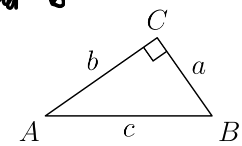
8 Satzgruppe des Pythagoras

Satz 1 Satz von Pythagoras

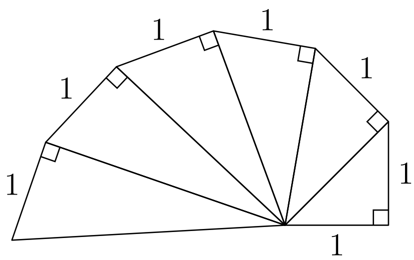
✎ In jedem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten a und b und Hypotenuse c gilt: $\boxed{a^2+b^2=c^2}$

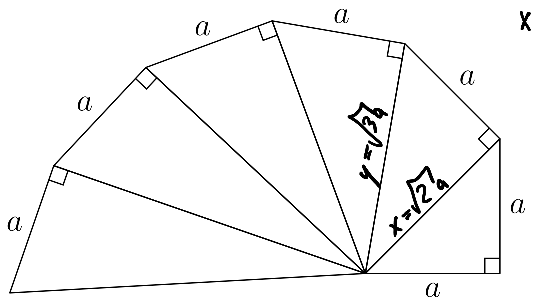


Aufgabe 8.1 Wurzelkonstruktionen:

$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$

(a) Konstruiere auf Kästchenpapier eine Strecke der Länge $\sqrt{13}$ (Längenangaben in Zentimeter).
(b) Konstruiere auf Kästchenpapier eine Strecke der Länge $\sqrt{22}$.
(c) Wurzelschnecke oder -spirale oder Spirale des Theodorus: Bestimme alle nicht angegebenen Längen in den beiden folgenden Zeichnungen!



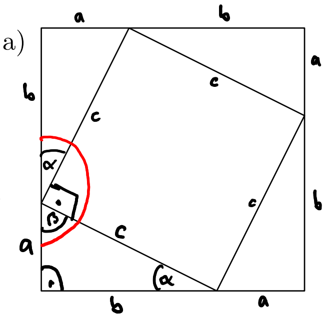


$x = \sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2} = \sqrt{2}a$

$y = \sqrt{a^2+(\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{a^2+2a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a$

Aufgabe 8.2 Ausgehend von einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck, beweisen Sie den Satz von Pythagoras mit Hilfe der folgenden Skizzen. Wer genau ist, überlegt sich auch, warum gewisse Figuren, die wie Quadrate aussehen, wirklich Quadrate sind.

a)



$\alpha+\beta = 90°$

$= \alpha + 90° + \beta = 180°$

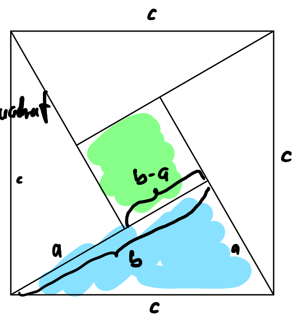
d.h. kein Knick.

Fläche des grossen Quadrats $= (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$=$ Fläche kleines Quadrat $+ 4\cdot$ Dreiecksfläche $= c^2+4\cdot\frac{1}{2}ab = c^2+2ab \quad |-2ab$

$\boxed{a^2+b^2 = c^2}$

b)



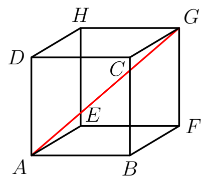
Fläche grosses Quadrat $= c^2$

$= (b-a)^2 + 4\cdot\frac{1}{2}ab = b^2-2ab+a^2+2ab = a^2+b^2$

Aufgabe 8.3 Zeigen Sie, dass $\boxed{ab = hc}$ in jedem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten a und b, Hypotenuse c und Höhe h über der Hypotenuse gilt. Hinweis: Fläche.

