 Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

8 Gleichungen

8.1 Aufstellen und Lösen von Gleichungen: Einführung an einem Beispiel

Aufgabe A1 In einer Prüfung gibt der Lehrer für 0 Punkte die Note 1 und für jeden weiteren Punkt 0.3 Notenpunkte. Mit welcher Punktzahl bekommt man die Note 4?

8.1.1 (Lösung von Aufgabe A1).

(1) Benennen der Variablen/Unbekannten: ✎Schreibe x für die Punktzahl.

(2) Übersetzen der Textinformation: ✎Mit x Punkten erhält man die Note $1 + 0.3x$.

(3) Aufstellen der Gleichung: ✎Gesucht ist x mit $1 + 0.3x = 4$.

(4) Lösen/Auflösen der Gleichung (nach x); «x isolieren»: Man tut so, als ob die Gleichung gilt, und versucht, die Gleichung so umzuformen, dass am Ende $\boxed{x = (\text{Term ohne } x)}$ dasteht. ✎

$$\begin{aligned} 1 + 0.3x &= 4 && \mid -1 \\ 0.3x &= 3 && \mid : 0.3 \text{ bzw. } : \frac{3}{10} \text{ bzw. } \cdot \frac{10}{3} \\ x &= 10 \end{aligned}$$

(5) Antwort: ✎Mit $x = 10$ Punkten erhält man die Note 4.

(6) Probe (empfohlen): ✎$10 \cdot 0.3 + 1 \overset{?}{=} 4$. Das stimmt!

8.2 Gleichungen, Lösungen, Lösungsmengen

Definition 8.2.1 Gleichung, Lösung einer Gleichung, Lösungsmenge

Eine **Gleichung** ist ein Ausdruck aus zwei Termen, zwischen denen ein Gleichheitszeichen steht:

$$T_1 = T_2$$

Man nennt den Term T_1 die **linke Seite** und den Term T_2 die **rechte Seite** der Gleichung.
In den Termen dürfen Variablen vorkommen. Ersetzt man diese Variablen durch konkrete Zahlen, so wird die Gleichung wahr (d. h. sie stimmt) oder falsch (d. h. sie stimmt nicht).
Jede Belegung der Variablen, für die die Gleichung wahr wird, heisst **Lösung der Gleichung**.
Die Menge aller Lösungen einer Gleichung heisst **Lösungsmenge** und wird oft als $\mathbb{L}$ notiert.

Beispiele 8.2.2.

(a) Gleichungen ohne Variablen.
- Die Gleichung $6 \cdot 7 = 42$ ist wahr.
- Die Gleichung $1 = 0$ ist falsch.

(b) Gleichungen in einer Variablen.
- Immer wahr: $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ wahr. Jede reelle Zahl ist eine Lösung der Gleichung. Lösungsmenge ✎$\mathbb{L} = \mathbb{R}$
- Immer falsch: $x + 1 = x$ ist falsch für alle x. Die Gleichung hat keine Lösung. Lösungsmenge ✎$\mathbb{L} = \varnothing = \{\}$
- Die Gleichung $x^2 = -1$ ist falsch für alle $x \in \mathbb{R}$ (da Quadrate reeller Zahlen stets ≥ 0 sind), hat also keine Lösung: Lösungsmenge ✎$\mathbb{L} = \varnothing = \{\}$

  Sie hat aber genau zwei komplexe Lösungen, nämlich $x = i$ und $x = -i$, d. h. $\mathbb{L} = \{\pm i\}$.
- Nur für gewisse Belegungen der Variablen wahr: $2x + 3 = 6$ ist genau dann wahr, wenn $x = \frac{3}{2}$. Die Gleichung hat also genau eine Lösung, nämlich $x = \frac{3}{2}$. Also ✎$\mathbb{L} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

(c) Gleichungen in mehr als einer Variablen:
  - Die Gleichung $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ist stets wahr (dritte binomische Formel). Jedes Paar (a, b) reeller Zahlen ist eine Lösung, d.h. ✎$\mathbb{L} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ = Menge aller Paare reeller Zahlen
  - Die Gleichung $x^2 + y^2 = -1$ hat keine reellen Lösungen (da Quadrate reeller Zahlen stets ≥ 0 sind), also ✎$\mathbb{L} = \varnothing$ Sie hat aber unendlich viele komplexe Lösungen, etwa $(x, y) = (i, 0)$ oder $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$.
  - Die Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ ist genau dann wahr, wenn $x^2 = 0$ und $y^2 = 0$ gelten, d. h. wenn $x = y = 0$ gilt, d. h. das Paar $(x, y) = (0, 0)$ ist die einzige Lösung: Lösungsmenge ✎$\mathbb{L} = \{(0, 0)\}$

Konvention 8.2.3. Mit einer *Gleichung* meinen wir in diesem Kapitel eine $\boxed{\textit{Gleichung in einer Variablen}}$. Die Variable heisst meist x.

