8 Gleichungen

8.1 Aufstellen und Lösen von Gleichungen: Einführung an einem Beispiel

Aufgabe A1 In einer Prüfung gibt der Lehrer für 0 Punkte die Note 1 und für jeden weiteren Punkt 0.3 Notenpunkte. Mit welcher Punktzahl bekommt man die Note 4?

8.1.1 (Lösung von Aufgabe A1).

(1) Benennen der Variablen/Unbekannten: ✎Schreibe x für die Punktzahl.

(2) Übersetzen der Textinformation: ✎Mit x Punkten erhält man die Note $1 + 0.3x$.

(3) Aufstellen der Gleichung: ✎Gesucht ist x mit $1 + 0.3x = 4$.

(4) Lösen/Auflösen der Gleichung. Man tut so, als ob die Gleichung gilt, und versucht, die Gleichung so umzuformen, dass am Ende $\boxed{x = (\text{Term ohne } x)}$ dasteht. ✎

$$\begin{aligned} 1 + 0.3x &= 4 && \mid -1 \\ 0.3x &= 3 && \mid : 0.3 \text{ gleich } : \frac{3}{10} \text{ gleich } \cdot \frac{10}{3} \\ x &= 10 \end{aligned}$$

(5) Antwort: ✎Mit $x = 10$ Punkten erhält man die Note 4.

(6) Probe (empfohlen): ✎$10 \cdot 0.3 + 1 \stackrel{?}{=} 4$. Das stimmt!

8.2 Gleichungen, Lösungen, Lösungsmengen

Definition 8.2.1 Gleichung, Lösung einer Gleichung, Lösungsmenge

Eine **Gleichung** ist ein Ausdruck aus zwei Termen, zwischen die man ein Gleichheitszeichen schreibt:

$$T = S$$

Man nennt den Term T die **linke Seite** und den Term S die **rechte Seite** der Gleichung.
In den Termen dürfen Variablen vorkommen. Ersetzt man diese Variablen durch konkrete Zahlen, so wird die Gleichung wahr (d. h. sie stimmt) oder falsch (d. h. sie stimmt nicht).
Jede Belegung der Variablen, für die die Gleichung wahr wird, heisst **Lösung der Gleichung**.
Die Menge aller Lösungen einer Gleichung heisst **Lösungsmenge** und wird oft als $\mathbb{L}$ notiert.

Beispiele 8.2.2.

(a) Gleichungen ohne Variablen.
- Die Gleichung $6 \cdot 7 = 42$ ist wahr.
- Die Gleichung $1 = 0$ ist falsch.

(b) Gleichungen in einer Variablen.
- Immer wahr: $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ist wahr für alle x. Jede reelle Zahl ist eine Lösung der Gleichung. Lösungsmenge ✎$\mathbb{L} = \mathbb{R}$
- Immer falsch: $x + 1 = x$ ist falsch für alle x. Die Gleichung hat keine Lösung. Lösungsmenge ✎$\mathbb{L} = \varnothing = \{\}$
- Die Gleichung $x^2 = -1$ ist falsch für alle $x \in \mathbb{R}$ (da Quadrate reeller Zahlen stets ≥ 0 sind), hat also keine Lösung: Lösungsmenge ✎$\mathbb{L} = \varnothing = \{\}$

  Sie hat aber genau zwei komplexe Lösungen, nämlich $x = i$ und $x = -i$, d. h. $\mathbb{L} = \{\pm i\}$.
- Nur für gewisse Belegungen der Variablen wahr: $2x + 3 = 6$ ist genau dann wahr, wenn $x = \frac{3}{2}$. Die Gleichung hat also genau eine Lösung, nämlich $x = \frac{3}{2}$. Also ✎$\mathbb{L} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

(c) Gleichungen in mehr als einer Variablen:
   - Die Gleichung $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ist stets wahr (dritte binomische Formel). Jedes Paar (a, b) reeller Zahlen ist eine Lösung, d.h. ✎$\mathbb{L} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
   - Die Gleichung $x^2 + y^2 = -1$ hat keine reellen Lösungen (da Quadrate reeller Zahlen stets ≥ 0 sind), also ✎$\mathbb{L} = \varnothing$
     Sie hat aber unendlich viele komplexe Lösungen, etwa $(x, y) = (i, 0)$ oder $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} i, \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$.
   - Die Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ ist genau dann wahr, wenn $x^2 = 0$ und $y^2 = 0$ gelten, d. h. wenn $x = y = 0$ gilt, d. h. das Paar $(x, y) = (0, 0)$ ist die einzige Lösung: Lösungsmenge ✎$\mathbb{L} = \{(0, 0)\}$

Konvention 8.2.3. Mit einer *Gleichung* meinen wir in diesem Kapitel eine $\boxed{\textit{Gleichung in einer Variablen}}$. Die Variable heisst meist x.

