Gutes Beispiel für Gerade durch zwei Punkte: Umrechnung von Fahrenheit nach Celsius. An Tafel erklärt, Thermometer mit zwei Skalen (Wikipedia).

10 Geraden und lineare Funktionen (genauer: affin-lineare Funktionen)

10.1 Steigung einer Geraden

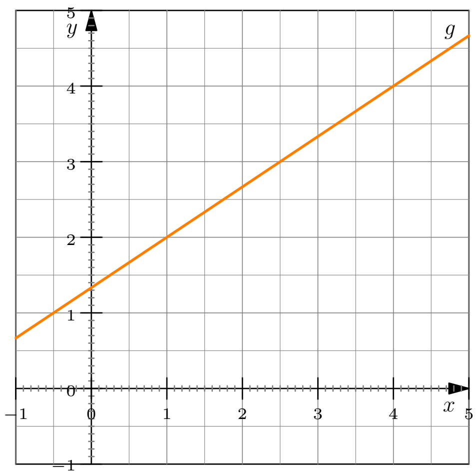
10.1.1. Die Steigung einer Geraden ist ein Mass für die Steilheit der Geraden.

Definition 10.1.2 Steigung und y-Achsenabschnitt

Die **Steigung** m einer nicht zur y-Achse parallelen Geraden g im Koordinatensystem wird wie folgt berechnet:

- Wähle zwei voneinander verschiedene Punkte $A = (x_A, y_A)$ und $B = (x_B, y_B)$ auf der Geraden g.
- Dann ist die Steigung von g wie folgt definiert:

$$\text{Steigung} = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$



Hierbei steht Δx für «Differenz der x-Werte», Δy steht für «Differenz der y-Werte». Der griechische Grossbuchstabe Delta Δ entspricht unserem D und steht für *Differenz*.

Beachte: Die Steigung m hängt *nicht* von der Wahl der beiden Punkte A und B ab, denn alle «Steigungsdreiecke» sind zueinander ähnlich.
Beachte: Die Steigung kann positiv, negativ oder Null sein.

- Steigt die Gerade an in positiver x-Richtung, also von links nach rechts, so ist ihre Steigung positiv. (Je steiler die Gerade, desto grösser die Steigung.)
- Fällt die Gerade, so ist ihre Steigung negativ.
- Verläuft die Gerade waagerecht (= parallel zur x-Achse), so ist ihre Steigung Null.

Der **y-Achsenabschnitt** q einer Geraden g ist die y-Koordinate des Schnittpunkts von g mit der y-Achse.

Merke 10.1.3

Die Steigung einer Geraden gibt an, um wieviel sich die y-Koordinate eines auf der Geraden wandernden Punktes erhöht, wenn sich seine x-Koordinate um 1 erhöht.

Aufgabe A1 Zeichnen Sie in ein einziges Koordinatensystem elf Ursprungsgeraden (= Geraden durch den Ursprung) mit den Steigungen $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1, ± 2, ± 4 und 0. Beschriften Sie die Geraden mit deren Steigungen.

10.1.4. Die Steilheit einer Geraden kann man auch durch ihren wie folgt definierten Steigungswinkel angeben.

Definition 10.1.5

Der **Steigungswinkel** einer Geraden in einem Koordinatensystem ist der Winkel zwischen der x-Achse und der Geraden (in mathematisch positivem Drehsinn). Er wird normalerweise als Winkel im Intervall $(-90°, 90°]$ angegeben.

Aufgabe A2 Bestimmen Sie jeweils **präzise** (mit Pythagoras) die Steigung der Geraden mit dem angegebenen Steigungswinkel. (Nicht erwünscht ist das im Allgemeinen unpräzise Ablesen von Δx und Δy in einem Steigungsdreieck.)

a) $0°$ b) $30°$ c) $45°$ d) $60°$ e) $90°$

 Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Merke 10.1.6

Die Steigung einer Strasse wird meist in Prozent angegeben. Beispiele:

- Die Steigungsangabe 20% auf einem Strassenschild bedeutet, dass die Strasse eine Steigung von $20\% = 20 \cdot \frac{1}{100} = \frac{20}{100} = 0.2$ hat. Bei einer Horizontalbewegung um 1 km bewegt man sich 0.2 km=200 m nach oben; der Steigungswinkel beträgt dann etwa 12.6°.
- Eine (hypothetische) Strasse mit Steigungswinkel 45° hat die Steigung $1 = 100\frac{1}{100} = 100\%$.
- Eine (hypothetische) Strasse mit Steigung 200% hat ungefähr den Steigungswinkel 70.5°.

10.2 Lineare Funktionen und Geraden

Definition 10.2.1 Lineare Funktion

Eine Funktion f heisst **linear**, wenn sie wie folgt geschrieben werden kann.

$$f(x) = mx + q$$

Dabei sind m und q geeignet gewählte reelle Zahlen.

An der Universität nennt man solche Funktionen **affin-linear**. Unter einer **linearen** Funktion versteht man eine Funktion der Form $f(x) = mx$.

Beispiel 10.2.2. Die übliche Notenfunktion $n(p) = 1 + \frac{p}{a} \cdot 5 = \frac{5}{a}p + 1$ ist linear in der Variablen p (zumindest für $0 \le p \le a$, wenn a die für Note 6 nötige Punktzahl ist).

Beispiel 10.2.3. In ein (kleines) Schwimmbecken fliessen gleichmässig pro Minute 200 L Wasser. Gib die Funktion $v(t)$ an, die das Volumen des Wassers (in Liter) zur Zeit t (in Minuten) beschreibt, wenn

- das Becken zur Zeit $t = 0$ leer ist. ✎$v(t) = 200t$, lineare Funktion in t
- das Becken zur Zeit $t = 0$ bereits 2500 L Wasser enthält. ✎$v(t) = 200t + 2500$, lineare Funktion in t

Aufgabe A3 Zeichnen Sie die Graphen der folgenden (linearen) Funktionen in dasselbe Koordinatensystem ein. Falls der Graph eine Gerade ist: Bestimmen Sie Steigung m und y-Achsenabschnitt q der Geraden.

a) $a(x) = 3x$ b) $b(x) = \frac{1}{3}x$ c) $c(x) = -x$ d) $d(x) = -\frac{1}{2}x$

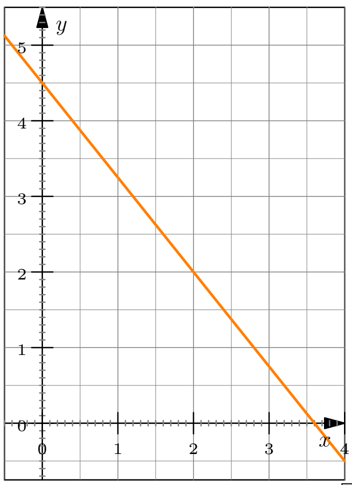
e) $e(x) = x - 1$ f) $f(x) = -x + 1$ g) $g(x) = 2x - 2$ h) $h(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

Satz 10.2.4 nicht vertikale Geraden = Graphen von linearen Funktionen

Die Gerade mit Steigung m und y-Achsenabschnitt q ist der Graph der linearen Funktion

$$\ell(x) = mx + q$$

Beweis. Der Punkt $A = (0, q)$ liegt sicherlich auf der Geraden mit Steigung m und y-Achsenabschnitt q. Sei $B = (x_B, y_B)$ ein weiterer Punkt auf dieser Geraden mit $x_B \neq 0$. Dann folgt ✎



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_B - q}{x_B - 0} = \frac{y_B - q}{x_B} \quad | \cdot x_B$$

$$m x_B = y_B - q \quad | + q, \text{ Seiten vertauschen}$$

$$y_B = m x_B + q = \ell(x_B)$$

Also liegt B auf dem Graphen von $\ell(x) = mx + q$.