Definition 8.2.4 Grundmenge

Oft ist man beim Lösen einer Gleichung nur an Lösungen in einer gegebenen Menge interessiert.
Diese sogenannte **Grundmenge** wird oft als $\mathbb{G}$ notiert.
Im Prinzip sollte man diese Grundmenge stets angeben, jedoch geschieht dies eher selten.
Ist die Grundmenge nicht angegeben, so ist mit $\mathbb{G}$ in der Regel die grösste Teilmenge von $\mathbb{R}$ gemeint, für die beide Seiten der Gleichung definiert sind. Abstrakt: $\mathbb{G}$ ist der Schnitt der maximalen Definitionsmengen beider Seiten.

Beispiele 8.2.5.
- Wenn in einem physikalischen Problem die Variable x in einer Gleichung für die Masse eines Körpers steht, so ist man nur an Lösungen $x \geq 0$ interessiert, d. h. man sucht nur Lösungen in der Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{R}_0^+$. (ausser in gewissen Bereichen der theoretischen Physik)
- Bei einer Gleichung wie $2x + 3 = 6$ ist die Grundmenge $\mathbb{G} =$✎$\mathbb{R}$, denn auf beiden Seiten darf man beliebige reelle Zahlen einsetzen.
- Bei einer Gleichung wie $\frac{1}{x+1} = 6$ ist die Grundmenge $\mathbb{G} =$✎$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, denn für $x = -1$ ist die linke Seite nicht definiert. Einzige Lösung ist $x = -\frac{5}{6}$.
- Bei einer Gleichung wie $6 = \sqrt{x+2}$ ist die Grundmenge $\mathbb{G} =$✎$[-2, \infty)$, denn die rechte Seite ist nur für $x \geq -2$ definiert. Einzige Lösung ist $x = 34$.

Beispiele 8.2.6. Betrachte die Gleichung $x^2 = 2$.
- Fall $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$: ✎D.h. nur ganzzahlige Lösungen gesucht, also $\mathbb{L} = \varnothing$
- Fall $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$: ✎D.h. nur rationale Lösungen gesucht, also $\mathbb{L} = \varnothing$
- Fall $\mathbb{G} = \mathbb{R}$: ✎D.h. nur reelle Lösungen gesucht, also $\mathbb{L} = \{\pm\sqrt{2}\}$

8.3 Umformen von Gleichungen

8.3.1 (Allgemeine Strategie zum Lösen von Gleichungen)**.** Um die Lösungen einer Gleichung zu bestimmen, versucht man, die Variable mit Hilfe von Umformungen («mit beiden Seiten der Gleichung dasselbe machen») zu isolieren.

Definition 8.3.2 Umformungen von Gleichungen

Eine **Umformung** einer Gleichung ist das Anwenden *derselben «Operation»* auf beide Seiten der Gleichung. Wenn man zum Beispiel die Operation «addiere 7» auf beide Seiten anwendet, so schreibt man dies wie folgt:

$$\begin{array}{rrcl}
✎ & T = S & | & +7 \\
\Longrightarrow & T + 7 = S + 7 & &
\end{array}$$

Rechts des «Kommandostrichs» deutet man an, welche Umformung durchgeführt wird.
Der Implikationspfeil/Folgerungspfeil $\Longrightarrow$ deutet an, dass aus der Gültigkeit der oberen Gleichung die Gültigkeit der unteren Gleichung folgt (für fixierte Variablenbelegungen).
Kommandostrich mit Angabe der Operation und Implikationspfeil werden nicht immer geschrieben.

 Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Merke 8.3.3

Beim (korrekten!) Umformen von Gleichungen bleibt die Lösungsmenge gleich oder wird grösser.