Definition 8.2.4 Grundmenge

Oft ist man beim Lösen einer Gleichung nur an Lösungen in einer gegebenen Menge interessiert.
Diese sogenannte **Grundmenge** wird oft als $\mathbb{G}$ notiert.
Im Prinzip sollte man diese Grundmenge stets angeben, jedoch geschieht dies eher selten.
Ist die Grundmenge nicht angegeben, so ist mit $\mathbb{G}$ in der Regel die grösste Teilmenge von $\mathbb{R}$ gemeint, für die beide Seiten der Gleichung definiert sind.

Beispiele 8.2.5.
- Wenn in einem physikalischen Problem die Variable x in einer Gleichung für die Masse eines Körpers steht, so ist man nur an Lösungen $x \geq 0$ interessiert, d. h. man sucht nur Lösungen in der Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{R}_0^+$. (ausser in gewissen Bereichen der theoretischen Physik)
- Bei einer Gleichung wie $2x + 3 = 6$ ist die Grundmenge $\mathbb{G} =$✎$\mathbb{R}$, denn auf beiden Seiten darf man beliebige reelle Zahlen einsetzen.
- Bei einer Gleichung wie $\frac{1}{x+1} = 6$ ist die Grundmenge $\mathbb{G} =$✎$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, denn für $x = -1$ ist die linke Seite nicht definiert. Einzige Lösung ist $x = -\frac{5}{6}$.
- Bei einer Gleichung wie $6 = \sqrt{x+2}$ ist die Grundmenge $\mathbb{G} =$✎$[-2, \infty)$, denn die rechte Seite ist nur für $x \geq -2$ definiert. Einzige Lösung ist $x = 34$.

Beispiele 8.2.6. Betrachte die Gleichung $x^2 = 2$.
- Fall $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$: ✎D.h. nur ganzzahlige Lösungen gesucht, also $\mathbb{L} = \varnothing$
- Fall $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$: ✎D.h. nur rationale Lösungen gesucht, also $\mathbb{L} = \varnothing$
- Fall $\mathbb{G} = \mathbb{R}$: ✎D.h. nur reelle Lösungen gesucht, also $\mathbb{L} = \{\pm\sqrt{2}\}$

8.3 Umformen von Gleichungen

8.3.1 (Allgemeine Strategie zum Lösen von Gleichungen)**.** Um die Lösungen einer Gleichung zu bestimmen, versucht man, die Variable mit Hilfe von Umformungen («mit beiden Seiten der Gleichung dasselbe machen») zu isolieren.

Definition 8.3.2 Umformungen von Gleichungen

Eine **Umformung** einer Gleichung ist das Anwenden *derselben «Operation»* auf beide Seiten der Gleichung. Wenn man zum Beispiel die Operation «addiere 7» auf beide Seiten anwendet, so schreibt man dies wie folgt:

✎
$$\begin{aligned} & T = S && \mid \quad +7 \\ \Longrightarrow \quad & T + 7 = S + 7 \end{aligned}$$

Rechts des «Kommandostrichs» deutet man an, welche Umformung durchgeführt wird.
Der Implikationspfeil/Folgerungspfeil $\Longrightarrow$ deutet an, dass aus der Gültigkeit der oberen Gleichung die Gültigkeit der unteren Gleichung folgt (für fixierte Variablenbelegungen).
Kommandostrich mit Angabe der Operation und Implikationspfeil werden nicht immer geschrieben.

Merke 8.3.3

Beim (korrekten!) Umformen von Gleichungen bleibt die Lösungsmenge gleich oder wird grösser.

Grund: Macht man mit Gleichem Gleiches, so kommt Gleiches heraus. (Dabei muss die Grundmenge beibehalten werden.)

Beispiele 8.3.4. Die folgenden Umformungen sind «ziemlich dumm», d. h. man würde sie in der Praxis hoffentlich nie durchführen. Sie illustrieren aber gut, dass die Lösungsmenge grösser werden kann.