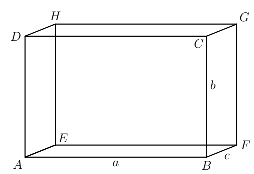
$h = h_c$

Aufgabe 8.4 Stell dir vor, dass eine Fliege und eine Spinne in einer Ecke A eines würfelförmigen Raums der Seitenlänge 1 sitzen.



(a) Welche Flugstrecke legt die Fliege zurück, wenn sie direkt zur gegenüberliegenden Ecke G fliegt? Mit anderen Worte: Wie lang ist die (rot eingezeichnete) Raumdiagonale $[AG]$?
(b) Wie lang ist der kürzeste Weg für die Spinne zur gegenüberliegenden Ecke G? Sie kann nur auf den Wänden des Raums laufen.

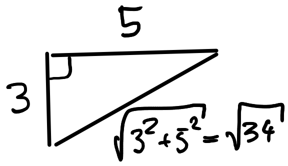
Nun stell dir vor, dass der Raum quaderförmig ist mit Seitenlängen a, b und c.

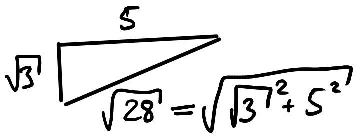


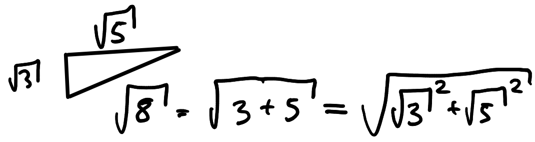
(c) Wie lang ist die Raumdiagonale $[AG]$ im Quader?
(d) Wie lang ist der kürzeste Weg von A nach G über einen geeigneten Punkt der Kante $[BC]$?
(e) Wie lang ist der kürzeste Weg entlang der Wände von A nach G, wenn $a \geq b \geq c$ gilt? Über welche Kante führt der kürzeste Weg?

Aufwärmaufgaben

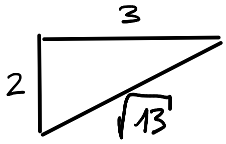
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$







8.1 (a)



da $13 = 4 + 9 = 2^2 + 3^2$

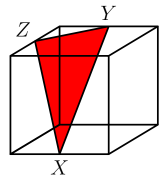
Merke

Da ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$ durch seine drei Seitenlängen a, b, c bis auf Kongruenz (= Deckungsgleichheit) eindeutig festgelegt ist, gilt auch die **Umkehrung des Satzes von Pythagoras**:
Gilt $a^2 + b^2 = c^2$ für die Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$, so ist das Dreieck rechtwinklig bei C.

Aufgabe 8.5 Welche der drei Dreiecke mit den folgenden Seitenlängen sind rechtwinklig?

a) $a = 3, b = 4, c = 5$ b) $a = 5, b = 12, c = 13$ c) $a = 17, b = 15, c = 8$ d) $a = 4, b = 5, c = 6$

Aufgabe 8.6
Im rechts abgebildeten Würfel der Seitenlänge a liegen die Punkte X, Y und Z jeweils auf den Kantenmitten. Ist das Dreieck $\triangle XYZ$ rechtwinklig?
Hinweis: Überprüfe dies mit der Umkehrung des Satzes von Pythagoras.



8.1 Höhen- und Kathetensatz

Satz 2 Höhen- und Kathetensatz

In jedem rechtwinkligen Dreieck gelten (vgl. Zeichnung für die Bezeichnungen)

Höhensatz: $\boxed{h^2 = pq}$ **Kathetensatz:** $\boxed{a^2 = pc}$ und $\boxed{b^2 = qc}$

Dabei sind h die Höhe über der Hypotenuse mit Höhenfusspunkt H und $p = [HB]$ und $q = [AH]$ sind die sogenannten **Hypotenusenabschnitte**. Beachte, dass p bei der Seite a liegt und q bei der Seite b.
Eselsbrücke: p bzw. a kommt im Alphabet vor q bzw. b.

