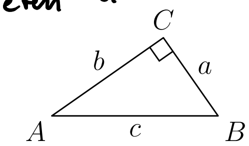
8 Satzgruppe des Pythagoras

Satz 1 Satz von Pythagoras

✎ In jedem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten a und b und Hypotenuse c gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



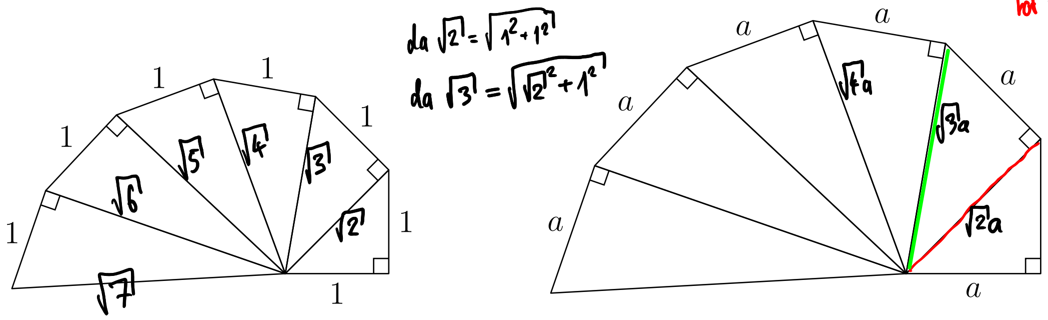
Aufgabe 8.1 Wurzelkonstruktionen:

$c = \sqrt{a^2+b^2}$

(a) Konstruiere auf Kästchenpapier eine Strecke der Länge $\sqrt{13}$ (Längenangaben in Zentimeter).
(b) Konstruiere auf Kästchenpapier eine Strecke der Länge $\sqrt{22}$.
(c) Wurzelschnecke oder -spirale oder Spirale des Theodorus: Bestimme alle nicht angegebenen Längen in den beiden folgenden Zeichnungen!

da $\sqrt{2} = \sqrt{1^2+1^2}$

da $\sqrt{3} = \sqrt{\sqrt{2}^2+1^2}$



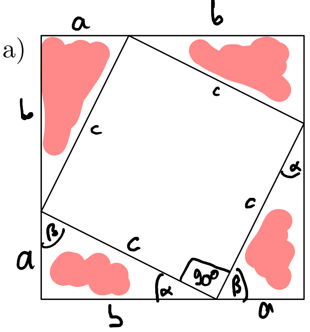
rot $= \sqrt{a^2+a^2}$
$= \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2}$
$= \sqrt{2}a$

grün $= \sqrt{(\sqrt{2}a)^2 + a^2}$
$= \sqrt{2a^2+a^2}$
$= \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a$

Aufgabe 8.2 Ausgehend von einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck, beweisen Sie den Satz von Pythagoras mit Hilfe der folgenden Skizzen. Wer genau ist, überlegt sich auch, warum gewisse Figuren, die wie Quadrate aussehen, wirklich Quadrate sind.

$\alpha+\beta = 90°$

a)



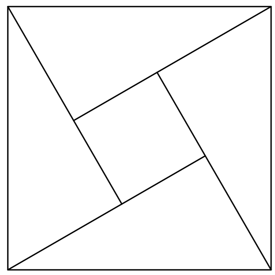
Fläche grosses Quadrat

$(a+b)^2 = c^2 + 4\cdot\frac{1}{2}ab$

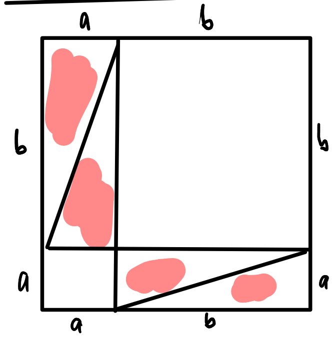
$a^2+2ab+b^2 = c^2+2ab \quad |-2ab$

$\boxed{a^2+b^2=c^2}$

b)



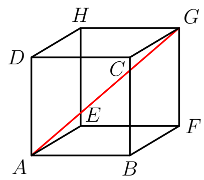
zu Teilaufgabe a)



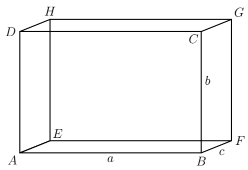
Aufgabe 8.3 Zeigen Sie, dass $\boxed{ab = hc}$ in jedem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten a und b, Hypotenuse c und Höhe h über der Hypotenuse gilt. Hinweis: Fläche.

Aufgabe 8.4 Stell dir vor, dass eine Fliege und eine Spinne in einer Ecke A eines würfelförmigen Raums der Seitenlänge 1 sitzen.

(a) Welche Flugstrecke legt die Fliege zurück, wenn sie direkt zur gegenüberliegenden Ecke G fliegt? Mit anderen Worte: Wie lang ist die (rot eingezeichnete) Raumdiagonale $[AG]$?
(b) Wie lang ist der kürzeste Weg für die Spinne zur gegenüberliegenden Ecke G? Sie kann nur auf den Wänden des Raums laufen.