(a) $x = 3$ ✎| $(\cdot)^2$ d.h. quadriere — $x = 3$ einzige Lösung

$x^2 = 9$ — genau zwei Lösungen $x = \pm 3$

Keine Äquivalenzumformung! (im Sinne der folgenden Definition)

(b) $x - 2 = 0$ $\mid \cdot (x+2)$ — $x = 2$ einzige Lösung

$(x-2)(x+2) = 0$ — genau zwei Lösungen $x = \pm 2$

Keine Äquivalenzumformung! (im Sinne der folgenden Definition)

(c) $x - 2 = 0$ $\mid \cdot 0$ — $x = 2$ einzige Lösung

$0 = 0$ — Lösungsmenge $\mathbb{L} = \mathbb{R}$

Keine Äquivalenzumformung! (im Sinne der folgenden Definition)

Definition 8.3.5

Eine Umformung einer Gleichung heisst **Äquivalenzumformung**, wenn sie die Lösungsmenge *nicht verändert*, d. h. wenn die Gleichung und die umgeformte Gleichung dieselbe Lösungsmenge haben.
Äquivalenzumformungen werden oft mit einem «Genau-dann-wenn-Pfeil» $\iff$ notiert.

Die beiden Gleichungen sind also in dem Sinne äquivalent (= gleichwertig), dass sie dieselbe Lösungsmenge haben.

Merke 8.3.6

Wenn man beim Lösen einer Gleichung durch Umformungen ausschliesslich Äquivalenzumformungen verwendet, so muss man am Ende keine Probe durchführen (es ist aber trotzdem empfohlen).
Verwendet man ein **einziges Mal** eine Umformung, bei der man nicht sicher ist, ob es sich um eine Äquivalenzumformung handelt, so **muss man eine Probe durchführen**.

Merke 8.3.7

Die wichtigsten Äquivalenzumformungen sind:

(a) Addition *desselben* Terms auf beiden Seiten:

$$\begin{aligned} & T_1 = T_2 && \mid +S \\ \iff & T_1 + S = T_2 + S \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge wird nicht verändert, denn man kann diese Umformung rückgängig machen: Subtrahiere S auf beiden Seiten.

(b) Multiplikation beider Seiten mit *demselben*, **von Null verschiedenen** Term (meist einer Zahl):

$$\begin{aligned} & T_1 = T_2 && \mid \cdot S \\ \iff & T_1 \cdot S = T_2 \cdot S \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge wird nicht verändert, denn man kann diese Umformung rückgängig machen: Dividiere beide Seiten durch S. Dies ist wegen $S \neq 0$ erlaubt.

(c) Subtraktion und Division: Analog darf man denselben Term S auf beiden Seiten abziehen bzw. beide Seiten durch denselben Term $S \neq 0$ dividieren.

Beachte: Die Variable darf beide Male im Term S vorkommen; beim Multiplizieren muss man jedoch sicherstellen, dass S für kein $x \in \mathbb{G}$ Null wird (sonst muss man mit Fallunterscheidungen arbeiten, siehe später).

8.3.8. Wir betrachten nun den «einfachsten» Typ von Gleichungen, nämlich *lineare Gleichungen*. Diese haben den Vorteil, dass man sie stets mit den beiden gerade angegebenen Äquivalenzumformungen lösen kann.

 Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

8.4 Lineare Gleichungen

Definition 8.4.1 Lineare Gleichung

Eine **lineare Gleichung** ist eine Gleichung, die man *durch Äquivalenzumformungen* auf die Form

$$\boxed{ax = b} \qquad \text{für geeignete reelle Zahlen } a,\, b \in \mathbb{R}$$

bringen kann («Standardform»).
Gleichbedeutend kann man die Form $ax + b = 0$ verlangen, d.h. «lineares Polynom gleich Null».

Beispiel 8.4.2. Die am Anfang dieses Kapitels betrachtete «Noten-Gleichung» $1 + 0.3x = 4$ ist linear, denn wir haben sie mit Äquivalenzumformungen zu $0.3x = 3$ umgeformt.

Beispiele 8.4.3. Die folgende Gleichung sieht auf den ersten Blick nicht linear aus, ist es aber doch: ✎

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 &= (x+2)\cdot(x-2) & & \\
x^2 - 2x + 1 &= x^2 - 4 & &\mid -x^2 \\
-2x + 1 &= -4 & &\mid -1 \\
-2x &= -5 & &\mid :(-2) \qquad \text{also Gleichung linear} \\
x &= \frac{5}{2} & & \qquad \text{einzige Lösung}
\end{aligned}$$

Aufgabe A2 Welche Zahl hat jeweils die angegebene Eigenschaft? Gute Übung: Aufgaben im Kopf lösen!

