8 Gleichungen

8.1 Aufstellen und Lösen von Gleichungen: Einführung an einem Beispiel

Aufgabe A1 In einer Prüfung gibt der Lehrer für 0 Punkte die Note 1 und für jeden weiteren Punkt 0.3 Notenpunkte. Mit welcher Punktzahl bekommt man die Note 4?

8.1.1 (Lösung von Aufgabe A1).

(1) Benennen der Variablen/Unbekannten: ✎Schreibe x für die Punktzahl.

(2) Übersetzen der Textinformation: ✎Mit x Punkten erhält man die Note $1 + 0.3x$.

(3) Aufstellen der Gleichung: ✎Gesucht ist x mit $1 + 0.3x = 4$.

(4) Lösen/Auflösen der Gleichung (nach x); «x isolieren»: Man tut so, als ob die Gleichung gilt, und versucht, die Gleichung so umzuformen, dass am Ende $\boxed{x = \text{(Term ohne } x)}$ dasteht. ✎

$$\begin{aligned} 1 + 0.3x &= 4 && \mid -1 \\ 0.3x &= 3 && \mid : 0.3 \text{ bzw. } : \frac{3}{10} \text{ bzw. } \cdot \frac{10}{3} \\ x &= 10 \end{aligned}$$

(5) Antwort: ✎Mit $x = 10$ Punkten erhält man die Note 4.

(6) Probe (empfohlen): ✎$10 \cdot 0.3 + 1 \stackrel{?}{=} 4$. Das stimmt!

8.2 Gleichungen, Lösungen, Lösungsmengen

Definition 8.2.1 Gleichung, Lösung einer Gleichung, Lösungsmenge

Eine **Gleichung** ist ein Ausdruck aus zwei Termen, zwischen denen ein Gleichheitszeichen steht:

$$T_1 = T_2$$

Man nennt den Term T_1 die **linke Seite** und den Term T_2 die **rechte Seite** der Gleichung.
In den Termen dürfen Variablen vorkommen. Ersetzt man diese Variablen durch konkrete Zahlen, so wird die Gleichung wahr (d. h. sie stimmt) oder falsch (d. h. sie stimmt nicht).
Jede Belegung der Variablen, für die die Gleichung wahr wird, heisst **Lösung der Gleichung**.
Die Menge aller Lösungen einer Gleichung heisst **Lösungsmenge** und wird oft als $\mathbb{L}$ notiert.

Beispiele 8.2.2.

(a) Gleichungen ohne Variablen.
- Die Gleichung $6 \cdot 7 = 42$ ist wahr.
- Die Gleichung $1 = 0$ ist falsch.

(b) Gleichungen in einer Variablen.
- Immer wahr: $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ wahr. Jede reelle Zahl ist eine Lösung der Gleichung. Lösungsmenge ✎$\mathbb{L} = \mathbb{R}$
- Immer falsch: $x + 1 = x$ ist falsch für alle x. Die Gleichung hat keine Lösung. Lösungsmenge ✎$\mathbb{L} = \varnothing = \{\}$
- Die Gleichung $x^2 = -1$ ist falsch für alle $x \in \mathbb{R}$ (da Quadrate reeller Zahlen stets ≥ 0 sind), hat also keine Lösung: Lösungsmenge ✎$\mathbb{L} = \varnothing = \{\}$

  Sie hat aber genau zwei komplexe Lösungen, nämlich $x = i$ und $x = -i$, d. h. $\mathbb{L} = \{\pm i\}$.
- Nur für gewisse Belegungen der Variablen wahr: $2x + 3 = 6$ ist genau dann wahr, wenn $x = \frac{3}{2}$. Die Gleichung hat also genau eine Lösung, nämlich $x = \frac{3}{2}$. Also ✎$\mathbb{L} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

(c) Gleichungen in mehr als einer Variablen:

- Die Gleichung $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ist stets wahr (dritte binomische Formel). Jedes Paar (a, b) reeller Zahlen ist eine Lösung, d.h. ✎$\mathbb{L} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ = Menge aller Paare reeller Zahlen
- Die Gleichung $x^2 + y^2 = -1$ hat keine reellen Lösungen (da Quadrate reeller Zahlen stets ≥ 0 sind), also ✎$\mathbb{L} = \varnothing$ Sie hat aber unendlich viele komplexe Lösungen, etwa $(x, y) = (i, 0)$ oder $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} i, \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$.
- Die Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ ist genau dann wahr, wenn $x^2 = 0$ und $y^2 = 0$ gelten, d. h. wenn $x = y = 0$ gilt, d. h. das Paar $(x, y) = (0, 0)$ ist die einzige Lösung: Lösungsmenge ✎$\mathbb{L} = \{(0, 0)\}$

Konvention 8.2.3. Mit einer *Gleichung* meinen wir in diesem Kapitel eine $\boxed{\textit{Gleichung in einer Variablen}}$. Die Variable heisst meist x.

Definition 8.2.4 Grundmenge

Oft ist man beim Lösen einer Gleichung nur an Lösungen in einer gegebenen Menge interessiert.
Diese sogenannte **Grundmenge** wird oft als $\mathbb{G}$ notiert.
Im Prinzip sollte man diese Grundmenge stets angeben, jedoch geschieht dies eher selten.
Ist die Grundmenge nicht angegeben, so ist mit $\mathbb{G}$ in der Regel die grösste Teilmenge von $\mathbb{R}$ gemeint, für die beide Seiten der Gleichung definiert sind. Abstrakt: $\mathbb{G}$ ist der Schnitt der maximalen Definitionsmengen beider Seiten.

Beispiele 8.2.5.

- Wenn in einem physikalischen Problem die Variable x in einer Gleichung für die Masse eines Körpers steht, so ist man nur an Lösungen $x \geq 0$ interessiert, d. h. man sucht nur Lösungen in der Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{R}_0^+$. (ausser in gewissen Bereichen der theoretischen Physik)
- Bei einer Gleichung wie $2x + 3 = 6$ ist die Grundmenge $\mathbb{G} =$✎$\mathbb{R}$, denn auf beiden Seiten darf man beliebige reelle Zahlen einsetzen.
- Bei einer Gleichung wie $\frac{1}{x+1} = 6$ ist die Grundmenge $\mathbb{G} =$✎$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, denn für $x = -1$ ist die linke Seite nicht definiert. Einzige Lösung ist $x = -\frac{5}{6}$.
- Bei einer Gleichung wie $6 = \sqrt{x+2}$ ist die Grundmenge $\mathbb{G} =$✎$[-2, \infty)$, denn die rechte Seite ist nur für $x \geq -2$ definiert. Einzige Lösung ist $x = 34$.

Beispiele 8.2.6. Betrachte die Gleichung $x^2 = 2$.

- Fall $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$: ✎D.h. nur ganzzahlige Lösungen gesucht, also $\mathbb{L} = \varnothing$
- Fall $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$: ✎D.h. nur rationale Lösungen gesucht, also $\mathbb{L} = \varnothing$
- Fall $\mathbb{G} = \mathbb{R}$: ✎D.h. nur reelle Lösungen gesucht, also $\mathbb{L} = \{\pm\sqrt{2}\}$

8.3 Umformen von Gleichungen

8.3.1 (Allgemeine Strategie zum Lösen von Gleichungen)**.** Um die Lösungen einer Gleichung zu bestimmen, versucht man, die Variable mit Hilfe von Umformungen («mit beiden Seiten der Gleichung dasselbe machen») zu isolieren.