Um den **Höhensatz** herzuleiten, drücken Sie c^2 einmal mit a, b und einmal mit p, q aus, setzen die beiden Ausdrücke gleich und isolieren das Produkt pq.

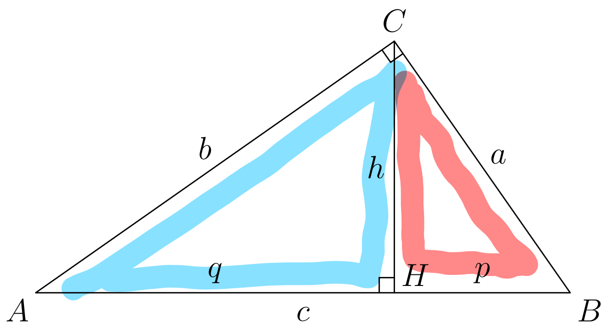
$a^2 + b^2 \overset{\text{Pyth.}}{=} c^2 = (p+q)^2$

$a^2 + b^2 = p^2 + 2pq + q^2$ | Pythagoras

$p^2 + h^2 + q^2 + h^2 = p^2 + 2pq + q^2$ | $-p^2 - q^2$

$2h^2 = 2pq$ | $:2$

$\boxed{h^2 = pq}$



Für den **Kathetensatz**, drücken Sie a^2 durch h und p aus, ersetzen h^2 mit Hilfe des Höhensatzes und klammern p aus:

$a^2 \overset{\text{Pyth}}{=} p^2 + h^2$ | Höhensatz

$a^2 = p^2 + pq$ | p Ausklammern

$a^2 = p(p+q)$

$\boxed{a^2 = pc}$

analog beweist man $b^2 = qc$

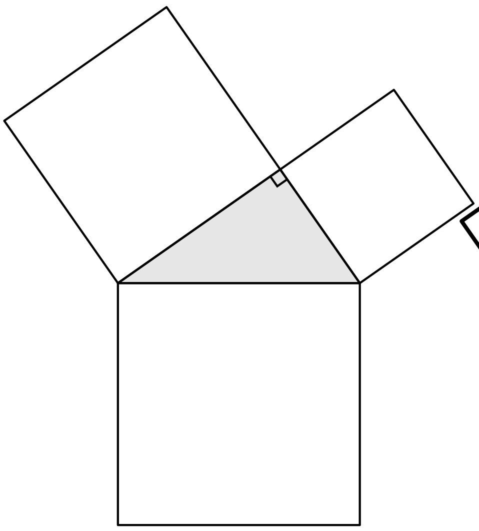
Aufgabe 8.7 Berechne in der folgenden Tabelle die fehlenden Grössen, wobei a, b, c, p, q, h jeweils die üblichen Strecken eines rechtwinkligen Dreiecks sind; F bezeichnet seine Fläche. (Taschenrechner erlaubt)

a	b	c	p	q	h	F
3			$\frac{9}{5} = 1.8$			
13					12	
		25		16		
			1	7		

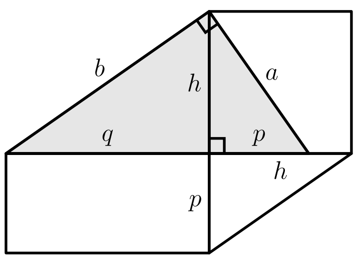
Aufgabe 8.8 In einem rechtwinkligen Dreieck teilt die Höhe h auf die Seite c diese in zwei Hypotenusenabschnitte, p und q, wobei p näher bei a liegt. Von den sechs Strecken a, b, c, h, p und q sind jeweils zwei gegeben. Finden Sie Formeln, um daraus die anderen vier zu berechnen.