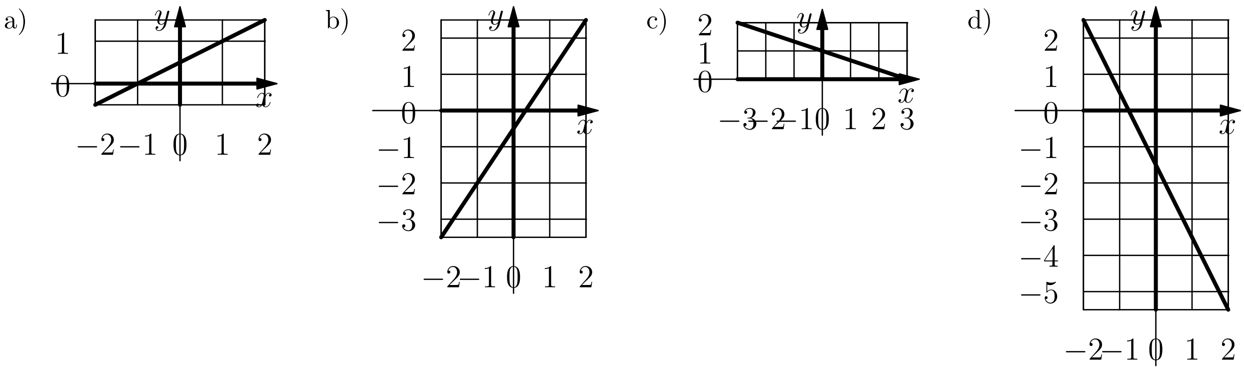
Umgekehrt sieht man leicht, dass jeder Punkt des Graphen von ℓ auf unserer Geraden liegt. □

Merke 10.2.5 Graphen linearer Funktionen zeichnen

Der Graph einer linearen Funktion $f(x) = mx + q$ ist eine Gerade.
Zum Zeichnen des Graphen genügt es deshalb, zwei Punkte des Graphen zu berechnen und die Gerade durch diese beiden Punkte einzuzeichnen.

Beispielsweise liegen die Punkte $(0, \ell(0)) = (0, q)$ und $(10, \ell(10)) = (10, 10m + q)$ stets auf dem Graphen.

Aufgabe A4 Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Geraden die zugehörige lineare Funktion, indem Sie Steigung und y-Achsenabschnitt möglichst genau ablesen.



10.3 Proportionalität

Definition 10.3.1

Man sagt, dass zwei veränderliche Grössen x und y **proportional** zueinander sind, wenn sie stets im selben Verhältnis zueinander stehen, d. h. wenn gilt

$$\frac{y}{x} = \text{konstante reelle Zahl} = \text{Proportionalitätsfaktor}$$

Dies bedeutet: Verdoppelt (verdreifacht, vervierfacht, ...) man die eine Grösse, so verdoppelt (verdreifacht, vervierfachts...) sich die andere Grösse. Verbreitete Schreibweise: $x \sim y$.
Der konstante Quotient $\frac{y}{x}$ wird **Proportionalitätsfaktor** oder **Proportionalitätskonstante** genannt.

Statt $\frac{y}{x}$ könnte man genausogut $\frac{x}{y}$ verwenden. Aus dem Kontext ist meist klar, was gemeint ist.

Merke 10.3.2

Notiert man den Proportionalitätsfaktor als m, d. h. $\frac{y}{x} = m$, so gilt

$$y = mx$$

Dies bedeutet: Proportionale Zusammenhänge werden durch Ursprungsgeraden (= Geraden durch den Ursprung $(0, 0)$ des Koordinatensystems beschrieben. Die Steigung der Ursprungsgeraden ist der Proportionalitätsfaktor.

Beispiele 10.3.3.

- Der Umfang $U = U(r)$ eines Kreises ist proportional zu seinem Radius r, es gilt

$$U = U(r) = 2\pi r \qquad \text{d. h. der Proportionalitätsfaktor ist } \frac{U(r)}{r} = 2\pi$$

- Die Fläche $A = A(r)$ eines Kreises ist nicht proportional zu seinem Radius r, denn $A(r) = \pi r^2$. Somit ist $\frac{A(r)}{r} = \pi r$ nicht konstant.
- Die Masse m eines Stoffes ist proportional zum Volumen V, denn eine Verdopplung (Verdreifachung, ...) des Volumens führt zu einer Verdopplung (Verdreifachung, ...) der Masse.

Der zugehörige Proportionalitätsfaktor wird als **(Massen-)Dichte des Stoffes** bezeichnet und meist mit dem griechischen Kleinbuchstaben ρ («Rho») geschrieben, d. h.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Beispielsweise hat Eisen (lateinisch *ferrum*, deswegen Elementsymbol Fe) die Dichte

$$\rho_{\text{Eisen}} = \rho_{\text{Fe}} = 7874 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Konkret wiegt ein Liter (= Kubikdezimeter) Eisen

$$m = \rho_{\text{Fe}} \cdot V = 7874 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1\,\text{dm}^3 = 7874 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10^{-3}\text{m}^3 = 7.874\,\text{kg}$$

- Der Preis eines Produkts ist oft proportional zu der Menge (falls es keine Rabatte etc. gibt). Beispiele: Goldpreis, Weizenpreis, Milchpreis etc.
- Fährt ein Velofahrer mit konstanter Geschwindigkeit v, so ist die zurückgelegte Strecke $s = s(t)$ proportional zur Zeit t, der Proportionalitätsfaktor ist die Geschwindigkeit.

$$v = \frac{s}{t} \qquad \text{bzw.} \qquad s = s(t) = vt$$

10.4 Standardaufgaben

10.4.1. Eine Gerade kann auf die folgenden beiden Weisen eindeutig festgelegt werden:

(1) durch zwei Punkte auf der Geraden

(2) durch einen Punkt auf der Geraden und die Steigung

In den beiden folgenden Aufgaben lernen Sie, die zugehörigen Gleichungen aufzustellen.

Aufgabe A5 **Gleichung einer Geraden durch einen gegebenen Punkt bei gegebener Steigung**

(a) Mit konkreten Zahlen: Bestimme die Gleichung der Geraden g mit Steigung $m = -\frac{2}{3}$, die durch den Punkt $A = (-1, -3)$ geht.
Wenn du die Gleichung bestimmt hast:
  - Teste, ob der Punkt A auf dem Graphen deiner Gleichung liegt.
  - Liegt der Punkt $(4, 4)$ auf der Geraden?
  - Für welches y liegt der Punkt $(3, y)$ auf der Geraden?

(b) Abstrakt mit Parametern: Was ist in der Merkebox 10.4.2 einzutragen?
Teste deine Vermutung: Was erhältst du, wenn du für $A = (x_A, y_A)$ und m die Werte aus Teilaufgabe (a) einsetzt?

Merke 10.4.2 Gleichung einer durch Punkt und Steigung gegebenen Geraden

Die Gerade durch den Punkt $A = (x_A, y_A)$ mit Steigung m hat die Gleichung

$$\ell(x) = ✎ m(x - x_A) + y_A \quad \text{nicht aufschreiben:} \quad = mx - mx_A + y_A$$

Beweis. Die angegebene Gleichung ist linear und beschreibt somit eine Gerade. Ihre Steigung ist der Koeffizient bei x, also m (wie gewünscht). Zu zeigen bleibt also, dass A auf dem Graphen von ℓ liegt. Dies ist aber der Fall, denn

$$✎ \ell(x_A) = m(x_A - x_A) + y_A = 0 + y_A = y_A$$

□

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Aufgabe A6 **Gleichung einer durch zwei Punkte festgelegten Geraden**

(a) Mit konkreten Zahlen: Bestimme die Gleichung der Geraden g, die durch die beiden Punkte $A = (-1, 2)$ und $B = (5, -1)$ geht.
Hinweis: Die Steigung der Geraden kann sofort angegeben werden.
Wenn du die Gleichung bestimmt hast:
- Teste, ob die beiden Punkte A und B auf dem Graphen deiner Gleichung liegen.

(b) Abstrakt mit Parametern: Was ist in der Merkebox 10.4.3 einzutragen?
Teste deine Vermutung: Was erhältst du, wenn du für $A = (x_A, y_A)$ und $B = (x_B, y_B)$ die Werte aus Teilaufgabe (a) einsetzt?

Merke 10.4.3 Gleichung einer Geraden durch zwei gegebene Punkte

Die Gerade durch die beiden Punkte $A = (x_A, y_A)$ und $B = (x_B, y_B)$ mit $x_A \neq x_B$ hat die Gleichung

$$\ell(x) = \underbrace{\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}_{\text{Steigung}} \cdot (x - x_A) + y_A$$

Wenn man die Rollen von A und B vertauscht, erhält man die Gleichung $\ell(x) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \cdot (x - x_B) + y_B$. Ihre rechte Seite stimmt mit der oben angegebenen rechten Seite überein. Warum?