Definition 8.3.2 Umformungen von Gleichungen

Eine **Umformung** einer Gleichung ist das Anwenden *derselben «Operation»* auf beide Seiten der Gleichung. Wenn man zum Beispiel die Operation «addiere 7» auf beide Seiten anwendet, so schreibt man dies wie folgt:

✎
$$\begin{array}{rrcll} & T &=& S & \mid +7 \\ \Longrightarrow & T+7 &=& S+7 & \end{array}$$

Rechts des «Kommandostrichs» deutet man an, welche Umformung durchgeführt wird.
Der Implikationspfeil/Folgerungspfeil $\Longrightarrow$ deutet an, dass aus der Gültigkeit der oberen Gleichung die Gültigkeit der unteren Gleichung folgt (für fixierte Variablenbelegungen).
Kommandostrich mit Angabe der Operation und Implikationspfeil werden nicht immer geschrieben.

Merke 8.3.3

Beim (korrekten!) Umformen von Gleichungen bleibt die Lösungsmenge gleich oder wird grösser.

Grund: Macht man mit Gleichem Gleiches, so kommt Gleiches heraus. (Annahme dabei: Die Grundmenge wird beibehalten.)

Beispiele 8.3.4. Die folgenden Umformungen sind «ziemlich dumm», d. h. man würde sie in der Praxis hoffentlich nie durchführen. Sie illustrieren aber gut, dass die Lösungsmenge grösser werden kann.

(a)
$$\begin{aligned} & x = 3 && \vert\ (\cdot)^2 \text{ d.h. quadriere} && x = 3 \text{ einzige Lösung} \\ \Longrightarrow\quad & x^2 = 9 && && \text{genau zwei Lösungen } x = \pm 3 \end{aligned}$$

Keine Äquivalenzumformung! (im Sinne der folgenden Definition)

(b)
$$\begin{aligned} & x - 2 = 0 && \vert \cdot (x+2) && x = 2 \text{ einzige Lösung} \\ \Longrightarrow\quad & (x-2)(x+2) = 0 && && \text{genau zwei Lösungen } x = \pm 2 \end{aligned}$$

Keine Äquivalenzumformung! (im Sinne der folgenden Definition)

(c)
$$\begin{aligned} & x - 2 = 0 && \vert \cdot 0 && x = 2 \text{ einzige Lösung} \\ \Longrightarrow\quad & 0 = 0 && && \text{Lösungsmenge } \mathbb{L} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

Keine Äquivalenzumformung! (im Sinne der folgenden Definition)

Definition 8.3.5

Eine Umformung einer Gleichung heisst **Äquivalenzumformung**, wenn sie die Lösungsmenge *nicht verändert*, d. h. wenn die Gleichung und die umgeformte Gleichung dieselbe Lösungsmenge haben.
Äquivalenzumformungen werden oft mit einem «Genau-dann-wenn-Pfeil» $\Longleftrightarrow$ notiert.

Die beiden Gleichungen sind also in dem Sinne äquivalent (= gleichwertig), dass sie dieselbe Lösungsmenge haben.

Merke 8.3.6

Wenn man beim Lösen einer Gleichung durch Umformungen ausschliesslich Äquivalenzumformungen verwendet, so muss man am Ende keine Probe durchführen (es ist aber trotzdem empfohlen).
Verwendet man ein **einziges Mal** eine Umformung, bei der man nicht sicher ist, ob es sich um eine Äquivalenzumformung handelt, so **muss man eine Probe durchführen**.

Merke 8.3.7

Die wichtigsten Äquivalenzumformungen sind:

(a) Addition *desselben* Terms auf beiden Seiten:

$$\begin{aligned} & T_1 = T_2 && \vert \quad + S \\ \Longleftrightarrow\quad & T_1 + S = T_2 + S \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge wird nicht verändert, denn man kann diese Umformung rückgängig machen: Subtrahiere S auf beiden Seiten.

(b) Multiplikation beider Seiten mit *demselben*, **von Null verschiedenen** Term (meist einer Zahl):

$$\begin{aligned} & T_1 = T_2 && \vert \quad \cdot S \\ \Longleftrightarrow\quad & T_1 \cdot S = T_2 \cdot S \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge wird nicht verändert, denn man kann diese Umformung rückgängig machen: Dividiere beide Seiten durch S. Dies ist wegen $S \neq 0$ erlaubt.