Grund: Macht man mit Gleichem Gleiches, so kommt Gleiches heraus. (Annahme dabei: Die Grundmenge wird beibehalten.)

Beispiele 8.3.4. Die folgenden Umformungen sind «ziemlich dumm», d. h. man würde sie in der Praxis hoffentlich nie durchführen. Sie illustrieren aber gut, dass die Lösungsmenge grösser werden kann.

(a)
$$\begin{array}{rcll} & x = 3 & ✎\mid\ (\cdot)^2 \text{ d.h. quadriere} & x = 3 \text{ einzige Lösung} \\ \Longrightarrow & x^2 = 9 & & \text{genau zwei Lösungen } x = \pm 3 \end{array}$$

Keine Äquivalenzumformung! (im Sinne der folgenden Definition)

(b)
$$\begin{array}{rcll} & x - 2 = 0 & \mid \cdot (x+2) & x = 2 \text{ einzige Lösung} \\ \Longrightarrow & (x-2)(x+2) = 0 & & \text{genau zwei Lösungen } x = \pm 2 \end{array}$$

Keine Äquivalenzumformung! (im Sinne der folgenden Definition)

(c)
$$\begin{array}{rcll} & x - 2 = 0 & \mid \cdot 0 & x = 2 \text{ einzige Lösung} \\ \Longrightarrow & 0 = 0 & & \text{Lösungsmenge } \mathbb{L} = \mathbb{R} \end{array}$$

Keine Äquivalenzumformung! (im Sinne der folgenden Definition)

Definition 8.3.5

Eine Umformung einer Gleichung heisst **Äquivalenzumformung**, wenn sie die Lösungsmenge *nicht verändert*, d. h. wenn die Gleichung und die umgeformte Gleichung dieselbe Lösungsmenge haben.
Äquivalenzumformungen werden oft mit einem «Genau-dann-wenn-Pfeil» $\Longleftrightarrow$ notiert.

Die beiden Gleichungen sind also in dem Sinne äquivalent (= gleichwertig), dass sie dieselbe Lösungsmenge haben.

Merke 8.3.6

Wenn man beim Lösen einer Gleichung durch Umformungen ausschliesslich Äquivalenzumformungen verwendet, so muss man am Ende keine Probe durchführen (es ist aber trotzdem empfohlen).
Verwendet man ein **einziges Mal** eine Umformung, bei der man nicht sicher ist, ob es sich um eine Äquivalenzumformung handelt, so **muss man eine Probe durchführen**.

Merke 8.3.7

Die wichtigsten Äquivalenzumformungen sind:

(a) Addition *desselben* Terms auf beiden Seiten:

$$\begin{array}{rcl} & T_1 = T_2 & \mid \quad + S \\ \Longleftrightarrow & T_1 + S = T_2 + S & \end{array}$$

Die Lösungsmenge wird nicht verändert, denn man kann diese Umformung rückgängig machen: Subtrahiere S auf beiden Seiten.

(b) Multiplikation beider Seiten mit *demselben*, **von Null verschiedenen** Term (meist einer Zahl):

$$\begin{array}{rcl} & T_1 = T_2 & \mid \quad \cdot S \\ \Longleftrightarrow & T_1 \cdot S = T_2 \cdot S & \end{array}$$

Die Lösungsmenge wird nicht verändert, denn man kann diese Umformung rückgängig machen: Dividiere beide Seiten durch S. Dies ist wegen $S \neq 0$ erlaubt.

(c) Subtraktion und Division: Analog darf man denselben Term S auf beiden Seiten abziehen bzw. beide Seiten durch denselben Term $S \neq 0$ dividieren.

Beachte: Die Variable darf beide Male im Term S vorkommen; beim Multiplizieren muss man jedoch sicherstellen, dass S für kein $x \in \mathbb{G}$ Null wird (sonst muss man mit Fallunterscheidungen arbeiten, siehe später).

8.3.8. Wir betrachten nun den «einfachsten» Typ von Gleichungen, nämlich *lineare Gleichungen*. Diese haben den Vorteil, dass man sie stets mit den beiden gerade angegebenen Äquivalenzumformungen lösen kann.