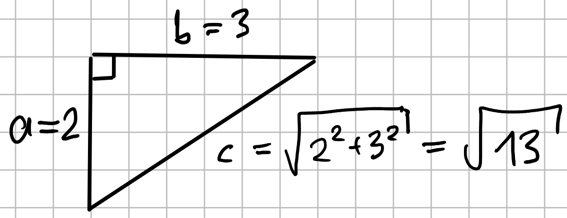
Nun stell dir vor, dass der Raum quaderförmig ist mit Seitenlängen a, b und c.



(c) Wie lang ist die Raumdiagonale $[AG]$ im Quader?
(d) Wie lang ist der kürzeste Weg von A nach G über einen geeigneten Punkt der Kante $[BC]$?
(e) Wie lang ist der kürzeste Weg entlang der Wände von A nach G, wenn $a \geq b \geq c$ gilt? Über welche Kante führt der kürzeste Weg?

8.1 (a) $\sqrt{13} = \sqrt{2^2+3^2}$ $\quad a=2, \quad b=3$

$\overset{\shortparallel}{c}$

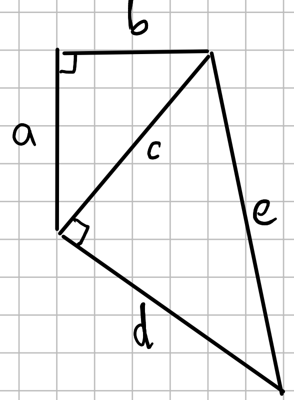


(b) $\sqrt{22}$

Ist 22 die Summe zweier Quadratzahlen?

1, 4, 9, 16, 25 Nein.

Aber $22 = 9+9+4$ Summe von drei Quadraten



$\boxed{a^2+b^2=c^2}$

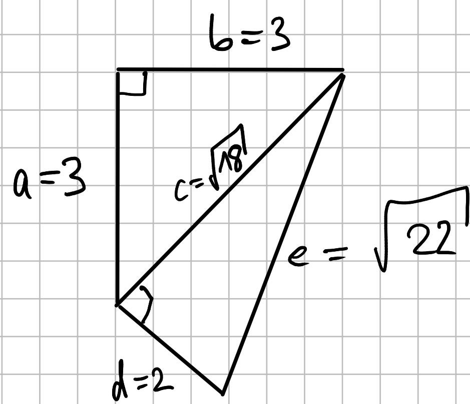
$$e^2 = d^2+c^2 = d^2+a^2+b^2$$

d.h. $e = \sqrt{d^2+a^2+b^2}$

wähle $b=3, \ a=3 \ \rightsquigarrow c=\sqrt{18}$

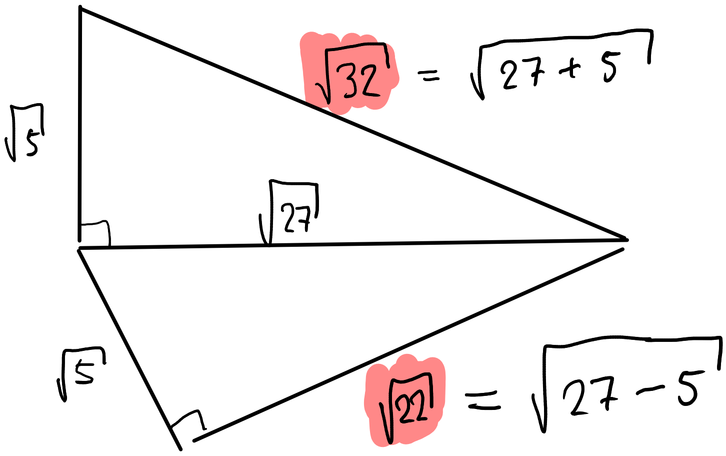
$d=2$

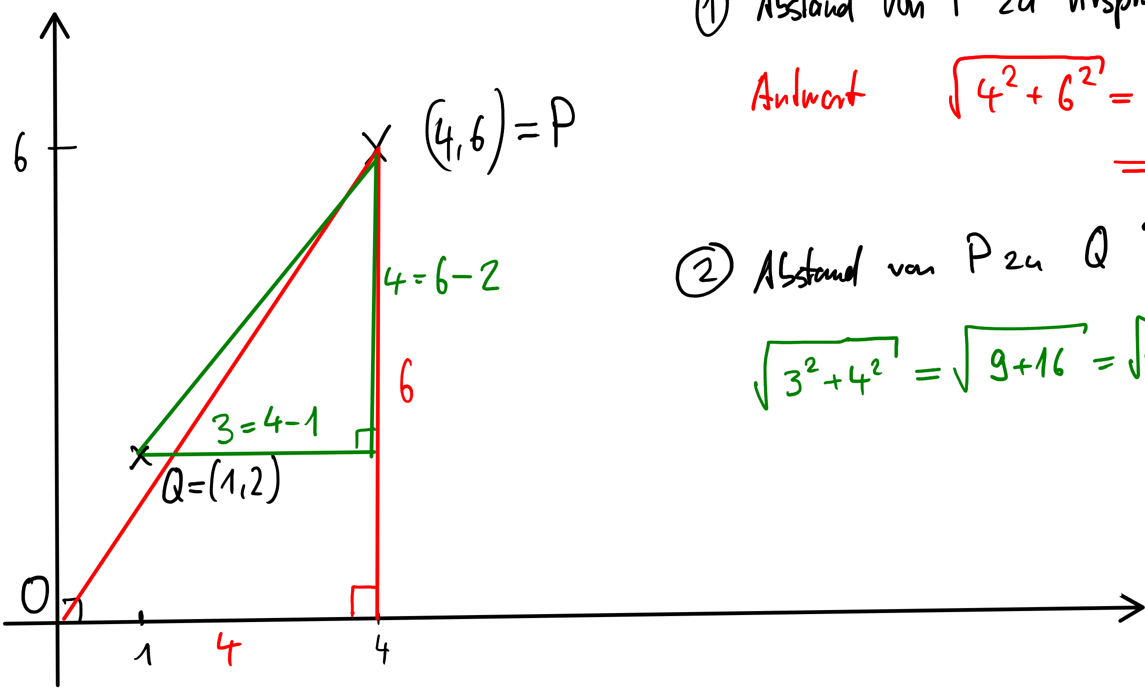
$\rightsquigarrow \ e=\sqrt{4+9+9} = \sqrt{22}$