(c) Subtraktion und Division: Analog darf man denselben Term S auf beiden Seiten abziehen bzw. beide Seiten durch denselben Term $S \neq 0$ dividieren.

Beachte: Die Variable darf beide Male im Term S vorkommen; beim Multiplizieren muss man jedoch sicherstellen, dass S für kein $x \in \mathbb{G}$ Null wird (sonst muss man mit Fallunterscheidungen arbeiten, siehe später).

8.3.8. Wir betrachten nun den «einfachsten» Typ von Gleichungen, nämlich *lineare Gleichungen*. Diese haben den Vorteil, dass man sie stets mit den beiden gerade angegebenen Äquivalenzumformungen lösen kann.

8.4 Lineare Gleichungen

Definition 8.4.1 Lineare Gleichung

Eine **lineare Gleichung** ist eine Gleichung, die man *durch Äquivalenzumformungen* auf die Form

$$\boxed{ax = b} \qquad \text{für geeignete reelle Zahlen } a,\, b \in \mathbb{R}$$

bringen kann («Standardform einer linearen Gleichung») und die Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ ist.
Gleichbedeutend kann man die Form $ax + b = 0$ verlangen, d.h. «lineares Polynom gleich Null».
Grob gesagt: Kommt die Variable in einer Gleichung nur in der ersten Potenz vor, so handelt es sich um eine lineare Gleichung. Jede Gleichung, bei der beide Seiten Polynome vom Grad kleiner-gleich Eins sind, ist linear.

Beispiel 8.4.2. Die am Anfang dieses Kapitels betrachtete «Noten-Gleichung» $1 + 0.3x = 4$ ist linear (die linke Seite ist ein Polynom vom Grad 1, die rechte Seite ein Polynom vom Grad Null), denn wir haben sie mit Äquivalenzumformungen zu $0.3x = 3$ gebracht.

Beispiele 8.4.3. Die folgende Gleichung sieht auf den ersten Blick nicht linear aus, ist es aber doch: ✎

$$\begin{aligned}
& (x-1)^2 = (x+2)\cdot(x-2) - 4x & & \\
\iff\quad & x^2 - 2x + 1 = x^2 - 4 - 4x & & \mid -x^2 \\
\iff\quad & -2x + 1 = -4 - 4x & & \mid -1 + 4x \qquad x \text{ kommt nur in erster Potenz vor} \\
\iff\quad & 2x = -5 & & \mid : (-2) \text{ bzw. } \cdot \frac{1}{2} \qquad \text{also Gleichung linear} \\
\iff\quad & x = -\frac{5}{2} & & \qquad \text{einzige Lösung}
\end{aligned}$$

Lösungsstrategie 8.4.4 für lineare Gleichungen, «Variable isolieren»

(1) Beide Seiten vereinfachen. In der Regel sind beide Seiten Polynome. Dann bringt man diese auf Standardform (per Ausmultiplizieren, Zusammenfassen, Ordnen). Das Ordnen lässt man oft weg.

(2) Alle Terme mit x auf eine Seite bringen und zusammenfassen, alle anderen Terme/Zahlen auf die andere Seite und zusammenfassen, so dass die Gleichung die Form $ax = b$ hat.

(3) Durch den Koeffizienten bei x dividieren, falls dieser nicht Null ist.

Aufgabe A2 Welche Zahl hat jeweils die angegebene Eigenschaft? Gute Übung: Aufgaben im Kopf lösen!

(a) Ihr Fünffaches ist um 36 kleiner als ihr Achtfaches.
(b) Vergrössert man die Zahl um ein Drittel, so erhält man 52. (*Vergrössern = Vergrössern durch Addition.*)
(c) Subtrahiert man ihr Sechsfaches von 360, so erhält man gleich viel, wie wenn man ihr Vierfaches von 280 subtrahiert.
(d) Ihr siebter Teil ist um 2 kleiner als ihre Gegenzahl.