Beweis. Wegen

$$\ell(x) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x - x_A) + y_A = \underbrace{\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}_{\text{reelle Zahl, Steigung } m} \cdot x + \underbrace{\left(-\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x_A + y_A\right)}_{\text{reelle Zahl, } y\text{-Achsenabschnitt } q}$$

ist ℓ eine lineare Funktion und hat als Graphen eine Gerade.

$$\ell(x_A) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x_A - x_A) + y_A = 0 + y_A = y_A \implies A \text{ liegt auf Graph}(\ell)$$

$$\ell(x_B) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x_B - x_A) + y_A = y_B - y_A + y_A = y_B \implies B \text{ liegt auf Graph}(\ell)$$

Alternativ-Argument: Da die Steigung «offensichtlich» korrekt ist, genügt es zu zeigen, dass A (oder B) auf dem Graphen von ℓ liegt. □

Aufgabe A7 Gegeben sind zwei lineare Funktionen $f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$ und $g(x) = \frac{3}{2}x + 1$.

a) Zeichnen Sie die beiden Graphen von f und g in ein gemeinsames Koordinatensystem mit **Einheitslänge 6 Häuschen**.

b) Lesen Sie die ungefähren Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden ab.

c) Berechnen Sie den Schnittpunkt exakt (Angabe durch die beiden Koordinaten).
Hinweis: Der Schnittpunkt hat sowohl die Form $(x, f(x))$ als auch die Form $(x, g(x))$. Warum ist dies so und warum hilft dies?

Merke 10.4.4 Schnittpunkte zweier Graphen/Geraden berechnen

Die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen zweier Funktionen f und g erhält man, indem man die Gleichung

$$f(x) = g(x)$$

nach x auflöst.
Sind f und g lineare Funktionen (und die zugehörigen Graphen somit Geraden), so ist die Gleichung selbst linear und kann einfach gelöst werden.

Aufgabe A8 **Steigungen senkrechter Geraden**

Eine Gerade heisst **Ursprungsgerade**, wenn sie durch den Ursprung des Kooridatensystems, also den Punkt $(0, 0)$ geht.

(a) Konkret mit Zahlen: Betrachte die Ursprungsgerade g mit Steigung $m_g = \frac{3}{5}$. Sei h die zu g senkrechte Ursprungsgerade. Was ist die Steigung m_h dieser Geraden h?
Hinweis: Erstelle eine Skizze (mit einem Steigungsdreieck).

(b) Wenn eine beliebige Gerade die Steigung $\frac{3}{5}$ hat, welche Steigung hat eine dazu senkrechte Gerade?

(c) Abstrakt mit Parametern: Was ist in der Merkebox 10.4.5 einzutragen?

Merke 10.4.5 Orthogonalität (= «Senkrechtheit»/«Rechtwinkligkeit») und Steigungen von Geraden

Zwei Geraden (keine davon vertikal) stehen genau dann aufeinander senkrecht (= sind orthogonal zueinander), wenn
✎das Produkt ihrer Steigungen -1 ist.

In Formeln: Für zwei nicht-vertikale Geraden g und h mit Steigungen m_g und m_h gilt ✎

$$g \perp h \qquad \Longleftrightarrow \qquad m_g \cdot m_h = -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad m_g = -\frac{1}{m_h}$$

Alternativ: Hat eine Gerade die Steigung m, so hat jede dazu senkrechte Gerade die Steigung ✎

$$m_\perp = -\frac{1}{m}$$

10.5 Anwendungen

Aufgabe A9 Die Entfernung (auf der Bahnstrecke) von Wattwil nach Kaltbrunn beträgt 8 km.

Der Schnellzug von Wattwil nach Kaltbrunn fährt mit der Geschwindigkeit 90 km/h. Er fährt um 9:02 Uhr in Wattwil ab. In Gegenrichtung fährt der Regionalzug von Kaltbrunn nach Wattwil mit 60 km/h. Er fährt um 9:00 Uhr ab. Wir vernachlässigen Beschleunigungs- und Abbremsphasen der Züge.

(a) Zeichne ein Weg-Zeit-Diagramm (horizontale Achse: t = Zeit in Minuten nach 9:00 Uhr; vertikale Achse: s = Weg in Kilometern, wobei etwa Wattwil bei $s = 0$ und Kaltbrunn bei $s = 8$). Bestimme graphisch, wann sich die Züge begegnen.

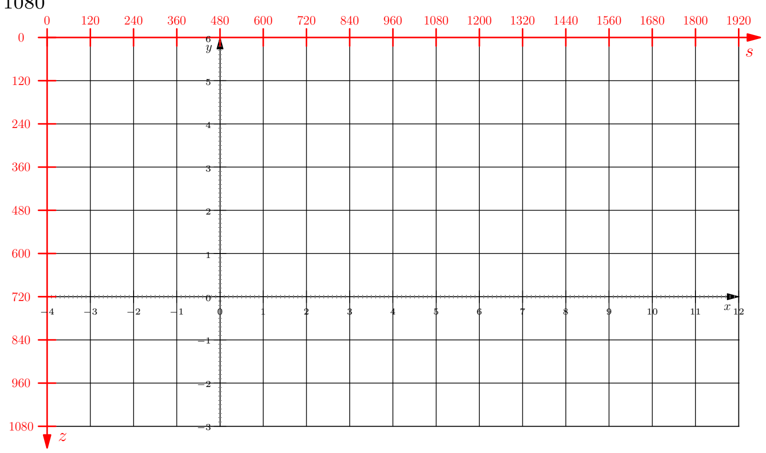
(b) Bestimme rechnerisch, wann dies der Fall ist.
Hinweis: Finde (lineare) Funktionen s (Schnellzug) und r (Regionalzug) mit
- $s(t) =$«Position des Schnellzugs zur Zeit t» und
- $r(t) =$«Position des Regionalzugs zur Zeit t».

Wenn wir Schnell- und Regionalzug durch lineare Funktionen beschreiben, tun wir so, als ob die Züge stets mit derselben Geschwindigkeit fahren ...)

Aufgabe A10 Ein Laptop-Bildschirm ist 1920 Pixel breit und 1080 Pixel hoch (mit quadratischen Pixeln), das Verhältnis von Breite zu Höhe ist also $\frac{1920}{1080} = 16 : 9$.

Deswegen sieht das übliche s-z-Koordinatensystem auf einem solchen Bildschirm wie folgt aus (in der Skizze rechts rot dargestellt):

- horizontale Koordinate s (wie Spalte), sie geht von 0 bis 1920, die s-Achse zeigt nach rechts;
- vertikale Koordinate z (wie Zeile), sie geht von 0 bis 1080, **jedoch zeigt die z-Achse nach unten!** (Zeile 0 ist ganz oben, Zeile 1080 ganz unten).



Jemand will nun auf einem solchen Bildschirm das in der Skizze angegebene «normale x-y-Koordinatensystem» verwenden (mit x-Koordinaten von -4 bis 12 und y-Koordinaten von -3 bis 6).

(a) Betrachte die Punkte $U = (0,0)$, $A = (12,6)$ und $B = (-4,-3)$ im x-y-Koordinatensystem. Welche Koordinaten haben sie im s-z-Koordinatensystem?

(b) Sei $s(x)$ die lineare Umrechnungsfunktion, die aus der x-Koordinate x eines Punktes seine s-Koordinate (= Spaltenkoordinate) berechnet. Zum Beispiel gilt $s(12) = 1920$.
- Was ist $s(0)$? Was ist $s(-4)$?
- Zeichne den Graphen von $s = s(x)$ in ein x-s-Diagramm (x-Achse horizontal, s-Achse vertikal).
- Ermittle die Funktion $s(x)$.
- Teste deine Funktion! Ist sie linear? Liefern $s(12)$ und $s(-4)$ die richtigen Werte?

(c) Ermittle die lineare Funktion $z(y)$, die aus der y-Koordinate eines Punktes seine z-Koordinate (Zeilenkoordinate) berechnet!
Teste dein Ergebnis, indem du $z(-3)$, $z(0)$ und $z(6)$ berechnest.

Aufgabe A11 Gegeben sind die beiden linearen Funktionen $f(x) = 2x - 1$ und $g(x) = 2x + 1$.

(a) Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen.

(b) Messen Sie den Abstand der beiden Geraden (in Einheiten, nicht in cm!).

(c) Berechnen Sie den exakten Abstand der beiden Geraden.
Hinweis: Verwenden Sie eine Gerade, die senkrecht zu den beiden gegebenen Geraden ist.

(d) Berechnen Sie den Abstand zweier Geraden mit Steigung m und Unterschied der Achsenabschnitte Δq.

Aufgabe A12 **Analytische Geometrie** (hierbei rechnet man im Gegensatz zur «klassischen Geometrie» mit Koordinaten)

Gegeben ist ein Dreieck durch seine drei Eckpunkte $A = (-3, 2)$, $B = (-1, -4)$ und $C = (5, 4)$.

(a) Zeichne das Dreieck und gib die folgenden Punkte möglichst genau an (durch Ablesen der Koordinaten; wer mag, darf auch mit Geogebra arbeiten):
- Schwerpunkt S (= Schnittpunkt der Seitenhalbierenden)
- Umkreismittelpunkt U (= Schnittpunkt der Mittelsenkrechten)
- Höhenschnittpunkt H

Im Folgenden sollen die (Koordinaten der) Punkte S, U und H rechnerisch exakt bestimmt werden.