da $e = \sqrt{2^2+\sqrt{18}^2} = \sqrt{4+18}$

$= \sqrt{22}$





① Abstand von P zu Ursprung O ?

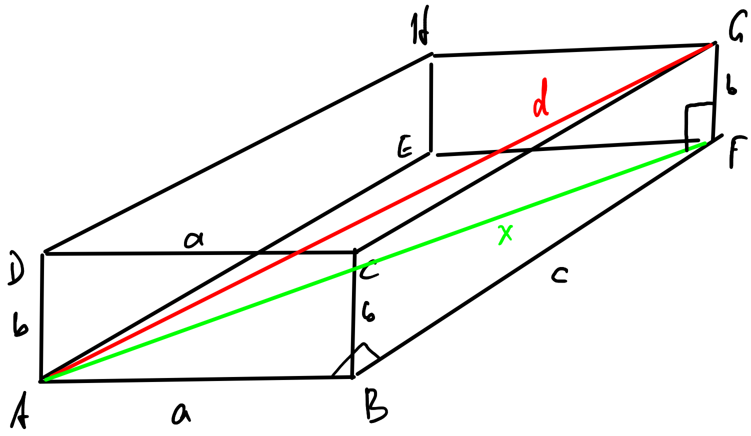
Antwort $\sqrt{4^2+6^2} = \sqrt{52}$

$= 7,\ldots$

② Abstand von P zu Q ?

$\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

8.4 c



ΔABF ist rechtwinklig mit rechtem Winkel bei B.

Pythagoras $\quad x^2 = a^2 + c^2 \quad$, d.h. $\quad x = \sqrt{a^2+c^2}$

ΔAFG ist rechtwinklig mit rechtem Winkel bei F.

Pythagoras: $\quad d^2 = x^2 + b^2 = a^2+c^2+b^2 = a^2+b^2+c^2$

d.h. $\boxed{d = \sqrt{x^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

z.B. Unser Klassenzimmer hat

Breite $\quad 6$ m

Höhe $\quad 5$ m

Länge $\quad 12$ m

Länge der Raumdiagonalen: $\sqrt{5^2+6^2+12^2}$

$= \sqrt{205} = 14{,}32\ldots$

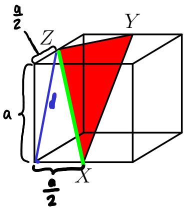
Merke

Da ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$ durch seine drei Seitenlängen a, b, c bis auf Kongruenz (= Deckungsgleichheit) eindeutig festgelegt ist, gilt auch die **Umkehrung des Satzes von Pythagoras**:
Gilt $a^2 + b^2 = c^2$ für die Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$, so ist das Dreieck rechtwinklig bei C.

Aufgabe 8.5 Welche der drei Dreiecke mit den folgenden Seitenlängen sind rechtwinklig?

a) $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ b) $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$ c) $a = 17$, $b = 15$, $c = 8$ d) $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$

Aufgabe 8.6
Im rechts abgebildeten Würfel der Seitenlänge a liegen die Punkte X, Y und Z jeweils auf den Kantenmitten. Ist das Dreieck $\triangle XYZ$ rechtwinklig?
Hinweis: Überprüfe dies mit der Umkehrung des Satzes von Pythagoras.



Länge grüne Seite = $\overline{XZ}$ = $\sqrt{\underbrace{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}_{d^2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{6}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3}{2}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a$

8.1 Höhen- und Kathetensatz

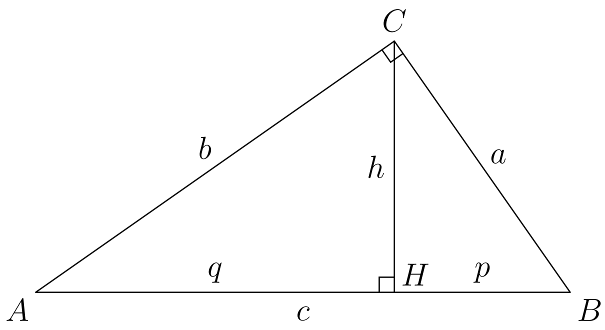
Satz 2 Höhen- und Kathetensatz

In jedem rechtwinkligen Dreieck gelten (vgl. Zeichnung für die Bezeichnungen)

Höhensatz: $\boxed{h^2 = pq}$ **Kathetensatz:** $\boxed{a^2 = pc}$ und $\boxed{b^2 = qc}$

Dabei sind h die Höhe über der Hypotenuse mit Höhenfusspunkt H und $p = [HB]$ und $q = [AH]$ sind die sogenannten **Hypotenusenabschnitte**. Beachte, dass p bei der Seite a liegt und q bei der Seite b.
Eselsbrücke: p bzw. a kommt im Alphabet vor q bzw. b.