(a) Ihr Fünffaches ist um 36 kleiner als ihr Achtfaches.
(b) Vergrössert man sie um ihr Drittel, so erhält man 52. (*Vergrössern* meint *Vergrössern durch Addition.*)
(c) Subtrahiert man ihr Sechsfaches von 360, so erhält man gleich viel, wie wenn man ihr Vierfaches von 280 subtrahiert.
(d) Ihr siebter Teil ist um 2 kleiner als ihre Gegenzahl.

Aufgabe A3 Fügt man auf beiden Seiten einer zweistelligen (natürlichen) Zahl die Ziffer 5 hinzu, so erhält man das 75-fache der Zahl. Welche Zahl ist es?

Aufgabe A4 Vierzig Personen unternehmen einen Ausflug mit den SBB. Erwachsene bezahlen für das Ticket je 30 Franken, Kinder jeweils die Hälfte. Die SBB nehmen 1080 Franken ein. Wie viele Kinder nehmen an der Reise teil?

Aufgabe A5 «Meine Tante», sagt Simone, «ist jetzt 5-mal so alt wie ich. In 7 Jahren wird sie nur noch 3-mal so alt sein wie ich dann alt sein werde. Wie alt bin ich heute?»

Aufgabe A6 Lösen Sie jeweils nach x auf (dabei werden Sie feststellen, dass die Gleichung linear ist).

a) $\frac{4x-5}{3} - \frac{2x-3}{6} = \frac{x}{2} - 1$ b) $4x(x-1) = (2x-1)^2 - 1$ c) $\frac{8x-3}{8} - \frac{8+3x}{3} = 0$

Satz 8.4.4

Jede lineare Gleichung hat entweder **genau eine** Lösung, **keine** Lösung oder **unendlich viele** Lösungen.
Für die allgemeine lineare Gleichung $ax = b$ (in Standardform) geben die drei Zeilen der folgenden Tabelle alle möglichen Fälle an. eventuell Beispiele angeben; Beweis offensichtlich (Entscheidungsbaum zeichnen?)

erster Fall: $a \neq 0$ und b beliebig	$a \cdot x = b$	✎ $x = \frac{b}{a}$ einzige Lösung	$\mathbb{L} = \{\frac{b}{a}\}$
zweiter Fall: $a = 0$ und $b \neq 0$	$0 \cdot x = b$	✎ keine Lösung	$\mathbb{L} = \{\} = \varnothing$
dritter Fall: $a = 0$ und $b = 0$	$0 \cdot x = 0$	✎ jede Zahl ist Lösung	$\mathbb{L} = \mathbb{G} = \mathbb{R}$

8.5 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 1 ex-note

Lösung zu Aufgabe 2 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-124
(bitte melden, falls ausführliche Lösung gewünscht)

a) 12 b) 39 c) 40 d) $-1,75 = -\frac{7}{4}$

(4)

Lösung zu Aufgabe 3 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-127
77
(bitte melden, falls ausführliche Lösung gewünscht)

Lösung zu Aufgabe 4 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-132
8
(bitte melden, falls ausführliche Lösung gewünscht)

Lösung zu Aufgabe 5 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-138
Simones Alter heute: x (gemessen in der Einheit Jahre). In 7 Jahren: $x + 7$.

Alter Simones Tante heute: $5x$. In 7 Jahren: $5x + 7$.

$$\begin{aligned}
3(x+7) &= 5x+7 \\
3x+21 &= 5x+7 && \mid -3x-7 \\
14 &= 2x && \mid :2 \\
7 &= x
\end{aligned}$$

Simone ist heute 7 Jahre alt.

Lösung zu Aufgabe 6 ex-komplexere-lineare-gleichungen

a)
$$\begin{aligned}
\frac{4x-5}{3} - \frac{2x-3}{6} &= \frac{x}{2} - 1 && \mid \cdot 6 \\
2(4x-5) - (2x-3) &= 3x-6 \\
8x - 10 - 2x + 3 &= 3x - 6 \\
6x - 7 &= 3x - 6 && \mid -3x+7 \\
3x &= 1 && \mid :3 \\
x &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 4x(x-1) &= (2x-1)^2 - 1 \\ 4x^2 - 4x &= 4x^2 - 4x + 1 - 1 && | - 4x^2 + 4x \\ 0 &= 0 \\ \text{Also } \mathbb{L} &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{8x-3}{8} - \frac{8+3x}{3} &= 0 && | \cdot 24 \\ 3(8x-3) - 8(8+3x) &= 0 \\ 24x - 9 - (64 + 24x) &= 0 \\ 24x - 9 - 64 - 24x &= 0 \\ -73 &= 0 \\ \text{Also } \mathbb{L} &= \varnothing \end{aligned}$$