8.4 Lineare Gleichungen

Definition 8.4.1 Lineare Gleichung

Eine **lineare Gleichung** ist eine Gleichung, die man *durch Äquivalenzumformungen* auf die Form

$$\boxed{ax = b} \qquad \text{für geeignete reelle Zahlen } a, b \in \mathbb{R}$$

bringen kann («Standardform einer linearen Gleichung») und die Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ ist.
Gleichbedeutend kann man die Form $ax + b = 0$ verlangen, d.h. «lineares Polynom gleich Null».
Grob gesagt: Kommt die Variable in einer Gleichung nur in der ersten Potenz vor, so handelt es sich um eine lineare Gleichung. Jede Gleichung, bei der beide Seiten Polynome vom Grad kleiner-gleich Eins sind, ist linear.

Beispiel 8.4.2. Die am Anfang dieses Kapitels betrachtete «Noten-Gleichung» $1 + 0.3x = 4$ ist linear (die linke Seite ist ein Polynom vom Grad 1, die rechte Seite ein Polynom vom Grad Null), denn wir haben sie mit Äquivalenzumformungen zu $0.3x = 3$ gebracht.

Beispiele 8.4.3. Die folgende Gleichung sieht auf den ersten Blick nicht linear aus, ist es aber doch: ✎

$$\begin{aligned}
& & (x-1)^2 &= (x+2)\cdot(x-2) - 4x & & \\
&\iff & x^2 - 2x + 1 &= x^2 - 4 - 4x & &\mid -x^2 \\
&\iff & -2x + 1 &= -4 - 4x & &\mid -1 + 4x \qquad \text{x kommt nur in erster Potenz vor} \\
&\iff & 2x &= -5 & &\mid :(-2) \text{ bzw. } \cdot\frac{1}{2} \qquad \text{also Gleichung linear} \\
&\iff & x &= -\frac{5}{2} & & \qquad \text{einzige Lösung}
\end{aligned}$$

Lösungsstrategie 8.4.4 für lineare Gleichungen, «Variable isolieren»

(1) Beide Seiten vereinfachen. In der Regel sind beide Seiten Polynome. Dann bringt man diese auf Standardform (per Ausmultiplizieren, Zusammenfassen, Ordnen). Das Ordnen lässt man oft weg.

(2) Alle Terme mit x auf eine Seite bringen und zusammenfassen, alle anderen Terme/Zahlen auf die andere Seite und zusammenfassen, so dass die Gleichung die Form $ax = b$ hat.

(3) Durch den Koeffizienten bei x dividieren, falls dieser nicht Null ist.

Aufgabe A2 Welche Zahl hat jeweils die angegebene Eigenschaft? Gute Übung: Aufgaben im Kopf lösen!

(a) Ihr Fünffaches ist um 36 kleiner als ihr Achtfaches.
(b) Vergrössert man die Zahl um ihr Drittel , so erhält man 52. (*Vergrössern = Vergrössern durch Addition.*)
(c) Subtrahiert man ihr Sechsfaches von 360, so erhält man gleich viel, wie wenn man ihr Vierfaches von 280 subtrahiert.
(d) Ihr siebter Teil ist um 2 kleiner als ihre Gegenzahl.

Aufgabe A3 Fügt man auf beiden Seiten einer zweistelligen (natürlichen) Zahl die Ziffer 5 hinzu, so erhält man das 75-fache der Zahl. Welche Zahl ist es?

Aufgabe A4 Vierzig Personen unternehmen einen Ausflug mit den SBB. Erwachsene bezahlen für das Ticket je 30 Franken, Kinder jeweils die Hälfte. Die SBB nehmen 1080 Franken ein. Wie viele Kinder nehmen an der Reise teil?

Aufgabe A5 «Meine Tante», sagt Simone, «ist jetzt 5-mal so alt wie ich. In 7 Jahren wird sie nur noch 3-mal so alt sein, wie ich dann alt sein werde. Wie alt bin ich heute?»

Aufgabe A6 Lösen Sie jeweils nach x auf (dabei werden Sie feststellen, dass die Gleichung linear ist).

a) $\dfrac{4x-5}{3} - \dfrac{2x-3}{6} = \dfrac{x}{2} - 1$ b) $4x(x-1) = (2x-1)^2 - 1$ c) $\dfrac{8x-3}{8} - \dfrac{8+3x}{3} = 0$

Aufgabe A7 Bestimmen Sie eine zweistellige natürliche Zahl mit der folgenden Eigenschaft: Fügt man die Ziffer 3 einmal links und einmal rechts hinzu, so unterscheiden sich die beiden erhaltenen Zahlen um 333.