Um den **Höhensatz** herzuleiten, drücken Sie c^2 einmal mit a, b und einmal mit p, q aus, setzen die beiden Ausdrücke gleich und isolieren das Produkt pq.



✎

$a^2 + b^2 \overset{\text{Pythagoras}}{=\!=} c^2 = (p+q)^2$

$p^2+h^2+q^2+h^2 = a^2+b^2 == p^2+2pq+q^2 \quad | -p^2-q^2$

$2h^2 = h^2+h^2 == 2pq \quad | :2$

$\boxed{h^2 = pq}$

Für den **Kathetensatz**, drücken Sie a^2 durch h und p aus, ersetzen h^2 mit Hilfe des Höhensatzes und klammern p aus: ✎

$a^2 \overset{\text{Pythagoras}}{=\!=} p^2 + h^2 \quad |$ Höhensatz

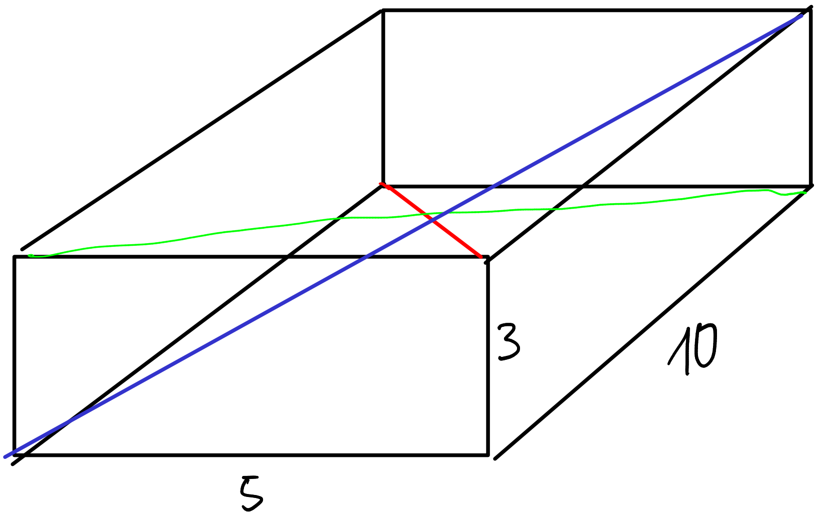
$a^2 == p^2 + pq \quad | p$ Ausklammern

$a^2 = p\underbrace{(p+q)}_{=c}$

$\boxed{a^2 = pc}$

analog beweist man $b^2 = qc$

Aufgabe 8.7 Berechne in der folgenden Tabelle die fehlenden Grössen, wobei a, b, c, p, q, h jeweils die üblichen Strecken eines rechtwinkligen Dreiecks sind; F bezeichnet seine Fläche. (Taschenrechner erlaubt)



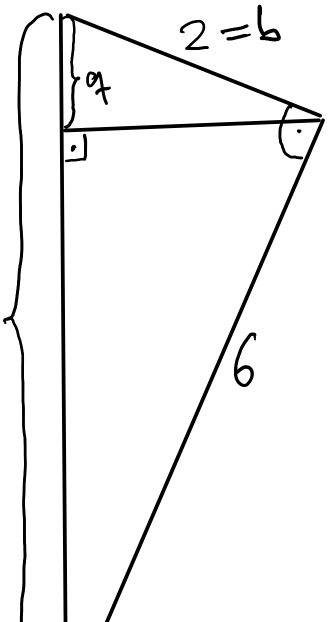
Wie lang ist die Raumdiagonale? $\sqrt{5^2+3^2+10^2}$

$= \sqrt{25+9+100}$

$= \sqrt{134} \approx 11{,}58$

---

19. Mai 2022



$c = \sqrt{2^2+6^2}$

$= \sqrt{40}$

$= 2\cdot\sqrt{10}$

$\approx 6{,}32$

$\sqrt{40} = \sqrt{4\cdot 10} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{10}$

$= 2\cdot\sqrt{10}$

Kathetensatz: $b^2 = qc \quad |:c$

$\frac{b^2}{c} = q$

$q = \frac{b^2}{c} = \frac{\cancel{4}\ 2}{\cancel{2}\cdot\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} \approx 0{,}632$