Aufgabe A3 Fügt man auf beiden Seiten einer zweistelligen (natürlichen) Zahl die Ziffer 5 hinzu, so erhält man das 75-fache der Zahl. Welche Zahl ist es?

Aufgabe A4 Vierzig Personen unternehmen einen Ausflug mit den SBB. Erwachsene bezahlen für das Ticket je 30 Franken, Kinder jeweils die Hälfte. Die SBB nehmen 1080 Franken ein. Wie viele Kinder nehmen an der Reise teil?

Aufgabe A5 «Meine Tante», sagt Simone, «ist jetzt 5-mal so alt wie ich. In 7 Jahren wird sie nur noch 3-mal so alt sein wie ich dann alt sein werde. Wie alt bin ich heute?»

Aufgabe A6 Lösen Sie jeweils nach x auf (dabei werden Sie feststellen, dass die Gleichung linear ist).

a) $\dfrac{4x-5}{3} - \dfrac{2x-3}{6} = \dfrac{x}{2} - 1$ b) $4x(x-1) = (2x-1)^2 - 1$ c) $\dfrac{8x-3}{8} - \dfrac{8+3x}{3} = 0$

Aufgabe A7 Bestimmen Sie eine zweistellige natürliche Zahl mit der folgenden Eigenschaft: Fügt man die Ziffer 3 einmal links und einmal rechts hinzu, so unterscheiden sich die beiden erhaltenen Zahlen um 333.

Aufgabe A8 Bitte melden, falls Prozentrechnung Probleme macht. Eigentlich ist es ganz einfach: Ersetze das „komische“ Zeichen % durch „Hundertstel“. Beispielsweise bedeutet 6 % einfach $6 \cdot \frac{1}{100} = \frac{6}{100} = 0{,}06$. Das Wort *Prozent* und das Zeichen % haben sich übrigens aus ialienisch *per cento* (etwa „von Hundert“) entwickelt, siehe etwa Wikipedia: Prozentzeichen.

Ein Teil eines Kapitals von 70 350 Franken ist mit Zinssatz 6 % angelegt, der Rest mit Zinssatz 5 %. Der Jahreszins des gesamten Kapitals beträgt 4 100 Franken. Wie gross sind die beiden Teile? (Taschenrechner erlaubt)

Aufgabe A9 Zu welcher Zeit (auf Hunderstelsekunden genau) zwischen 16 Uhr und 17 Uhr bilden die Zeiger einer Uhr einen rechten Winkel? (Taschenrechner «am Ende» erlaubt)

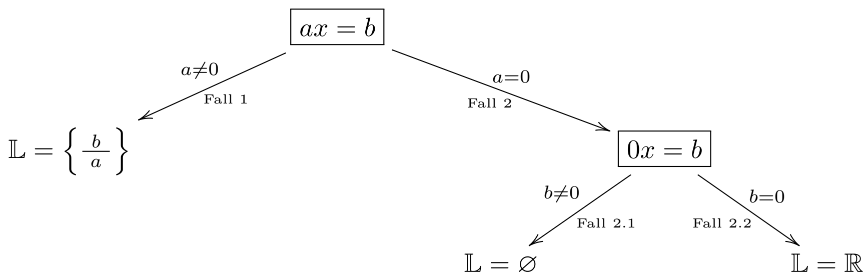
Aufgabe A10 Die Ortschaften A und B liegen 120 Bahnkilometer voneinander entfernt. Ein Zug verlässt A um 15.00 Uhr in Richtung B; seine mittlere Geschwindigkeit beträgt 72 km/h. Der Gegenzug verlässt B um 15.15 Uhr; seine mittlere Geschwindigkeit beträgt 88 km/h. Wann begegnen sich die beiden Züge?