Aufgabe A8 Bitte melden, falls Prozentrechnung Probleme macht. Eigentlich ist es ganz einfach: Ersetze das „komische" Zeichen % durch „Hundertstel". Beispielsweise bedeutet 6 % einfach $6 \cdot \frac{1}{100} = \frac{6}{100} = 0{,}06$. Das Wort *Prozent* und das Zeichen % haben sich übrigens aus italienisch *per cento* (etwa „von Hundert") entwickelt, siehe etwa Wikipedia: Prozentzeichen.

Ein Teil eines Kapitals von 70 350 Franken ist mit Zinssatz 6 % angelegt, der Rest mit Zinssatz 5 %. Der Jahreszins des gesamten Kapitals beträgt 4 100 Franken. Wie gross sind die beiden Teile? (Taschenrechner erlaubt)

Aufgabe A9 Zu welcher Zeit (auf Hunderstelsekunden genau) zwischen 16 Uhr und 17 Uhr bilden die Zeiger einer Uhr einen rechten Winkel? (Taschenrechner «am Ende» erlaubt)

Aufgabe A10 Die Ortschaften A und B liegen 120 Bahnkilometer voneinander entfernt. Ein Zug verlässt A um 15.00 Uhr in Richtung B; seine mittlere Geschwindigkeit beträgt 72 km/h. Der Gegenzug verlässt B um 15.15 Uhr; seine mittlere Geschwindigkeit beträgt 88 km/h. Wann begegnen sich die beiden Züge?

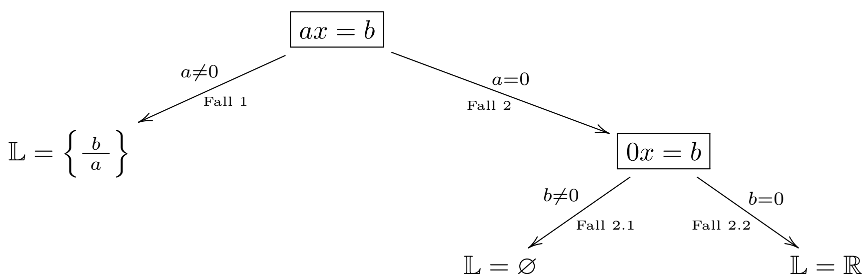
Satz 8.4.5 Struktur der Lösungsmenge einer linearen Gleichung

Jede lineare Gleichung hat entweder **genau eine** Lösung, **keine** Lösung oder **unendlich viele** Lösungen. Für die allgemeine lineare Gleichung $ax = b$ (in Standardform) geben die drei Zeilen der folgenden Tabelle alle möglichen Fälle an.

eventuell Beispiele angeben; Beweis klar per Entscheidungsbaum

Fall 1: $a \neq 0$ und b beliebig	$a \cdot x = b$	✎ $x = \frac{b}{a}$ einzige Lösung	$\mathbb{L} = \{\frac{b}{a}\}$
Fall 2.1: $a = 0$ und $b \neq 0$	$0 \cdot x = b$	✎ keine Lösung	$\mathbb{L} = \{\} = \varnothing$
Fall 2.2: $a = 0$ und $b = 0$	$0 \cdot x = 0$	✎ jede Zahl ist Lösung	$\mathbb{L} = \mathbb{G} = \mathbb{R}$

Als «Entscheidungsbaum», der die Fallunterscheidung illustriert:



8.5 Lineare Gleichungen mit Parametern

Aufgabe A11 In einer Prüfung verwendet der Lehrer die Notenformel $1 + 5 \cdot \frac{x}{30}$, wobei x die erreichte Punktzahl ist.

(a) Mit welcher Punktzahl bekommt man die Note 4?
(b) Mit welcher Punktzahl bekommt man die Note 5?
(c) Mit welcher Punktzahl bekommt man die Note 6?