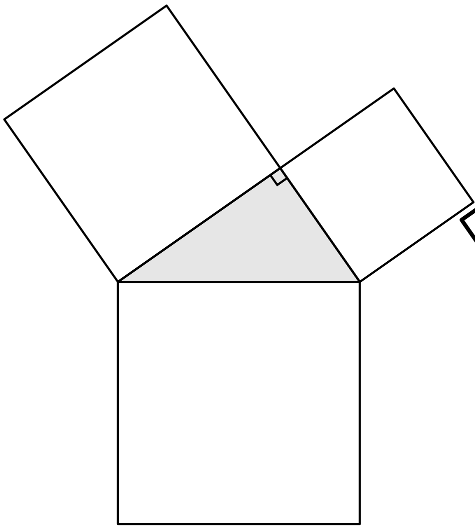
$q = \frac{2\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{1}{5}\cdot\sqrt{10}$

a	b	c	p	q	h	F
3			$\frac{9}{5} = 1.8$			
13					12	
		25		16		
			1	7		

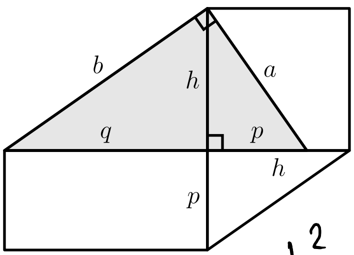
Aufgabe 8.8 In einem rechtwinkligen Dreieck teilt die Höhe h auf die Seite c diese in zwei Hypotenusenabschnitte, p und q, wobei p näher bei a liegt. Von den sechs Strecken a, b, c, h, p und q sind jeweils zwei gegeben. Finden Sie Formeln, um daraus die anderen vier zu berechnen.

a) a, b b) a, p c) p, q d) p, c e) p, b

Aufgabe 8.9 Die Sätze aus der Satzfamilie des Pythagoras (Satz von Pythagoras, Höhensatz, Kathetensatz) behaupten diverse Gleichheiten für rechtwinklige Dreiecke, die jeweils eine geometrische Bedeutung haben. Zum Beispiel besagt die Gleichung $a^2 = pc$ aus dem Kathetensatz, dass das hellrote Quadrat in der folgenden Zeichnung genauso gross ist wie das dunkelrote Rechteck. Illustriere die geometrische Bedeutung der drei anderen Gleichungen in ähnlicher Weise farblich.

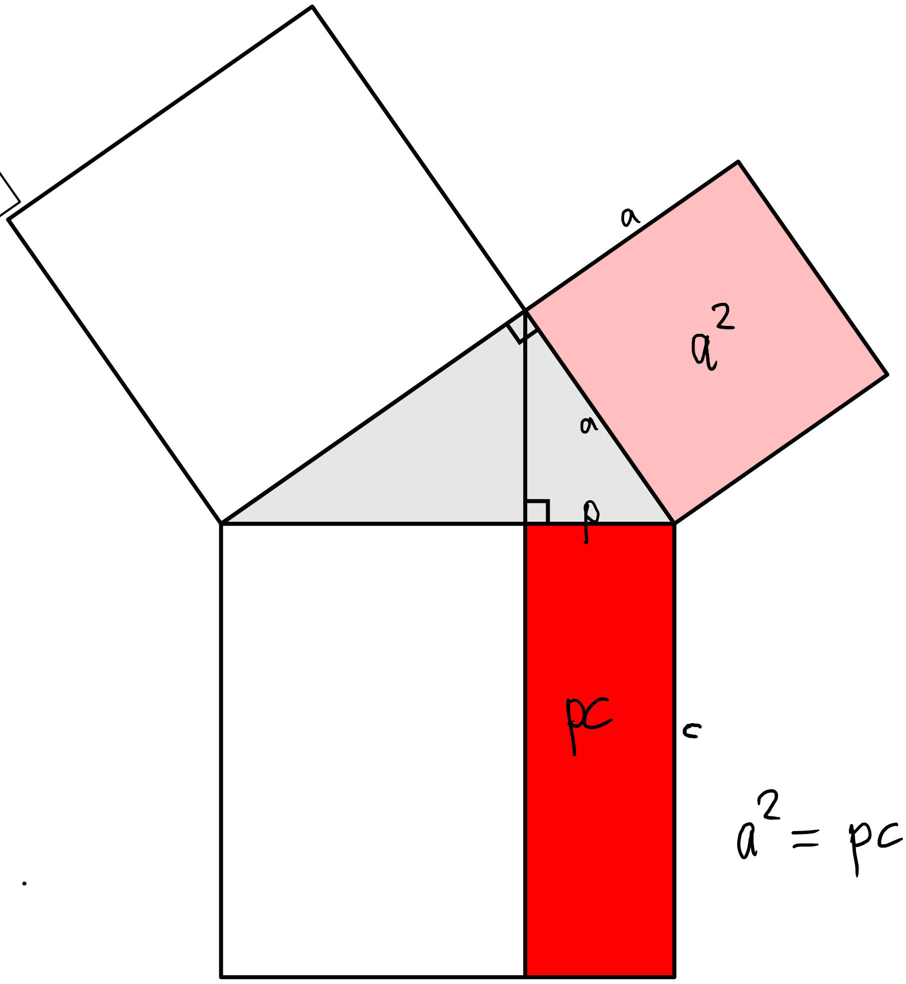


Satz von Pythagoras



$h^2 = pq$

Höhensatz



Kathetensatz

Aufgabe 8.10 Es folgt eine „alphabetische“ Liste von Wortverbindungen. Diese sind in den nachfolgenden Lückentext so einzutragen, dass korrekte Aussagen entstehen:

Wortverbindungen: der Höhe | Hypotenusenabschnitt | der beiden Hypotenusenabschnitte | der Hypotenuse | von Hypotenuse | der Katheten | der zugehörigen Kathete | das Produkt | das Produkt | das Quadrat | das Quadrat | das Quadrat | der Quadrate | rechtwinkligen | die Summe gemeinsame basale Prüfung:

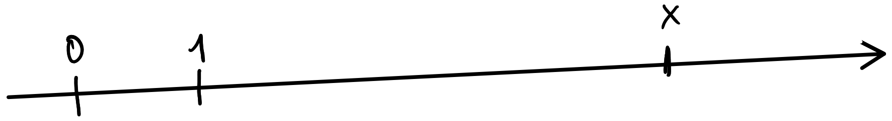
Di, 31. Mai   13:40 – 14:40   D22

erlaubt: Schreibzeug, Lineal, Geodreieck, Zirkel

nicht erlaubt: Taschenrechner, Handy, smart watch

Blätter werden gestellt.