Satz 8.4.5 Struktur der Lösungsmenge einer linearen Gleichung

Jede lineare Gleichung hat entweder **genau eine** Lösung, **keine** Lösung oder **unendlich viele** Lösungen. Für die allgemeine lineare Gleichung $ax = b$ (in Standardform) geben die drei Zeilen der folgenden Tabelle alle möglichen Fälle an. eventuell Beispiele angeben; Beweis klar per Entscheidungsbaum

Fall 1: $a \neq 0$ und b beliebig	$a \cdot x = b$	✎ $x = \frac{b}{a}$ einzige Lösung	$\mathbb{L} = \{\frac{b}{a}\}$
Fall 2.1: $a = 0$ und $b \neq 0$	$0 \cdot x = b$	✎ keine Lösung	$\mathbb{L} = \{\} = \varnothing$
Fall 2.2: $a = 0$ und $b = 0$	$0 \cdot x = 0$	✎ jede Zahl ist Lösung	$\mathbb{L} = \mathbb{G} = \mathbb{R}$

Als «Entscheidungsbaum», der die Fallunterscheidung illustriert:



8.5 Lineare Gleichungen mit Parametern

Aufgabe A11 In einer Prüfung verwendet der Lehrer die Notenformel $1 + 5 \cdot \frac{x}{30}$, wobei x die erreichte Punktzahl ist.

(a) Mit welcher Punktzahl bekommt man die Note 4?
(b) Mit welcher Punktzahl bekommt man die Note 5?
(c) Mit welcher Punktzahl bekommt man die Note 6?

8.5.1 (Lösung von Aufgabe A11). Naives Vorgehen:

(a) Löse die Gleichung $1 + 5 \cdot \frac{x}{30} = 4$ Standardrechnung führt zur Lösung: $x = 18$
(b) Löse die Gleichung $1 + 5 \cdot \frac{x}{30} = 5$ Lösung: $x = 24$
(c) Löse die Gleichung $1 + 5 \cdot \frac{x}{30} = 6$ Lösung: $x = 30$

Intelligenteres Vorgehen: Beobachtung: Die drei Gleichungen haben dieselbe «Bauart»/Struktur:

✎ $1 + 5 \cdot \frac{x}{30} = n$ wobei der sogenannte $\boxed{\text{Parameter}}$ n die gewünschte Note ist

Stellt man sich n als fixierte Zahl vor, so kann man diese Gleichung wie üblich lösen: ✎

$$
\begin{aligned}
& 1 + 5 \cdot \frac{x}{30} = n && \mid \cdot 30 \\
\iff\quad & 30 + 5 \cdot x = 30n && \mid -30 \\
\iff\quad & 5x = 30n - 30 && \mid : 5 \\
\iff\quad & x = \frac{30n - 30}{5} = \frac{30}{5} \cdot (n-1) = 6(n-1)
\end{aligned}
$$

Nun kann man für n konkrete Werte einsetzen und beispielsweise eine Tabelle erzeugen:

Note n	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
benötigte Punktzahl x	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30

Damit hat man die ursprüngliche Aufgabe (und diverse Variationen) «auf einmal» gelöst.

Begriffserklärung 8.5.2

Parameter sind zusätzliche Variablen (neben der «Lösungsvariablen» x), die dazu dienen, gewisse numerisch (noch) nicht bekannte oder bewusst nicht fixierte Grössen anzugeben, wie z.B. eine Geschwindigkeit oder einen Zinssatz.

Auch in einer Formel wie $A = \frac{1}{2} g \cdot h$ für den Flächeninhalt eines Dreiecks mit Grundseite g und zugehöriger Höhe h mag man g und h als Parameter ansehen.

Konvention 8.5.3. Wenn nicht anders erwähnt, bezeichnen Buchstaben wie x, y oder z die Unbekannten (= Lösungsvariablen, also die Variablen, nach denen wir Gleichungen auflösen wollen). Parameter werden meist mit Buchstaben wie a, b, c vom Anfang des Alphabets bezeichnet, aber auch mit p oder q.

Aufgabe A12 Ein Lehrer verwendet die Notenformel $1 + 5 \cdot \frac{x}{b}$, wobei x die Punktzahl ist und b die für die Note 6 nötige Punktzahl (denn für $x = b$ bekommt man die Note $1 + 5 \cdot \frac{b}{b} = 6$).