8.5.1 (Lösung von Aufgabe A11)**.** Naives Vorgehen:

(a) Lösen Sie die Gleichung $1 + 5 \cdot \frac{x}{30} = 4$ — Standardrechnung führt zur Lösung: $x = 18$
(b) Lösen Sie die Gleichung $1 + 5 \cdot \frac{x}{30} = 5$ — Lösung: $x = 24$
(c) Lösen Sie die Gleichung $1 + 5 \cdot \frac{x}{30} = 6$ — Lösung: $x = 30$

Intelligenteres Vorgehen: Beobachtung: Die drei Gleichungen haben dieselbe «Bauart»/Struktur:

✎$1+5\cdot\frac{x}{30}=n$ wobei der sogenannte $\boxed{\text{Parameter}}$ n die gewünschte Note ist

Stellt man sich n als fixierte Zahl vor, so kann man diese Gleichung wie üblich lösen: ✎

$$\begin{aligned} & 1+5\cdot\frac{x}{30}=n && \mid \cdot 30 \\ \iff\quad & 30+5\cdot x=30n && \mid -30 \\ \iff\quad & 5x=30n-30 && \mid :5 \\ \iff\quad & x=\frac{30n-30}{5}=\frac{30}{5}\cdot(n-1)=6(n-1) \end{aligned}$$

Nun kann man für n konkrete Werte einsetzen und beispielsweise eine Tabelle erzeugen:

Note n	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
benötigte Punktzahl x	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30

Damit hat man die ursprüngliche Aufgabe (und diverse Variationen) «auf einmal» gelöst.

Begriffserklärung 8.5.2

Parameter sind zusätzliche Variablen (neben der «Lösungsvariablen» x), die dazu dienen, gewisse numerisch (noch) nicht bekannte oder bewusst nicht fixierte Grössen anzugeben, wie z.B. eine Geschwindigkeit oder einen Zinssatz.

Auch in einer Formel wie $A=\frac{1}{2}g\cdot h$ für den Flächeninhalt eines Dreiecks mit Grundseite g und zugehöriger Höhe h mag man g und h als Parameter ansehen.

Konvention 8.5.3. Wenn nicht anders erwähnt, bezeichnen Buchstaben wie x, y oder z die Unbekannten (= Lösungsvariablen, also die Variablen, nach denen wir Gleichungen auflösen wollen). Parameter werden meist mit Buchstaben wie a, b, c vom Anfang des Alphabets bezeichnet, aber auch mit p oder q.

Aufgabe A12 Ein Lehrer verwendet die Notenformel $1+5\cdot\frac{x}{b}$, wobei x die Punktzahl ist und b die für die Note 6 nötige Punktzahl (denn für $x=b$ bekommt man die Note $1+5\cdot\frac{b}{b}=6$).

(a) Mit welcher Punktzahl bekommt man die Note 4, wenn $b=100$ gilt?
(b) Mit welcher Punktzahl bekommt man die Note 5, wenn $b=30$ gilt?
(c) Mit welcher Punktzahl bekommt man die Note 5.5, wenn $b=20$ gilt?

Erwünschtes Vorgehen: Stellen Sie *eine* Gleichung mit 2 Parametern auf; diese Gleichung dann nach x auflösen und die angegebenen Werte einsetzen.

Lösungsstrategie 8.5.4 zum Lösen von in der Lösungsvariablen linearen Gleichungen mit Parameter(n)

- Vereinfache beide Seiten der Gleichung (etwa durch Ausmultiplizieren).
- Bringe alle Terme mit der Unbekannten x auf die linke Seite und alle übrigen Terme auf die rechte Seite (oder andersherum).
- Klammere x auf der linken Seite aus, so dass die Gleichung die Standardform $ax=b$ hat.
- Verwende die Fallunterscheidung aus Satz 8.4.5, d. h.
  - Fall 1: Im «Normalfall», dass der Koeffizient bei x nicht Null ist: Dividiere die Gleichung durch diesen Koeffizienten.
  - Fall 2: Im «Spezialfall», dass der Koeffizient bei x Null ist, unterscheide weiter die beiden Fälle
    - Fall 2.1: die rechte Seite ist nicht Null (keine Lösung);
    - Fall 2.2: die rechte Seite ist Null (jede Zahl ist Lösung).

Beispiel 8.5.5. Die folgende Gleichung ist nach der Lösungsvariable x aufzulösen; a und b sind Parameter. ✎

$$\begin{aligned}
a(x-b) &= 2(ax-2a^2-bx) && \mid \text{ausmultiplizieren}\\
ax-ab &= 2ax-4a^2-2bx && \mid +ab-2ax+2bx \text{ d.h. } x\text{-Terme nach links, Rest nach rechts}\\
-ax+2bx &= -4a^2+ab && \mid x \text{ ausklammern}\\
x(-a+2b) &= a(-4a+b)
\end{aligned}$$

Die Gleichung hat nun die Form $Ax = B$ und wir führen eine Fallunterscheidung durch (gemäss Satz 8.4.5).