Geometrisches Wurzelziehen



$p = 1$

$q = x - 1$

$pq = 1 \cdot (x-1) = x - 1$

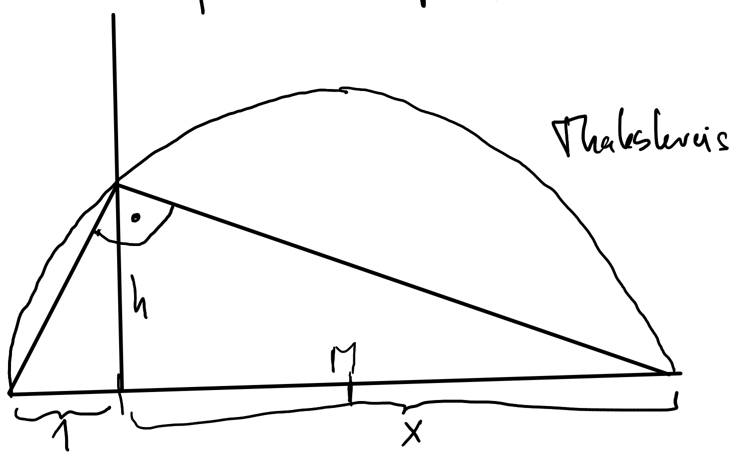
8.11(a) Konstruiere $\sqrt{x}$ mit Zirkel und Lineal.

Hinweis: $h = \sqrt{\underbrace{pq}_{= x}}$ hätte gerne

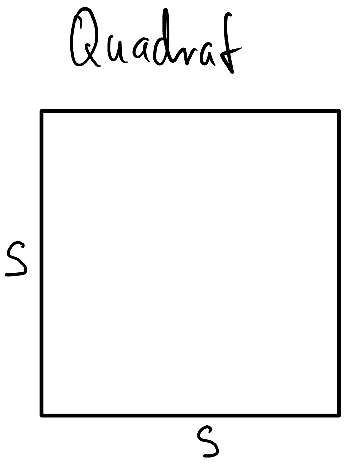
Also: Konstruiere rechtwinkliges Dreieck mit $p \cdot q = x$

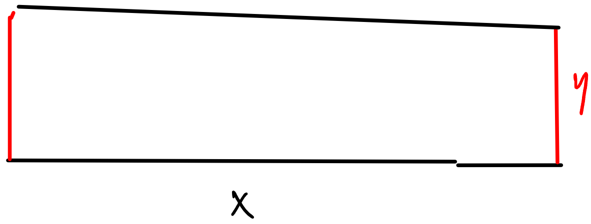
$a = \sqrt{pc}$

Wähle $q = x$ und $p = 1$



$h = \sqrt{pq} = \sqrt{1 \cdot x} = \sqrt{x}$





Gesucht: Streckenlänge y, 

Konstruiere

so dass das Rechteck mit Seitenlängen x und y dieselbe Fläche wie das Quadrat hat, d.h. $x \cdot y = s^2$

Verwende dazu den Kathetensatz: $pc = a^2$

Lückentext: In jedem ______ Dreieck gilt

- laut dem Satz von Pythagoras: ______ ______ ______
  ist so gross wie ______ ______
- laut dem Kathetensatz: ______ ______ und ______
  ist so gross wie ______ ______
- laut dem Höhensatz: ______ ______
  ist so gross wie ______ ______

Aufgabe 8.11 Löse die folgenden Aufgaben mit dem Höhensatz!

(a) Geometrisches Wurzelziehen: Gegeben sind zwei Strecken der Länge a und 1. Konstruieren Sie eine Strecke der Länge $\sqrt{a}$.

(b) Rechteck in flächengleiches Quadrat verwandeln: Gegeben ist ein Rechteck mit Seitenlängen x und y. Konstruieren Sie ein Quadrat desselben Flächeninhalts.

(c) Rechteck in flächengleiches Quadrat verwandeln: Gegeben ist ein Quadrat mit Seitenlänge s und eine Strecke x. Konstruieren Sie ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite x ist.

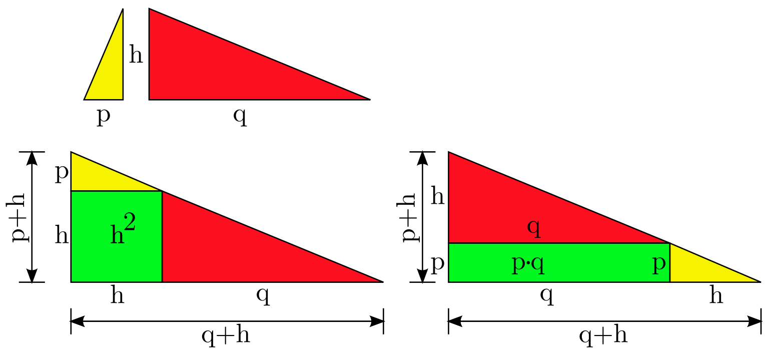
(d) Anwendung der vorigen beiden Teilaufgabe: Gegeben sind zwei Strecken der Längen x und y und eine Strecke der Länge 1 als “Masseinheit”. Konstruieren Sie eine Strecke der Länge xy.