(b) **Berechnung von** S: Gehe wie folgt vor (alles ist rechnerisch zu erledigen; bitte niemals runden).
- Bestimme M_{BC} (= den Mittelpunkt von B und C).
- Die Seitenhalbierende s_a ist die Gerade durch A und M_{BC}. Bestimme die Gleichung $s_a(x) = \ldots$ dieser Geraden.
- Bestimme analog die Gleichung $s_b(x)$ der Seitenhalbierenden s_b.
- Berechne S als Schnittpunkt der beiden Geraden s_a und s_b. Zusatzfrage: Wie kann man S alternativ berechnen?

(c) **Berechnung von** U: Gehe wie folgt vor.
- Bestimme die Steigung von a.
- Bestimme daraus die Steigung der Mittelsenkrechten m_{BC}.
- Bestimme die Gleichung von m_{BC}. Hinweis: Durch welchen Punkt geht m_{BC}?
- Bestimme analog die Gleichung von m_{AB} (oder m_{AC}).
- Bestimme U als Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten.

(d) **Berechnung von** H. Ermittle dazu ähnlich wie oben die Gleichungen zweier Höhen und dann deren Schnittpunkt.

(e) Zeige rechnerisch:
- Die drei Punkte U, H und S liegen auf einer Geraden.
- Bonus: Der Punkt S liegt zwischen U und H und teilt die Strecke $[UH]$ im Verhältnis $\frac{1}{2}$.

Bemerkung: Allgemein gilt in jedem Dreieck: U, H und S liegen auf einer Geraden, der sogenannten **Eulerschen Geraden**, und S teilt $[UH]$ im Verhältnis $\frac{1}{2}$ (siehe Aufgabe **??** ex-euler-gerade im Skript «Strahlensätze und Ähnlichkeit»).

(f) Bonus: Berechne den Inkreismittelpunkt I. Hinweis: Satz über die Winkelhalbierenden

10.6 Verständnisfragen

Aufgabe A13 Betrachte die Funktion/Gerade $\ell(x) = mx + q$.
(Wer mag, kann zuerst mit einer konkreten Gerade wie $\ell(x) = \frac{1}{2}x + 1$ arbeiten.)

(a) Wenn man diese Gerade an der x-Achse spiegelt, welche lineare Funktion beschreibt die gespiegelte Gerade?

(b) Wenn man diese Gerade an der y-Achse spiegelt, welche lineare Funktion beschreibt die gespiegelte Gerade?

(c) Wenn man diese Gerade an der ersten Winkelhalbierenden spiegelt, welche lineare Funktion beschreibt die gespiegelte Gerade?

(d) Wenn man diese Gerade um 90° in mathematisch positiver Richtung dreht, welche lineare Funktion beschreibt die gedrehte Gerade?

Aufgabe A14 Wahr oder falsch? Begründen Sie und korrigieren Sie – falls möglich – falsche Aussagen zu sinnvollen wahren Aussagen.

a) Für zwei beliebige Punkte in der x-y-Ebene gibt es immer eine lineare Funktion, deren Graph durch diese Punkte geht.

b) Haben zwei Geraden die gleiche Steigung, so sind sie parallel.

c) Haben zwei Geraden den gleichen y-Achsenabschnitt q, so schneiden sie sich auf der x-Achse.

d) Gegeben ist eine lineare Funktion $f(x) = mx+q$. Ersetzt man sowohl m als auch q durch ihre Gegenzahlen, so wird der Graph an der y-Achse gespiegelt.

e) Die Steigung einer horizontalen Geraden ist nicht definiert.

f) Die Steigung der ersten Winkelhalbierenden ist 1.

g) Die Steigung einer vertikalen Geraden ist 2.

h) Das Produkt der Steigungen zweier orthogonaler (= senkrechter) Geraden ist -1.

i) Erhöht man die Steigung einer Geraden um 2, so verschiebt sich die Gerade um 2 Einheiten in y-Richtung.

j) Wenn f eine lineare Funktion ist, dann ist auch $h(x) = 2 \cdot f(x)$ eine lineare Funktion.

k) Gegeben sind zwei lineare Funktionen f und g. Die Funktion $h(x) = f(x) + g(x)$ ist dann ebenfalls eine lineare Funktion.

l) Wenn f und g lineare Funktionen sind, dann ist auch $h(x) = f(g(x))$ eine lineare Funktion.

m) Wenn f eine lineare Funktion ist, dann ist auch $g(x) = f(x) \cdot f(x)$ eine lineare Funktion.

n) Die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x+2$ schneiden sich in den Punkten $(-1, 1)$ und $(2, 4)$.

o) Die Graphen der Funktionen $f(x) = (x + 1)^2 - 1$ und $g(x) = (x - 1)^2 + 1$ schneiden sich in genau einem Punkt.

p) Die Graphen der Funktionen $f(x) = (x - 1)^2 + 1$ und $g(x) = 1 - 2x$ schneiden sich in zwei Punkten.

q) Die Summe $h(x) = f(x) + g(x)$ zweier nicht-linearer Funktionen f und g ist nie linear.

r) Das Produkt $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ zweier linearer Funktionen f und g ist nie linear.

s) Der Abstand zweier Geraden ist gleich dem Unterschied der y-Achsenabschnitte.

t) Für beliebiges x liegt der Punkt $(f(x), x)$ auf dem Graphen der Funktion f.

u) Die übliche Notenfunktion ist eine lineare Funktion der Punktzahl.

v) Die Zeit, die benötigt wird, um von einem Ort zu einem anderen zu gelangen, ist eine lineare Funktion der Entfernung der beiden Orte.

Aufgabe A15 Finden Sie Beispiele aus dem Alltag für lineare Funktionen.

10.7 Weitere Aufgaben

Aufgabe A16 Gegeben sind die Punkte $A = (-2, -1)$ und $B = (3, 1)$ sowie die Steigung $m = \frac{3}{2}$ der Geraden b durch den Punkt A. Gesucht ist der Punkt C auf b, für den das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig ist mit rechtem Winkel bei C.

a) Konstruieren Sie das Dreieck und lesen Sie die ungefähren Koordinaten von C ab.

b) Berechnen Sie die exakten Koordinaten von C.

Aufgabe A17 Gegeben sind die Punkte $A = (-2, 1)$, $B = (1, -2)$ und $C = (3, 1)$.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen für die Geraden $a = BC$, $b = AC$ und $c = AB$.

b) Gilt $a \perp c$?

c) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Höhe h_a (dies ist die Gerade durch A, die senkrecht auf a steht).

d) Bestimmen Sie den Höhenfusspunkt H_a ($= a \cap h_a$).

Aufgabe A18 Betrachte die beiden Dörfer $A = (1, 2)$ und $B = (5, 3)$. Wenn die x-Achse ein Fluss ist: Wie lang ist der kürzeste Weg von Dorf A nach Dorf B, bei dem man unterwegs den Fluss besucht?

Hinweis: Spiegle ein Dorf am Fluss.

Bemerkung: Die Aufgabe wird schwieriger, wenn die erste Winkelhalbierende (oder gar irgendeine andere Gerade «zwischen A und B») der Fluss ist.

Aufgabe A19 Indem Sie sich zuerst überlegen, wie der Funktionsgraph aussehen kann, bestimmen Sie alle linearen Funktionen, die

a) die Zahl 1 auf 3 und die Zahl 4 auf 2 abbilden.

b) das Intervall $[-1, 1]$ vollständig auf das Intervall $[0, 4]$ abbilden.

c) das Intervall $[0, 1]$ auf das Intervall $[1, 6]$ abbilden.

d) das Intervall $[1, 6]$ auf das Intervall $[0, 1]$ abbilden.

e) das Intervall $[0, 1]$ auf das Intervall $[a, b]$ abbilden (mit $a < b$, für $a, b \in \mathbb{R}$).

f) das Intervall $[a, b]$ auf das Intervall $[0, 1]$ abbilden (mit $a < b$, für $a, b \in \mathbb{R}$).

g) das Intervall $[a, b]$ auf das Intervall $[c, d]$ abbilden (mit $a < b$ und $c < d$, für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$).

10.8 Repetition

Aufgabe A20 Gegeben ist die lineare Funktion $f(x) = 2x - 1$.

a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f.

b) Zeichnen Sie die Senkrechte zum Graphen von f durch den Punkt $(-2, 2)$ und bestimmen Sie deren Funktionsgleichung in der Form $g(x) = mx + q$.

c) Wie gross ist die Steigung einer Senkrechten zu einer Geraden mit Steigung $m = \frac{4}{3}$?