- Fall 1, ✎$-a+2b \neq 0$ oder gleichbedeutend $a \neq 2b$:
  Division durch $(-a+2b)$ ist erlaubt und liefert $\mid : (-a+2b)$ bis zu obiger Gleichung?

$$x = \frac{a(-4a+b)}{-a+2b} = \frac{a(4a-b)}{a-2b}$$

- Fall 2, ✎$-a+2b = 0$ oder gleichbedeutend $a = 2b$:
  Obige Gleichung abschreiben und vereinfachen:

$$\begin{aligned}
x(-a+2b) &= a(-4a+b) && \mid \text{verwende } a=2b\\
0 &= 2b(-4\cdot 2b+b)\\
0 &= 2b\cdot(-7b)\\
0 &= -14b^2
\end{aligned}$$

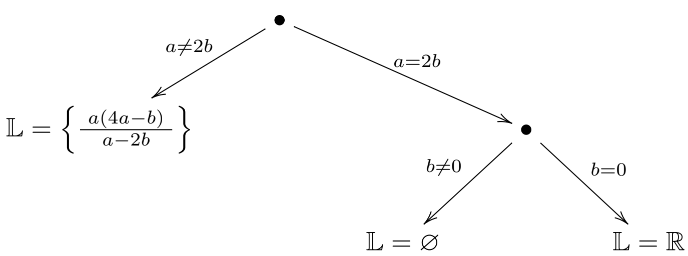
  - Fall 2.1: ✎$-14b^2 \neq 0$ oder gleichbedeutend $b \neq 0$
    Die Gleichung hat keine Lösung!
  - Fall 2.2: ✎$-14b^2 = 0$ oder gleichbedeutend $b = 0$
    Die Gleichung hat unendlich viele Lösungen!

✎ergänze Klammer bei Fall 2 mit «Diskussion der Spezialfälle» und bei Fall 1 mit «Lösung ohne Diskussion der Spezialfälle»

Fazit: Die Lösungsmenge unserer Ausgangsgleichung hängt wie folgt von den Parametern ab:

- Fall 1: $\boxed{a \neq 2b}$: Dann gilt ✎$\mathbb{L} = \left\{\frac{a(4a-b)}{a-2b}\right\}$
- Fall 2.1: $\boxed{a = 2b \text{ und } b \neq 0}$: Dann gilt ✎$\mathbb{L} = \varnothing$
- Fall 2.2: $\boxed{a = 2b \text{ und } b = 0}$ (oder äquivalent $\boxed{a = b = 0}$): Dann gilt ✎$\mathbb{L} = \mathbb{R}$

Wenn man also für konkrete Werte von a und b die Lösungsmenge bestimmen will, kann man den folgenden „Entscheidungsbaum“ durchlaufen:



Aufgabe A13 Lösen Sie die folgenden Gleichungen $\boxed{\text{ohne separate Diskussion der Spezialfälle}}$.

a) $qx - x = q^2 - 1$ b) $2(bz - cz) = z + bz - c$ c) $(y-3p)^2 = 2y(y+3p) - y(y-1)$

Aufgabe A14 Lösen Sie die folgenden Gleichungen $\boxed{\text{mit Diskussion der Spezialfälle}}$:

a) $ax + b = 3$ b) $px - 5 = 2x + q$ c) $p^2x - px = p^2 - 1$

Aufgabe A15 Aufgaben mit Parametern aus der Physik (ohne Diskussion von Spezialfällen). Ziel ist nur, sich an das Rechnen mit Parametern zu gewöhnen. Motiviert durch: Wolfgang Zeuge: Nützliche und schöne Geometrie – eine etwas andere Einführung

(a) Ein Velofahrer fährt eine Strecke s mit Geschwindigkeit v_1 und dann dieselbe Strecke mit Geschwindigkeit v_2. Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit ist er gefahren?
Berechnen Sie diese Durchschnittgeschwindigkeit für $v_1 = 40\,\mathrm{km/h}$, $v_2 = 20\,\mathrm{km/h}$ und $s = 50\,\mathrm{km}$. Ist Ihr Ergebnis plausibel?