Aufgabe 8.12 Löse die folgenden Aufgaben mit dem Kathetensatz!

(a) Rechteck in flächengleiches Quadrat verwandeln: Gegeben ist ein Rechteck mit Seitenlängen x und y. Konstruieren Sie ein Quadrat desselben Flächeninhalts.

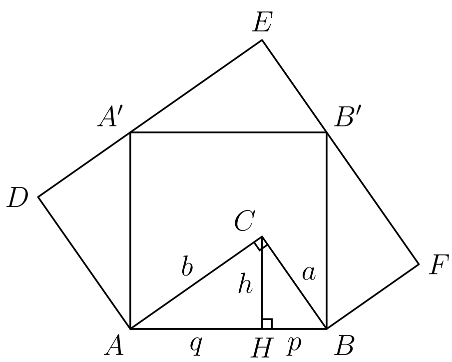
(b) Rechteck in flächengleiches Quadrat verwandeln: Gegeben ist ein Quadrat mit Seitenlänge s und eine Strecke x. Konstruieren Sie ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite x ist.

Aufgabe 8.13 Erkläre, warum die folgenden Zeichnungen den Höhensatz beweisen. (Die Benennung von p und q ist umgekehrt als bei uns.) Bildquelle: Wikipedia: Höhensatz, Beweis, Über Zerlegungen



Aufgabe 8.14 Führe meinen geometrischen Lieblingsbeweis des Kathetensatzes:

Starte mit einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit rechtem Winkel bei C. Wie in der Zeichnung unten bereits geschehen, errichte über der Hypotenuse ein Quadrat und nenne die beiden neuen Eckpunkte A' und B'; setze drei Kopien des Ausgangsdreiecks auf die drei neuen Quadratseiten. (Offensichtlich hat der Streckenzug $DA'E$ keinen Knick bei A', weil sich die drei Winkel zu 180° ergänzen; analog hat $FB'E$ keinen Knick bei B'.)



(i) Verbinde C und E. Dies ist offensichtlich eine geradlinige Verlängerung der Höhe h. Gib ihrem Schnittpunkt mit $[A'B']$ den Namen S.

(ii) Ergänze DAC zu einem Quadrat $DACX$. Dies geht, da das Dreieck DAC rechtwinklig bei A ist und gleich lange Hypotenusen hat. Offensichtlich liegt der Punkt X auf $[DE]$.

(iii) Zeige, dass das Quadrat $DACX$ dieselbe Fläche hat wie das Rechteck $AHSA'$, indem du beide mit einem flächengleichen Parallelogramm vergleichst.

flächengleichen Parallelogramm vergleichst.
Hinweis: Scherungen erhalten den Flächeninhalt.

(iv) Warum beweist dies $b^2 = qc$?

(v) Beweise $a^2 = pc$ analog.

(vi) Warum liefert das auch einen Beweis des Satzes von Pythagoras?

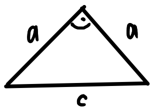
Dieser Beweis führt schnell zu einem tangram-artigen Puzzle, siehe Aufgabe 8.21.

8.2 Spezielle rechtwinklige Dreiecke

Aufgabe 8.15 Ein rechtwinkliges, *gleichschenkliges* Dreieck hat die Hypotenuse c und die Katheten $a = b$.

(a) Berechnen Sie c, wenn a gegeben ist.

(b) Berechnen Sie a, wenn c gegeben ist.



$c^2 = 2a^2$

(a) löse nach c auf: $c = \sqrt{2}\,a$

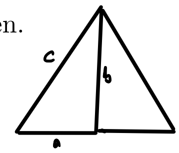
(b) löse nach a auf: $\frac{c^2}{2} = a^2$

$\frac{c}{\sqrt{2}} = a$

Aufgabe 8.16

(a) In einem Dreieck mit den Innenwinkeln 30°, 60°, 90° sei c die Hypotenuse, a die kürzere und b die längere Kathete.
Wenn jeweils eine der drei Längen gegeben ist, berechnen Sie daraus die anderen beiden.

(b) Anwendung: Welche Fläche hat ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a?



8.3 Reguläres Tetraeder

Aufgabe 8.17 Das **Tetraeder** ist einer der fünf platonischen Körper (altgriechisch $\tau\epsilon\tau\rho\alpha$-tetra-vier). Er besteht aus vier gleichseitigen Dreiecken einer beliebig gewählten Seitenlänge s. Bestimme die folgenden Werte (nur die letzten beiden hängen von s ab):

a) Anzahl der Flächen: b) Anzahl der Kanten: c) Anzahl der Ecken:

d) Seitenhöhe: e) Körperhöhe:

8.4 Weitere Aufgaben

Aufgabe 8.18 Folgende Aufgaben sind grösstenteils aus der Aufgabensammlung von Angelika Rupflin der Kantonsschule am Burggraben St. Gallen

(a) Gegeben sind zwei Quadrate mit den Seitenlängen 3 cm und 5 cm. Konstruieren Sie ein Quadrat dessen Flächeninhalt a) mit der Summe b) mit der Differenz der Inhalte der beiden Quadrate übereinstimmt.