10.9 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe A1 ex-geraden-verschiedener-steigungen

Die Ursprungsgerade mit Steigung $-\frac{1}{4}$ ist die Gerade durch den Ursprung $(0, 0)$ und den Punkt $(1, -\frac{1}{4})$ (oder äquivalent durch den Ursprung und den Punkt $(4, -1)$). Die anderen gesuchten Ursprungsgeraden konstruiert man analog.

Lösung zu Aufgabe A2 ex-spezielle-steigungen

Hinweis: In der Lösung hier werden nur positive Steigungen berechnet. Spiegelt man die Geraden an der x-Achse bleibt der Winkel gleich, die Steigung wird aber negativ. D. h. zu allen Aufgaben ist auch die entsprechend negative Steigung eine Lösung.

a) Die Steigung ist 0.

b) Man zeichnet ein 30°-60°-90°Stützdreieck, z. B. so, dass die Hypotenuse 1 ist. Dann sind die Katheten $\frac{1}{2}$ (y-Differenz) und $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (x-Differenz). Die Steigung ist somit

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \ldots = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

c) Steigung 1.

d) Wie in b), einfach x und y vertauschen, also ist die Steigung $\sqrt{3}$.

e) Die Steigung ist nicht definiert, denn Division durch Null ist nicht definiert. (Genau genommen hätte man diesen Fall in der Definition der Steigung ausschliessen müssen.) Die Steigung wäre quasi ∞.

Lösung zu Aufgabe A3 ex-graphen-zeichnen-und-steigung-und-y-achsenabschnitt-bestimmen

Die Graphen bitte selbst kontrollieren, indem man sie etwa mit GeoGebra oder einer anderen Computer-Algebra-Software (CAS) zeichnet.

Wenn man die Funktion auf die «Standard-Form» $\ell(x) = mx + q$ gebracht hat, ist m die Steigung und q der y-Achsenabschnitt. Den y-Achsenabschnitt linearer Funktionen bekommt man auch durch Einsetzen von $x = 0$.

a) $a(x) = 3x = 3x + 0$ hat Steigung $m = 3$ und y-Achsenabschnitt $q = 0 = a(0)$.

b) $b(x) = \frac{1}{3}x$ hat Steigung $m = \frac{1}{3}$ und y-Achsenabschnitt $q = 0 = b(0)$.

c) $c(x) = -x$ hat Steigung -1 und y-Achsenabschnitt 0.

d) $d(x) = -\frac{1}{2}x$ hat Steigung $-\frac{1}{2}$ und y-Achsenabschnitt 0.

e) $e(x) = x - 1$ hat Steigung 1 und y-Achsenabschnitt $q = -1 = e(0)$.

f) $f(x) = -x + 1$ hat Steigung -1 und y-Achsenabschnitt 1.

g) $g(x) = 2x - 2$ hat Steigung 2 und y-Achsenabschnitt -2.

h) $h(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ hat Steigung $-\frac{1}{3}$ und y-Achsenabschnitt $\frac{2}{3}$.

Lösung zu Aufgabe A4 ex-lineare-funktionen-ablesen

a) y-Achsenabschnitt $q = \frac{1}{2}$. Steigung $m = \frac{1}{2}$ (z. B. mit den Punkten $(-1, 0)$ und $(1, 1)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$. Also $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

b) y-Achsenabschnitt $q = -\frac{1}{2}$. Steigung $m = \frac{3}{2}$ (z. B. mit den Punkten $(-1, -2)$ und $(1, 1)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{2}$. Also $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

c) y-Achsenabschnitt $q = 1$. Steigung $m = -\frac{1}{3}$ (z. B. mit den Punkten $(0, 1)$ und $(3, 0)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{3}$. Also $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$.

d) y-Achsenabschnitt $q = -\frac{3}{2}$. Steigung $m = -2$ (z. B. mit den Punkten $(-1, \frac{1}{2})$ und $(1, -\frac{7}{2})$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{2}$. Also $f(x) = -2x - \frac{3}{2}$.

Lösung zu Aufgabe A5 ex-gerade-mit-steigung-durch-punkt

(a) Bestimme die Gleichung der Geraden g mit Steigung $m = -\frac{2}{3}$, die durch den Punkt $A = (-1, -3)$ geht.
Allgemeiner Ansatz: $\ell(x) = mx + q$
Da die Steigung m gegeben ist, gilt $y = \ell(x) = -\frac{2}{3}x + q$.
Dass der Punkt $A = (-1, -3)$ auf dem Graphen von ℓ liegt, ist gleichbedeutend zu $\ell(-1) = -3$ bzw. ausgeschrieben

$$-\frac{2}{3} \cdot (-1) + q = -3$$

(Man ersetzt in der obigen suggestiven Schreibweise $y = -\frac{2}{3}x + q$ also x und y durch die entsprechenden Koordinaten des Punktes A.)
Auflösen dieser linearen Gleichung nach q liefert $q = -3 - \frac{2}{3} = -\frac{11}{3}$.
Ergebnis:

$$\ell(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{11}{3}$$

- Teste, ob der Punkt A auf dem Graphen deiner Gleichung liegt.
  Ja, denn es gilt $\ell(-1) = -\frac{2}{3} \cdot (-1) - \frac{11}{3} = \frac{2}{3} - \frac{11}{3} = \frac{-9}{3} = -3$. Test erfolgreich.
- Liegt der Punkt $(4, 4)$ auf der Geraden?
  Nein, denn $\ell(4) = -\frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{11}{3} = -\frac{8}{3} - \frac{11}{3} = \frac{-19}{3} = -\frac{19}{3} \neq 4$. Der Punkt liegt also nicht auf der Geraden.
  Anschaulich ist das auch klar: Wenn die Gerade durch den Punkt $A = (-1, -3)$ geht und negative Steigung hat, bleibt sie «rechts von A» unterhalb der x-Achse. Der Punkt $(4, 4)$ liegt aber «rechts von A» und oberhalb der x-Achse.
- Für welches y liegt der Punkt $(3, y)$ auf der Geraden?
  Für $y = \ell(3) = -\frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{11}{3} = -2 - \frac{11}{3} = \frac{-6-11}{3} = \frac{-17}{3}$.

(b) siehe Lehrerversion des Skripts

Lösung zu Aufgabe A6 ex-gerade-durch-zwei-punkte

(a) Mit konkreten Zahlen: Bestimme die Gleichung der Geraden g, die durch die beiden Punkte $A = (-1, 2)$ und $B = (5, -1)$ geht.

(i) 1. Lösungsweg:
Die Steigung ist

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2 - (-1)}{-1 - 5} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$$

Nun kennnen wir die Steigung der Geraden und zwei Punkte auf der Geraden, d.h. wir können aus Steigung und einem Punkt (kann A oder B wählen) die Geradengleichung wie in Aufgabe Aufgabe A5 bestimmen (dem Leser überlassen).
Ergebnis: $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

- Teste, ob die beiden Punkte A und B auf dem Graphen deiner Gleichung liegen.
  Wegen $g(-1) = -\frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2$ liegt $A = (-1, 2)$ auf dem Graphen von ℓ.
  Wegen $g(5) = -\frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = -1$ liegt $B = (5, -1)$ auf dem Graphen von ℓ.
- 2. Lösungsweg: Die Gerade hat die Gleichung $g(x) = mx + q$. Zu bestimmen sind m und q.
  - $A \in g$ ist gleichbedeutend zu $g(-1) = 2$, d.h. $m \cdot (-1) + q = 2$
  - $B \in g$ ist gleichbedeutend zu $g(5) = -1$, d.h. $m \cdot 5 + q = -1$

Also müssen diese beiden jeweils letztgenannten Gleichungen gelten (die beiden Gleichungen bilden ein Gleichungssystem in den beiden Variablen m und q). Löst man beide nach q auf, so erhält man

$$\begin{aligned} q &= 2+m \\ q &= -1-5m \end{aligned}$$

Also gilt $2+m=-1-5m$. Auflösen nach m ergibt $m=-\frac{1}{2}$.
Setzt man dies in einer der beiden obigen Gleichungen für q ein, so erhält man $q=2+(-\frac{1}{2})=-1-5\cdot(-\frac{1}{2})=\frac{3}{2}$.
Die gesuchte Geradengleichung ist also $g(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

(b) siehe Lehrerversion des Skripts

Lösung zu Aufgabe A7 ex-schnittpunkt

Wenn x die x-Koordinate des Schnittpunktes ist, gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) && \\ -\frac{1}{3}x-1 &= \frac{3}{2}x+1 && \mid \cdot 6 \\ -2x-6 &= 9x+6 && \mid +2x-6 \\ -12 &= 11x && \mid : 11 \\ -\frac{12}{11} &= x && \end{aligned}$$

Eingesetzt in eine der Funktionen: $f\left(-\frac{12}{11}\right)=\frac{12}{33}-1=-\frac{7}{11}$. Zur Kontrolle (nicht wirklich nötig) eingesetzt in g: $g\left(-\frac{12}{11}\right)=-\frac{36}{22}+1=-\frac{7}{11}$.
Und damit sind die Koordinaten des Schnittpunktes: $\left(-\frac{12}{11},-\frac{7}{11}\right)$

Lösung zu Aufgabe A8 ex-senkrechte-geraden-steigung

(a) Man zeichne die Gerade g und ergänze ein Steigungsdreieck (etwa mit $\Delta x=5$ und $\Delta y=3$).
Die Gerade h entsteht aus g durch eine Drehung um den Ursprung um den Winkel 90°. Dreht man auch das Steigungsdreieck auf diese Weise, so erhält man ein Steigungsdreieck zu h. Sein «Δx ist -3, das Negative des vorherigen Δy», sein «Δy ist 5, das vorherige Δx». Damit hat h die Steigung $\frac{5}{-3}=-\frac{5}{3}$.