(a) Mit welcher Punktzahl bekommt man die Note 4, wenn $b = 100$ gilt?
(b) Mit welcher Punktzahl bekommt man die Note 5, wenn $b = 30$ gilt?
(c) Mit welcher Punktzahl bekommt man die Note 5.5, wenn $b = 20$ gilt?

Erwünschtes Vorgehen: Stellen Sie *eine* Gleichung mit 2 Parametern auf; diese Gleichung dann nach x auflösen und die angegebenen Werte einsetzen.

Lösungsstrategie 8.5.4 zum Lösen von in der Lösungsvariablen linearen Gleichungen mit Parameter(n)

- Vereinfache beide Seiten der Gleichung (etwa durch Ausmultiplizieren).
- Bringe alle Terme mit der Unbekannten x auf die linke Seite und alle übrigen Terme auf die rechte Seite (oder andersherum).
- Klammere x auf der linken Seite aus, so dass die Gleichung die Standardform $ax = b$ hat.
- Verwende die Fallunterscheidung aus Satz 8.4.5, d. h.
  - Fall 1: Im «Normalfall», dass der Koeffizient bei x nicht Null ist: Dividiere die Gleichung durch diesen Koeffizienten.
  - Fall 2: Im «Spezialfall», dass der Koeffizient bei x Null ist, unterscheide weiter die beiden Fälle
    - Fall 2.1: die rechte Seite ist nicht Null (keine Lösung);
    - Fall 2.2: die rechte Seite ist Null (jede Zahl ist Lösung).

8.6 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 1 ex-note

Lösung zu Aufgabe 2 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-124
(bitte melden, falls ausführliche Lösung gewünscht)

a) 12 b) 39 c) 40 d) $-1,75 = -\frac{7}{4}$

(4)

Lösung zu Aufgabe 3 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-127
77
(bitte melden, falls ausführliche Lösung gewünscht)

Lösung zu Aufgabe 4 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-132
8
(bitte melden, falls ausführliche Lösung gewünscht)

Lösung zu Aufgabe 5 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-138
Simones Alter heute: x (gemessen in der Einheit Jahre). In 7 Jahren: $x+7$.

Alter Simones Tante heute: $5x$. In 7 Jahren: $5x+7$.

$$\begin{aligned}
3(x+7) &= 5x+7 && \\
3x+21 &= 5x+7 && |-3x-7 \\
14 &= 2x && |:2 \\
7 &= x &&
\end{aligned}$$

Simone ist heute 7 Jahre alt.

Lösung zu Aufgabe 6 ex-komplexere-lineare-gleichungen

a)
$$\begin{aligned}
\frac{4x-5}{3} - \frac{2x-3}{6} &= \frac{x}{2} - 1 && |\cdot 6 \\
2(4x-5) - (2x-3) &= 3x-6 && \\
8x-10-2x+3 &= 3x-6 && \\
6x-7 &= 3x-6 && |-3x+7 \\
3x &= 1 && |:3 \\
x &= \frac{1}{3} &&
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 4x(x-1) &= (2x-1)^2 - 1 & \\ 4x^2 - 4x &= 4x^2 - 4x + 1 - 1 & \quad | -4x^2 + 4x \\ 0 &= 0 & \\ \text{Also } \mathbb{L} &= \mathbb{R} & \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{8x-3}{8} - \frac{8+3x}{3} &= 0 & \quad | \cdot 24 \\ 3(8x-3) - 8(8+3x) &= 0 & \\ 24x - 9 - (64 + 24x) &= 0 & \\ 24x - 9 - 64 - 24x &= 0 & \\ -73 &= 0 & \\ \text{Also } \mathbb{L} &= \varnothing & \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-128

Unbekannte Zahl: z, Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{N}$.