(b) Zeichnen Sie ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 3$ cm und konstruieren Sie dann ein Quadrat, das a) den halben, b) den doppelten, c) den dreifachen Inhalt wie das ursprüngliche hat.

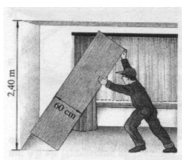
(c) Konstruieren Sie (ausgehend von ganzzahligen Streckenlängen) auf mindestens 2 verschiedene Weisen ein Quadrat mit dem Flächeninhalt
a) 5 cm^2 b) 27 cm^2

(d) Welchen Radius muss ein rundes Backblech mindestens haben, um eine rechteckige Tiefkühlpizza mit den Abmessungen 22 cm × 17 cm in den Ofen zu schieben.

(e) Berechnen Sie die theoretische Blickweite von einem 100 m hohen Leuchtturm aufs Meer. (Erdradius $6.37 \cdot 10^6$ m)

(f) Wie weit unter Wasser liegt die gerade Verbindungslinie von Romanshorn nach Friedrichshafen? Machen Sie eine Skizze. Erdradius: 6370 km.

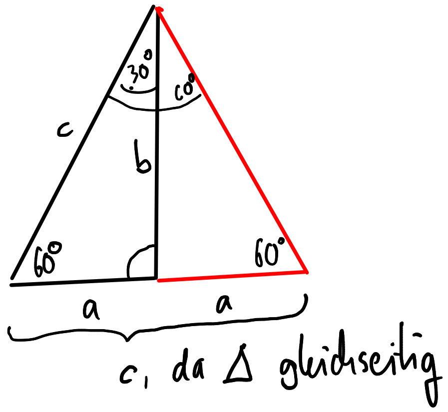
(g) Wie hoch darf ein 60 cm tiefer (und sehr breiter) Schrank höchstens sein, damit man ihn aus der liegenden Position in einem 2.4 m hohen Raum durch Kippen aufstellen kann?
Hinweis: Bitte nicht von der Wand im Bild irritieren lassen sondern den Schrank in der Raummitte aufrichten.



(h) Berechnen Sie die Länge aller Seitenhalbierenden in einem rechtwinkligen Dreieck aus den Kathetenlängen a und b. a) $a = 6$ und $b = 10$ b) allgemein mit Parameter a und b

(i) Von einem allgemeinen Dreieck ABC kennt man die Seite $c = 56$ cm, die Höhe $h_c = 15$ cm und die Seitenhalbierende $s_c = 17$ cm. Berechnen Sie die Länge der Seiten a und b.

8.16



$$\boxed{\begin{aligned} a^2+b^2 &= c^2 \quad (1) \\ c &= 2a \quad (2) \end{aligned}}$$

Gegeben a: Setze (2) in (1) ein: (3) $a^2 + b^2 = c^2 = (2a)^2 = 4a^2 \quad | -a^2$

$$b^2 = 3a^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$b = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}\sqrt{a^2} = \sqrt{3}\,a$$

Lösung: $b = \sqrt{3}\,a$

$c \overset{(2)}{=} 2a$

$\sqrt{2} = \cancel{\sqrt{1^2+1^2} = 1+1}$ Nils $\;\| \; 2$

Gegeben b: $a^2 + b^2 \overset{(3)}{=} 4a^2 \quad | -a^2$

$\cancel{\sqrt{a^2+b^2} = 2a}$, $\cancel{\| \; a+b}$

$$b^2 = 3a^2 \quad | :3$$

$$\frac{b^2}{3} = a^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$\frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{b^2}{3}} = a$$

$$c = 2a = \frac{2}{\sqrt{3}}\,b = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\,b$$

$\cancel{a^2+b^2 = c^2}$

$\cancel{\sqrt{a^2+b^2} = c}$, $\cancel{\| \; a+b}$

Gegeben c: $a = \frac{1}{2}c \quad (4)$

$a^2 + b^2 = c^2 \quad |$ ersetze a durch $\frac{1}{2}c$ nach (4)

$$\left(\frac{1}{2}c\right)^2 + b^2 = c^2$$

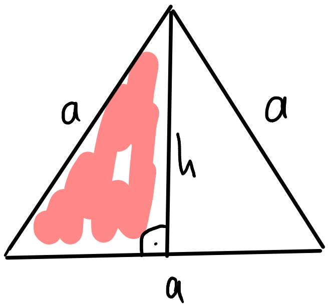
$$\frac{c^2}{4} + b^2 = c^2$$

$$b^2 = \frac{3}{4}c^2$$

$$b = \sqrt{\frac{3}{4}c^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{c^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}\, c = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}\, c$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\, c$$

(b)



$$\text{Fläche} = \frac{1}{2}\,\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}$$

$$= \frac{1}{2}\, a \cdot h$$

$$= \frac{1}{2}\, a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\, a$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$$

Nebenrechnung:

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\, a$$

2. Juni: Tetraeder-Aufgabe an Tafel erklärt.
(inklusive Schwerpunkt teilt 1:2, aber nur im gleichseitigen Dreieck per Flächen)