(b) Steigung $-\frac{5}{3}$.
Der Unterschied zur vorherigen Teilaufgabe ist nur, dass nun beliebige Geraden statt Ursprungsgeraden betrachtet werden. Jede Gerade hat aber eine dazu parallelel Ursprungsgerade mit derselben Steigung.

(c) siehe Lehrerversion des Skripts

Lösung zu Aufgabe A9 ex-zug-begegnung

(a) (zu ergänzen)

(b) Wir rechnen in Kilometer (als Längeneinheit) ab Wattwil und Stunden (als Zeiteinheit) ab 9:00 Uhr. Es bezeichnet t die Zeit.
- Schnellzug: $s(t)=90\left(t-\frac{2}{60}\right)=90t-3$
- Regionalzug: $r(t)=8-60t$.

Zur Begegnungszeit muss $s(t)=r(t)$ gelten, also

$$90t-3=8-60t$$

Auflösen der Gleichung nach t ergibt $t=\frac{11}{150}$.
Die Begegnung findet also um 9:04:24 Uhr statt.
Wer mag, kann auch berechnen, dass die Begegnung bei Kilometer 3.6 ab Wattwil stattfindet.

Lösung zu Aufgabe A10 ex-bildschirm

(a) • $U=(0,0)$ ist im s-z-Koordinatensystem $U=(480,720)$;

- $A = (12, 6)$ ist im s-z-Koordinatensystem $A = (1920, 0)$;
- $B = (-4, -3)$ im s-z-Koordinatensystem ist $B = (0, 1080)$.

(b) Sei $s(x)$ die lineare Umrechnungsfunktion, die aus der x-Koordinate x eines Punktes seine s-Koordinate (= Spaltenkoordinate) berechnet. Zum Beispiel gilt $s(12) = 1920$.

- $s(0) = 480$; $s(-4) = 0$
- (zu ergänzen)
- $s(x) = \frac{1920-480}{12}x + 480 = 120x + 480$
- Test: Die Funktion ist linear und es gelten $s(12) = 120 \cdot 12 + 480 = 1920$ und $s(-4) = 120 \cdot (-4) + 480 = 0$ wie gewünscht.

(c) $z(y) = \frac{-720}{6}y + 720 = -120y + 720$
Tests: $z(-3) = -120 \cdot (-3) + 720 = 1080$, $z(0) = 720$ und $z(6) = -120 \cdot 6 + 720 = 0$

Lösung zu Aufgabe A11 ex-abstand-paralleler-geraden

(a) dem Leser überlassen

(b) dem Leser überlassen

(c) Eine Möglichkeit besteht darin, die Konstruktion rechnerisch nachzuvollziehen. Dazu schneidet man eine Gerade, die auf den beiden (parallelen) Geraden senkrecht steht, mit diesen beiden Geraden; als senkrechte Gerade kann man zum Beispiel die Gerade mit der Funktionsgleichung $k(x) = -\frac{1}{2}x$ nehmen.
Man löst die Gleichungen $f(x) = k(x)$ und $g(x) = k(x)$ und erhält als Schnittpunkt mit f den Punkt $\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ und als Schnittpunkt mit g den Punkt $\left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$. Der Abstand der beiden Punkte beträgt $\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 5}{5^2}} = \frac{2}{5}\sqrt{5} \approx 0.89443$

(d) Seien $f(x) = mx$ und $g(x) = mx - q$. Die Gleichung einer Rechtwinkligen Gerade ist $k(x) = -\frac{1}{m}x$. Der Schnittpunkt mit f ist $(0, 0)$, der Schnittpunkt mit g ist $\left(\frac{q}{m+\frac{1}{m}}, -\frac{q}{m^2+1}\right)$. Der Abstand der beiden Punkte ist also $\sqrt{\left(\frac{q}{m+\frac{1}{m}}\right)^2 + \left(\frac{q}{m^2+1}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{qm}{m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{q}{m^2+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{q^2(m^2+1)}{(m^2+1)^2}} = \frac{q\sqrt{m^2+1}}{m^2+1} = \frac{q}{\sqrt{1+m^2}}$

Lösung zu Aufgabe A12 ex-dreieck-ausgezeichnete-punkte-berechnen

Gegeben ist ein Dreieck durch seine drei Eckpunkte $A = (-3, 2)$, $B = (-1, -4)$ und $C = (5, 4)$.

(a) dem Leser überlassen

(b) **Berechnung von S:**

- Bestimme $M_{BC} = \frac{B+C}{2} = \frac{(4,0)}{2} = (2, 0)$
- Die Seitenhalbierende s_a ist die Gerade durch A und M_{BC}. Standardrechnung «Gerade durch zwei Punkte» liefert $s_a(x) = \frac{-2}{5}(x-2) = -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$
- $s_b(x) = \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}$
- Auflösen der Gleichung $s_a(x) = s_b(x)$ liefert $x = \frac{1}{3}$ und damit $y = s_a\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{5} = -\frac{2}{15} + \frac{12}{15} = \frac{2}{3}$.
  Also Schwerpunkt $S = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.
- Zusatzbemerkung: Es gilt

$$S = \frac{A+B+C}{3} = \frac{(-3,2)+(-1,-4)+(5,4)}{3} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

  Um das zu erklären, sollte man sich überlegen, dass bei jedem Dreieck «Flächenschwerpunkt = Eckenschwerpunkt» gilt (siehe etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Geometrischer_Schwerpunkt).
  Der Eckenschwerpunkt ist relativ leicht zu berechnen: Gesucht ist der Punkt S, für den gilt: Die Summe der Drehmomente zu den drei Punkten A, B und C ist Null, d. h. $(A-S)+(B-S)+(C-S) = 0$ oder nach S aufgelöst $S = \frac{A+B+C}{3}$.
  Bei Vierecken ist es im Allgemeinen nicht richtig, dass Flächenschwerpunkt = Eckenschwerpunkt. Der Leser überlege sich ein Gegenbeispiel!

(c) **Berechnung von U:** Gehe wie folgt vor.

- Die Steigung von a ist $m_a = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{4-(-4)}{5-(-1)} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

- Die Steigung von m_{BC} ist der negative Kehrwert davon, also $m_{m_{BC}} = -\frac{3}{4}$.
- $m_{BC}(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ (denn m_{BC} geht durch M_{BC}).
- $m_{AB}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ bzw. $m_{AC}(x) = -4x + 7$
- Schnittpunkt der Mittelsenkrechten = Umkreismittelpunkt $U = \left(\frac{22}{13}, \frac{3}{13}\right)$

(d) **Berechnung von H.** Die Steigungen der Höhen sind dieselben wie der entsprechenden Mittelsenkrechten.
- $h_a(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$
- $h_b(x) = -4x - 8$
- $h_c(x) = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

Schnittpunkt der Höhen = Höhenschnittpunkt $H = \left(-\frac{31}{13}, \frac{20}{13}\right)$

(e) Zeige rechnerisch:
- Die drei Punkte U, H und S liegen auf einer Geraden.
Die Gerade e durch $U = \left(\frac{22}{13}, \frac{3}{13}\right)$ und $H = \left(-\frac{31}{13}, \frac{20}{13}\right)$ hat die Gleichung

$$e(x) = \frac{-17}{53}x + \frac{533}{689} = \frac{-17}{53}x + \frac{41}{53}$$

Wir testen, ob auch $S = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ auf e liegt:

$$e(x_S) = e\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-17}{53}\frac{1}{3} + \frac{41}{53} = \frac{-17}{159} + \frac{123}{159} = \frac{106}{159} = \frac{2}{3} = y_S$$