Ziffer 3 links hinzufügen ergibt: $300 + z$

Ziffer 3 rechts hinzufügen ergibt: $10z + 3$

Unterschied der Zahlen ist 333, also zwei Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} 300 + z - (10z + 3) &= 333 & \\ 297 - 9z &= 333 & \quad | -297 \\ -9z &= 36 & \quad | : (-9) \\ z &= -4 & \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \varnothing$ (da -4 nicht natürlich ist).

$$\begin{aligned} 10z + 3 - (300 + z) &= 333 & \\ 9z - 297 &= 333 & \quad | +297 \\ 9z &= 630 & \quad | : 9 \\ z &= 70 & \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \{70\}$. Da nur Äquivalenzumformungen durchgeführt wurden, ist keine Probe nötig. Um Rechenfehler zu entdecken, ist die Probe aber trotzdem sinnvoll: 703-370=333.

Lösung zu Aufgabe 8 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-144

Erster Teil des Kapitals in Frankeng: x [Franken]. Jahreszins davon: $0.06x$.

Zweiter Teil des Kapitals: $70350 - x$ [Franken]. Jahreszins davon $0.05(70350 - x)$.

$$\begin{aligned} 0.06x + 0.05(70350 - x) &= 4100 & \\ 0.01x + 3517.5 &= 4100 & \quad | -3517.5 \\ 0.01x &= 582.5 & \quad | : 0.01 \\ x &= 58250 & \end{aligned}$$

Der zu 6% verzinste Teil beträgt 58250 Franken, der zu 5% verzinste Teil 12100 Franken.

Lösung zu Aufgabe 9 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-163

Gesuchte in Uhrzeit in Minuten nach 16 Uhr: x [min]

Winkel des Minutenzeigers: $6x$ [°] (da eine Minute einem Winkel von $\frac{360}{60}^\circ = 6^\circ$ entspricht; Winkelweite ab Zeigerstellung senkrecht nach oben)

Winkel des Stundenzeigers: $120 + \frac{1}{2}x$ [°] (16 Uhr oder 4 Uhr entspricht 120°, pro Stunde 30°, also pro Minute 0.5°.)

Unterschied der Winkel muss 90 [°] sein. Es gibt also zwei Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} 6x-(120+\frac{1}{2}x) &= 90 \\ \frac{11}{2}x-120 &= 90 && \mid +120 \\ \frac{11}{2}x &= 210 && \mid : \frac{11}{2} \\ x &= \frac{420}{11} \approx 38.182 \end{aligned}$$

Der rechte Winkel entsteht ungefähr zur Zeit 16:38:10.91 (denn $\frac{420}{11} = 38 + \frac{2}{11}$ und $\frac{2}{11} \cdot 60 = 10.\overline{90}$).

$$\begin{aligned} 120+\frac{1}{2}x-6x &= 90 \\ -\frac{11}{2}x+120 &= 90 && \mid -90+\frac{11}{2}x \\ 30 &= \frac{11}{2}x && \mid : \frac{11}{2} \\ x &= \frac{60}{11} \approx 5.455 \end{aligned}$$

Der rechte Winkel entsteht ungefähr zur Zeit 16:05:27.27.

Lösung zu Aufgabe 10 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-165

Fahrzeit des Zugs A bis zur Begegnung: x [h]

Fahrzeit des Zugs B bis zur Begegnung: $x-\frac{1}{4}$ [h]

Zurückgelegte Strecke von A ($s = v \cdot t$): $72x$ [km]

Zurückgelegte Strecke von B ($s = v \cdot t$): $88\left(x-\frac{1}{4}\right)$ [km]

$$\begin{aligned} 72x+88\left(x-\frac{1}{4}\right) &= 120 \\ 160x-22 &= 120 && \mid +22 \\ 160x &= 142 && \mid : 160 \\ x &= 0.8875\,\mathrm{h} = 53.25\,\mathrm{min} \end{aligned}$$

Die Züge begegnen sich nach 53 Minuten und 15 Sekunden, also um 15:53 Uhr und 15 Sekunden.

Lösung zu Aufgabe 11 ex-note-parameter

Lösung zu Aufgabe 12 ex-note-zwei-parameter