ph}\}$.
Parallelenpaar zu g im Abstand d	✎

Geometrische Örter werden sehr oft zur Konstruktion von Punkten (oder Punktemengen) verwendet, die mehrere Bedingungen erfüllen sollen.

Beispiel: Gegeben sind zwei Punkte A, B mit $\overline{AB} = c = 5$. Gesucht ist ein Punkt C mit $\overline{AC} = b = 4$ und $\overline{BC} = a = 3$.

1. $k(A, b)$ $\to k_1$: 1.g.O.f. C *Erster geometrischer Ort für C*
2. $k(B, a)$ $\to k_2$: 2.g.O.f. C
3. $k_1 \cap k_2$ $\to C_1$, C_2

Der Punkt C muss gleichzeitig zwei Bedingungen erfüllen. Konstruktiv geht man so vor, dass man alle Punkte konstruiert, die eine Bedingung erfüllen (in diesem Fall je ein Kreis), die geometrischen Örter. Der Schnitt dieser Örter ergibt dann die Punkte, die beide Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 4.8 Zeichnen Sie ein Koordinatensystem mit Einheit 2 Häuschen und mindestens je 6 Einheiten nach oben und unten.

Gegeben sind die Punkte $A = (-4, -3)$, $B = (2, 0)$ und $C = (0, 2)$. Daraus ergeben sich die Geraden $g = AB$ und $h = BC$.

a) Konstruieren Sie alle Kreise, die g und h berühren und durch C gehen.

b) Konstruieren Sie die Punktemenge $\{P \mid \overline{AP} = \overline{CP}$ und $\overline{Pg} \leq \overline{Ph}\}$ und heben Sie diese farblich hervor.

c) Konstruieren Sie die Punktemenge $\{P \mid \overline{PB} \leq \overline{PC}$ und $\overline{Pg} \geq \overline{Ph}\}$ und heben Sie diese farblich hervor.

Aufgabe 4.9 Auf einer Wiese ist eine Ziege am Punkt $P = (1, -2)$ mit einer Leine der Länge $\ell = 6.5$ angebunden. Auf der Wiese steht ein Haus mit quadratischem Grundriss der Seitenlänge 3 mit je einer Seite auf einer positiven Achse.

Konstruieren Sie die Menge aller Punkte, die die Ziege erreichen kann.

Aufgabe 4.10 Gegeben sind die Geraden g durch $A = (4, -2)$ und $B = (7, 2)$ und die Parallele h zu g durch den Punkt $C(-1, -0.5)$. Weiter ist der Punkt $P(6, 3.5)$ gegeben. Konstruieren Sie alle Kreise, die g und h berühren und durch P gehen. Schätzen Sie die Koordinaten der Mittelpunkte der Kreise ab.

Aufgabe 4.11 Gegeben sind die Gerade $g = G_1G_2$ mit $G_1 = (-1, -1)$ und $G_2 = (4, 1)$ und der Punkt $A = (0, 2)$. Konstruieren Sie alle Kreise, die g in G_1 berühren und durch A gehen.