a) a, b b) a, p c) p, q d) p, c e) p, b

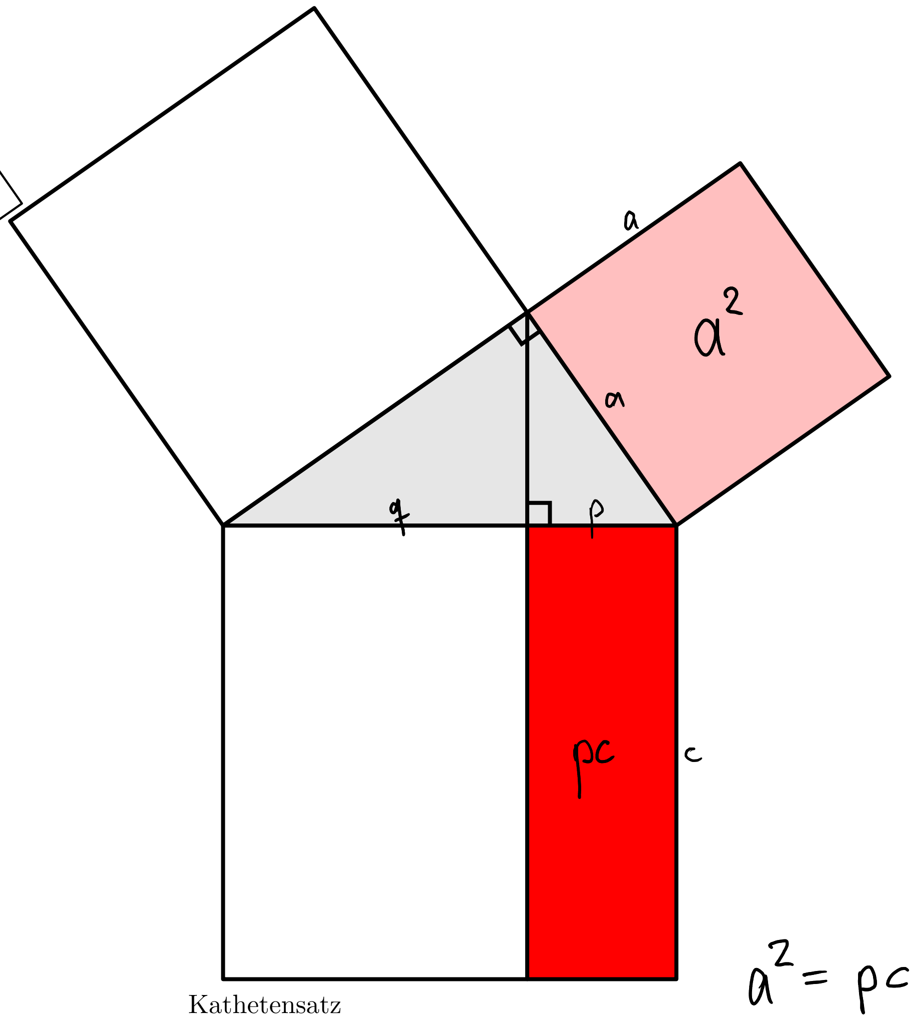
Aufgabe 8.9 Die Sätze aus der Satzfamilie des Pythagoras (Satz von Pythagoras, Höhensatz, Kathetensatz) behaupten diverse Gleichheiten für rechtwinklige Dreiecke, die jeweils eine geometrische Bedeutung haben. Zum Beispiel besagt die Gleichung $a^2 = pc$ aus dem Kathetensatz, dass das hellrote Quadrat in der folgenden Zeichnung genauso gross ist wie das dunkelrote Rechteck. Illustriere die geometrische Bedeutung der drei anderen Gleichungen in ähnlicher Weise farblich.