Also liegt S auf e.
- Bonus: Der Punkt S liegt zwischen U und H und teilt die Strecke $[UH]$ im Verhältnis $\frac{1}{2}$.
Dass S zwischen U und H liegt, liegt daran, dass seine x-Koordinate zsichen den x-Koordinaten von H und U liegt.
Wir wollen zeigen, dass

$$\frac{1}{2} \overset{\boxed{?}}{=} \frac{\overline{US}}{\overline{HS}} = \frac{\sqrt{(x_U - x_S)^2 + (y_U - y_S)^2}}{\sqrt{(x_H - x_S)^2 + (y_H - y_S)^2}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{22}{13} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{13} - \frac{2}{3}\right)^2}}{\sqrt{\left(-\frac{31}{13} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{20}{13} - \frac{2}{3}\right)^2}}$$

gilt. Da alle Ausdrücke positiv sind, genügt es, die quadrierte Gleichung zu beweisen, also (alle folgenden Umformungen sind Äquivalenzumformungen)

$$\frac{1}{4} \overset{\boxed{?}}{=} \frac{\left(\frac{22}{13} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{13} - \frac{2}{3}\right)^2}{\left(-\frac{31}{13} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{20}{13} - \frac{2}{3}\right)^2} \qquad \mid \text{mal Produkt der Nenner}$$

$$\left(-\frac{31}{13} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{20}{13} - \frac{2}{3}\right)^2 \overset{\boxed{?}}{=} 4 \cdot \left(\left(\frac{22}{13} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{13} - \frac{2}{3}\right)^2\right)$$

$$\left(\frac{-93 - 13}{39}\right)^2 + \left(\frac{60 - 26}{39}\right)^2 \overset{\boxed{?}}{=} 4 \cdot \left(\left(\frac{66 - 13}{39}\right)^2 + \left(\frac{9 - 26}{39}\right)^2\right) \qquad \mid \text{mal } 39^2$$

$$106^2 + 34^2 \overset{\boxed{?}}{=} 4 \cdot \left(53^2 + 17^2\right)$$

$$(2 \cdot 53)^2 + (2 \cdot 17)^2 \overset{\boxed{?}}{=} 4 \cdot \left(53^2 + 17^2\right)$$

$$4 \cdot 53^2 + 4 \cdot 17^2 \overset{\boxed{?}}{=} 4 \cdot \left(53^2 + 17^2\right)$$

Die letzte Gleichung gilt offensichtlich, so dass alle mit einem Fragezeichen markierten Gleichungen gelten.

(f) Berechnung des Inkreismittelpunkts I: Laut Geogebra gilt $I \approx (-0.27, 0.5$ (Datei privat abgespeichert). (exakte Lösung (mit Satz über die Winkelhalbierenden) aufzuschreiben)

Lösung zu Aufgabe A13 ex-gerade-transformieren

(a) Spiegelung an x-Achse (Funktionsgleichung mit (-1) multiplizieren):
$f(x) = -mx - q$

(b) Spiegelung an y-Achse (in Funktionsgleichung x durch $-x$ ersetzen):
$g(x) = m(-x) + q = -mx + q$

(c) Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden (geht nur, falls $m \neq 0$):
Man überlegt sich mit einer Skizze, dass die gespiegelte Gerade die Steigung $\frac{1}{m}$ hat (denn in einem Steigungsdreieck werden beim Spiegeln Δx und Δy vertauscht).
Also hat die gespiegelte Gerade die Gleichung $h(x) = \frac{1}{m}x + p$ für ein geeignetes $p \in \mathbb{R}$.
Da $(0, q)$ auf der Ausgangsgeraden liegt, liegt $(q, 0)$ auf der gespiegelten Geraden.
Also muss $h(q) = 0$ gelten oder ausgeschrieben $\frac{1}{m} \cdot q + p = 0$, d.h. $p = -\frac{q}{m}$.
Fazit: $h(x) = \frac{1}{m}x - \frac{q}{m}$

(d) Drehung um 90°.
Die Steigung der gedrehten Geraden ist $-\frac{1}{m}$ (siehe Merke 10.4.5).
Also gilt $i(x) = -\frac{1}{m}x + p$ für ein geeignetes $p \in \mathbb{R}$.
Da $(0, q)$ auf der Ausgangsgeraden liegt, liegt $(-q, 0)$ auf der gedrehten Geraden.
Also muss $i(-q) = 0$ gelten oder ausgeschrieben $-\frac{1}{m} \cdot (-q) + p = 0$, d.h. $p = -\frac{q}{m}$.
Fazit: $i(x) = -\frac{1}{m}x - \frac{q}{m}$

Lösung zu Aufgabe A14 ex-wahr-oder-falsch

a) **Falsch**. Das gilt nicht wenn die Punkte vertikal übereinander liegen (gleiche x-Koordinate, unterschiedliche y-Koordinaten). Um die Aussage wahr zu machen, könnte man «...Punkte mit unterschiedlichen x-Koordinaten...» schreiben.

b) **Wahr**. Der einzige Streitpunkt hier ist, ob man identische (übereinander liegende) Geraden ebenfalls als parallel bezeichnet.

c) **Falsch**. Sie schneiden sich auf der y-Achse.

d) **Falsch**. Die neue Funktion ist einfach $g(x) = -f(x)$, also an der x-Achse gespiegelt.

e) **Falsch**. Die Steigung ist Null.

f) **Wahr**. 1 y-Einheit pro x-Einheit.

g) **Falsch**. Vertikale Geraden haben keine definierte Steigung (wäre quasi unendlich).

h) **Wahr**. $m \cdot -\frac{1}{m} = -1$.

i) **Falsch**. Richtig wäre z. B. «Erhöht man den y-Achsenabschnitt um 2...».

j) **Wahr**. $h(x) = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot (mx + q) = 2m \cdot x + 2q$.

k) **Wahr.** $f(x) = m_f x + q_f$, $g(x) = m_g x + q_g$, also $h(x) = (m_f + m_g)x + (q_f + q_g)$.

l) **Wahr.** Wie in k) erhält man $h(x) = f(m_g x + q_g) = m_f \cdot (m_x x + q_g) + q_f = m_f m_g \cdot x + (m_f q_g + q_f)$.

m) **Falsch**. Z. B. für $f(x) = x$ und $g(x) = x$ ist $h(x) = x^2$ nicht linear.

n) **Wahr**. Überprüfen durch einsetzen der x-Koordinaten in die Funktionen.

o) **Wahr**. Die Gleichung $f(x) = g(x)$ vereinfacht sich auf eine lineare Gleichung (x^2 fällt weg) und die hat genau eine Lösung (der Koeffizient von x ist nicht Null).

p) **Falsch**. Man kann z. B. die Graphen zeichnen, oder die Gleichung $f(x) = g(x)$ umformen, um $x^2 = -1$ zu finden, was keine Lösung hat.

q) **Falsch**. Z. B. $f(x) = x^2$ und $g(x) = x - x^2$. Die Summe ist $h(x) = x$ linear.

r) **Falsch**. Das Produkt genau dann ein lineare Funktion, wenn in mindestens einer Funktion die Steigung gleich Null ist (und damit der quadratische Term weg fällt).

s) **Falsch**. Das ist nur wahr, wenn die Geraden horizontal sind.

t) **Falsch**. Der Punkt $(x, f(x))$ liegt auf dem Graphen. Man könnte auch noch monieren, dass x aus dem Definitionsbereich kommen muss.

u) **Falsch**. Die Notenfunktion ist linear für Punktzahlen zwischen der Punktzahl 0 und der für die Note 6 benötigten Punktzahl. Dort macht der Graph einen Knick und wird horizontal, denn Noten über 6 werden nicht vergeben. Die Funktion setzt sich genaugenommen aus drei linearen Funktionen zusammen. Sind beispielsweise 40 Punkte für Note 6 nötig, so ist die Notenfunktion

$$n(p) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p < 0; \\ 1 + 5 \cdot \frac{p}{40} = \frac{5}{40}p + 1 & \text{falls } 0 \leq p \leq 40; \\ 6 & \text{falls } p > 40 \end{cases}$$

v) **Falsch**. Das würde eine konstante Durchschnittsgeschwindigkeit (=Steigung!) voraussetzen, was nicht realistisch ist.

Lösung zu Aufgabe A15 ex-lineare-funktionen-alltagsbeispiele

Einige Beispiele:

- Wenn eine Tonne Weizen 328 Franken kostet, so kosten x Tonnen Weizen $f(x) = 328x$ Franken.
- Ist p der Kilopreis einer Ware in Franken, so kosten x Kilogramm dieser Ware $f(x) = px$ Franken.
- Beträgt die Anmelde-Gebühr in einem Club 100 Franken und die monatliche Gebühr 30 Franken, so zahlt man für die ersten x Monate Mitgliedschaft insgesamt $k(x) = 30x + 100$ Franken.
- Fährt ein Velofahrer mit einer Geschwindigkeit v in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, so legt er in t Stunden eine Strecke von $s(t) = vt$ Kilometern zurück.
- Ein gängige Formel zur Notenberechnung lautet $n(p) = 1 + 5\frac{p}{m} = \frac{5}{m}p + 1$, wobei m die maximal erreichbare Punktzahl ist und p die erreichte Punktzahl.

Lösung zu Aufgabe A16 ex-rechtwinkliges-dreieck-konstruieren

Vorgehen: Zuerst werden die Funktionsgleichungen der Geraden b und $a = BC$ bestimmt. Dann wird der Schnittpunkt bestimmt.

Geradengleichung von b (Steigung $\frac{3}{2}$): $b(x) = \frac{3}{2}x + q_b$. Es gilt $A \in b$: Setzt man die x-Koordinate von A in die Funktion b ein, erhält man die y-Koordinate von A:

$$\begin{aligned} b(-2) &= -1 \\ \frac{3}{2} \cdot -2 + q_b &= -1 \\ -3 + q_b &= -1 && \mid +3 \\ q_b &= 2 \end{aligned}$$

Die Gerade a ist rechtwinklig zu b, hat also die Steigung $-\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$. Es gilt $B \in a$, also

$$\begin{aligned} a(3) &= 1 \\ -\frac{2}{3} \cdot 3 + q_a &= 1 \\ -2 + q_a &= 1 && \mid +2 \\ q_a &= 3 \end{aligned}$$

Es ist also der Schnittpunkt der Geraden $a(x) = -\frac{2}{3}x + 3$ und $b(x) = \frac{3}{2}x + 2$ zu bestimmen:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}x + 3 &= \frac{3}{2}x + 2 && \mid -2 + \frac{2}{3}x \\ 1 &= \frac{13}{6}x && \mid \cdot \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} &= x \end{aligned}$$

Die y-Koordinate des Schnittpunktes erhält man durch Einsetzen (in a oder b):

$$a\left(\frac{6}{13}\right) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{13} + 3 = \frac{35}{13}$$

Kontrolle (eigentlich unnötig):

$$b\left(\frac{6}{13}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{13} + 2 = \frac{35}{13}$$

Damit sind die Koordinaten von $C = \left(\frac{6}{13}, \frac{35}{13}\right) \approx (0.4615, 2.6923)$.

Lösung zu Aufgabe A17 ex-geraden-durch-punkte

a) Steigungen $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$: $m_a = \frac{3}{2}$, $m_b = 0$, $m_c = -1$.

Achsenabschnitte: Ein Punkt auf der Geraden in die Funktionsgleichung mit unbekanntem q einsetzen, nach q auflösen. Beispiel für die Gerade a:

$$\begin{aligned} f_a(1) &= -2 \\ m_a \cdot 1 + q_a &= -2 \\ \frac{3}{2} + q_a &= -2 && \left| -\frac{3}{2}\right. \\ q_a &= -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

Entsprechend $q_b = 1$, $q_c = -1$ und damit

$$f_a(x) = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} \qquad f_b(x) = 1 \qquad f_c(x) = -x - 1$$

b) Nein, da $m_a \neq -\frac{1}{m_c}$

c) $f_h(x) = m_h \cdot x + q_h$ mit $m_h = -\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$. q_h erhält man durch Einsetzen der Koordinaten von A und Auflösen nach q_h. Resultat: $f_h(x) = -\frac{2}{3} \cdot x - \frac{1}{3}$.

d) Auflösen der Gleichung $f_a(x) = f_h(x) \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ liefert $x = \frac{19}{13}$. Eingesetzt erhält man $y = f_a(\frac{19}{13}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{19}{13} - \frac{7}{2} = -\frac{34}{26} = -\frac{17}{13}$

Lösung zu Aufgabe A18 ex-weg-a-fluss-b

Dörfer $A = (1, 2)$ und $B = (5, 3)$.

Spiegelt man $B = (5, 3)$ am Fluss (= der x-Achse), so erhält man den Punkt $B' = (5, -3)$.

Die Gerade g durch A und B' schneidet die x-Achse in dem Punkt, in dem man den Fluss auf dem kürzesten Weg besucht (bitte mit einer Skizze überlegen, warum dies stimmt).

Die Gleichung von g ist $g(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{13}{4}$.

Ihren Schnittpunkt S mit der x-Achse erhält man durch Lösen der Gleichung $g(x) = 0$, d.h. $-\frac{5}{4}x + \frac{13}{4} = 0$. Man erhält die Lösung $x = \frac{13}{5}$.

Der Schnittpunkt S ist also $\left(\frac{13}{5}, 0\right)$.

Der kürzeste Weg hat also die Länge

$$\begin{aligned} \overline{AS} + \overline{BS} &= \sqrt{(x_A - x_S)^2 + (y_A - y_S)^2} + \sqrt{(x_B - x_S)^2 + (y_B - y_S)^2} \\ &= \sqrt{\left(1 - \frac{13}{5}\right)^2 + (2-0)^2} + \sqrt{\left(5 - \frac{13}{5}\right)^2 + (3-0)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{8}{5}\right)^2 + 4} + \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + 9} \\ &= \sqrt{\frac{64}{25} + \frac{100}{25}} + \sqrt{\frac{144}{25} + \frac{225}{25}} \\ &= \sqrt{\frac{164}{25}} + \sqrt{\frac{369}{25}} \\ &= \frac{\sqrt{164}}{\sqrt{25}} + \frac{\sqrt{369}}{\sqrt{25}} \\ &= \frac{2\sqrt{41}}{5} + \frac{3\sqrt{41}}{5} \\ &= \sqrt{41} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe A19 ex-intervalle-abbilden

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$

b) $f(x) = 2x + 2$ und $f(x) = -2x + 2$

c) $f(x) = 5x + 1$ und $f(x) = -5x + 6$

d) $f(x) = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(x-1)$ und $f(x) = -\frac{1}{5}x + \frac{6}{5} = -\frac{1}{5}(6-x)$

e) $f(x) = (b-a) \cdot x + a$ und $f(x) = (a-b) \cdot x + b$

f) $f(x) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{1}{b-a} \cdot x - \frac{a}{b-a}$ und $f(x) = \frac{x-b}{a-b} = -\frac{1}{b-a} \cdot x + \frac{b}{b-a}$

g) $f(x) = \frac{x-a}{b-a} \cdot (d-c) + c$ und $f(x) = \frac{b-x}{b-a} \cdot (d-c) + c$

Teilaufgabe g) kann wie folgt gelöst werden bzw. das Ergebnis kann wie folgt verstanden werden:

(1) Intervall verschieben: Definiere $f_1(x) = x - a$. Diese Funktion bildet das Intervall $[a, b]$ auf das Intervall $[0, b-a]$ ab.

(2) Das verschobene Intervall $[0, b-a]$ verkleinert man auf das Intervall $[0, 1]$, indem man durch seine Länge dividiert, also $f_2(x) = \frac{f_1(x)}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$. Damit bildet man das ursprüngliche Intervall auf das Intervall $[0, 1]$ ab.

(3) Man vergrössert das Intervall $[0, 1]$ auf die endgültige Länge durch Multiplikation mit $(d-c)$, also $f_3(x) = \frac{x-a}{b-a} \cdot (d-c)$. Damit bildet man das ursprüngliche Intervall auf das Intervall $[0, d-c]$ ab.

(4) Am Schluss verschiebt man durch Addition von c an die endgültige Lage: $f_4(x) = f(x) = \frac{x-a}{b-a} \cdot (d-c) + c$.

Die zweite Lösung erhält man fast die gleiche Weise: Im ersten Schritt verwendet man die Funktion $f_1(x) = b - x$. Dabei wird pe «$-x$» das Intervall $[a, b]$ «umgedreht» auf das Intervall $[-b, -a]$ abgebildet, dann wird letzteres per «$+b$» auf $[0, b-a]$ abgebildet.

Lösung zu Aufgabe A20 ex-rechtwinklige-geraden

a) dem Leser überlassen

b) $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

c) Für eine Gerade mit Steigung $\frac{4}{3}$ kann ein Stützdreieck mit Katheten $\Delta x = 3$ und $\Delta y = 4$ gezeichnet werden. Dieses Dreieck wird um 90 Grad gedreht. Das neue Stützdreieck der Senkrechten hat die Katheten vertauscht, wobei eine noch das Vorzeichen wechselt. Die neue Steigung ist also $-\frac{3}{4}$.