Satz von Pythagoras



Höhensatz



Kathetensatz

Aufgabe 8.10 Es folgt eine „alphabetische“ Liste von Wortverbindungen. Diese sind in den nachfolgenden Lückentext so einzutragen, dass korrekte Aussagen entstehen:

Wortverbindungen: der Höhe | Hypotenusenabschnitt | der beiden Hypotenusenabschnitte | der Hypotenuse | von Hypotenuse | der Katheten | der zugehörigen Kathete | das Produkt | das Produkt | das Quadrat | das Quadrat | das Quadrat | der Quadrate | rechtwinkligen | die Summe

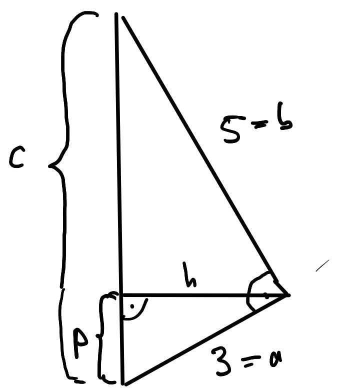
Gemeinsame basale Prüfung

Dienstag 31. Mai 13:40 – 14:40 ∇ 10

erlaubt: Schreibzeug, Lineal, Geodreieck, Zirkel

nicht erlaubt: Taschenrechner, Handy, smart watch

Blätter werden gestellt.



(i) Gesucht: p

$$a^2 = pc \implies p = \frac{a^2}{c}$$

$$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$p = \frac{a^2}{c} = \frac{9}{\sqrt{34}} = \frac{9\cdot\sqrt{34}}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{34}} = \frac{9\cdot\sqrt{34}}{34}$$

$$= \frac{9}{34}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}$$

(ii) Gesucht: h

$a^2 = p^2 + h^2$

Pythagoras $h = \sqrt{a^2-p^2} = \sqrt{9-\frac{81}{34}} = \sqrt{\frac{9\cdot 34-81}{34}} = \sqrt{\frac{225}{34}}$

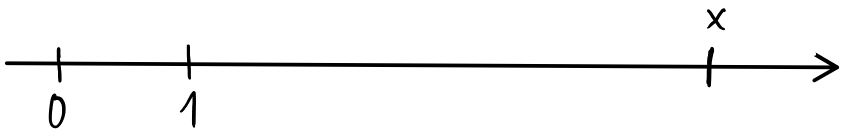
Höhensatz: $h = \sqrt{p\cdot q} = \sqrt{p(c-p)}$

$$= \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{34}}$$

$$= \frac{15\cdot\sqrt{34}}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{34}}$$

$$= \frac{15}{34}\cdot\sqrt{34}$$

8.11a) Gegeben



Geometrisches Wurzelziehen:

Konstruiere $\sqrt{x}$

$h = \sqrt{pq} \overset{?}{=} \sqrt{x}$

↑
Höhensatz

$\Updownarrow$

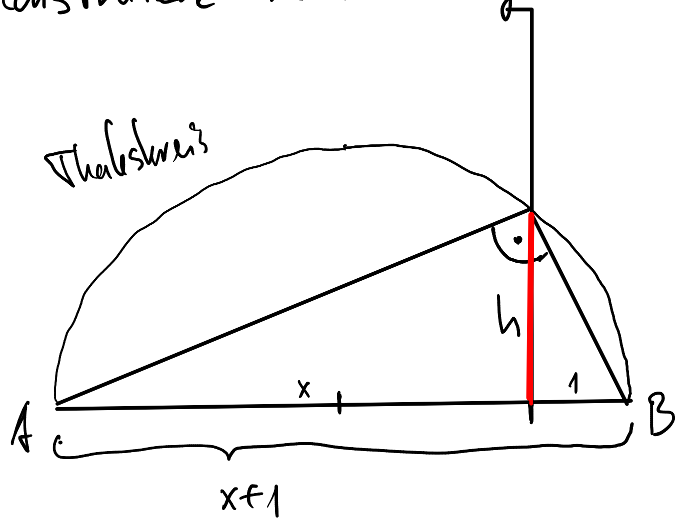
$pq \overset{?}{=} x$

$a = \sqrt{pc} \overset{?}{=} \sqrt{x}$

↑
Kathetensatz

Stimmt, falls $p = 1$ und $q = x$

d.h. Konstruiere rechtwinkliges Dreieck mit diesen Hypotenusenabschnitten.



$\boxed{h} = \sqrt{p\cdot q} = \sqrt{1\cdot x} = \sqrt{x}$