(b) Ein Velofahrer fährt während einer Zeit(dauer) t mit Geschwindigkeit v_1 und danach genauso lang mit Geschwindigkeit v_2. Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit ist er gefahren?
Berechnen Sie diese Durchschnittgeschwindigkeit für $v_1 = 40\,\mathrm{km/h}$, $v_2 = 20\,\mathrm{km/h}$ und $t = 1\,\mathrm{h}$. Ist Ihr Ergebnis plausibel?

(c) Welche der drei Mittelwerte (arithmetisch, geometrisch, harmonisch) tauchen in den vorhergehenden Teilaufgaben auf?

Aufgabe A16 Lösen Sie die folgenden Gleichungen. Dabei (abgesehen von der ersten Gleichung) tauchen einige reelle Zahlen auf, deren Definition Sie vermutlich noch nicht kennen (etwa $\ln(7)$, der natürliche Logarithmus von 7). Rechnen Sie mit diesen Zahlen wie mit Parametern. Die Zahlen sind **nicht** mit dem Taschenrechner näherungsweise auszurechnen.

Die Aufgaben sind so gemacht, dass beim «normalen Lösen» nicht durch Null dividiert wird. Als Beispiel: $(x - \ln(17))^2 + 3x = (x + \sqrt{7})^2 - 3$ vorgerechnet und ähnliche Aufgabe gestellt; leider dabei vergessen, ein Minus vor den auszuquadrierenden Termen unterzubringen.

a) $\frac{2}{5}x - \frac{7}{2} = \left(\frac{x}{3} + 6\right) \cdot 5$ b) $\sqrt{3}x + \ln(7) = \ln(3)x + \sqrt{6}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{5}x - \frac{\ln(7)}{2} = \ln(3)x + \sqrt[3]{6}$

8.6 Ausblick: Andere Typen von Gleichungen

8.6.1. Neben linearen Gleichungen tauchen oft quadratische, kubische, quartische oder Gleichungen höheren Grades auf.

$$\begin{aligned} a_1x + a_0 &= 0 && \textbf{lineare Gleichung} \text{ oder Gleichung vom Grad 1} \\ a_2x^2 + a_1 + a_0 &= 0 && \textbf{quadratische Gleichung} \text{ oder Gleichung vom Grad 2} \\ a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 &= 0 && \textbf{kubische Gleichung} \text{ oder Gleichung vom Grad 3} \\ a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 &= 0 && \textbf{quartische Gleichung} \text{ oder Gleichung vom Grad 4} \\ &\vdots \\ a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 &= 0 && \text{allgemeine Gleichung vom Grad } n \end{aligned}$$

Dabei sind die Parameter $a_0, a_1, \ldots, a_n$ beliebige reelle Zahlen.

Wie man lineare Gleichungen löst, haben wir gesehen: Die Lösungsformel ist $x = \frac{-a_0}{a_1}$.

Für quadratische, kubische und quartische Gleichungen (also Gleichungen bis zum Grad 4) gibt es Lösungsformeln; bald werden wir die sogenannte **Mitternachtsformel** für quadratische Gleichungen kennenlernen.

Die Lösungsformeln für Gleichungen dritten und vierten Grades werden an Schulen selten erklärt.

In diesen Lösungsformeln kommen nur die Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) und Wurzeln («Radikale») vor.

Für Gleichungen vom Grad ≥ 5 kann man beweisen, dass es solche «Lösungsformeln durch Radikale» im Allgemeinen **nicht** gibt (Satz von Abel-Ruffini, bewiesen vom bedeutenden norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel im Jahre 1824). Lösungen solcher Gleichungen können im Allgemeinen nicht exakt bestimmt werden. Per Computer kann man die Lösungen aber oft mit sehr hoher Genauigkeit angeben (etwa auf 100 Nachkommastellen genau).

8.7 Einfache nicht-lineare Gleichungen

8.7.1. Im Folgenden studieren wir einige andere Arten von Gleichungen (z. B. Wurzel- und Bruchgleichungen), die man mit gewissen Tricks lösen kann. Beim Lösen solcher Gleichungen verwendet man oft Umformungen, die (eventuell) keine Äquivalenzumformungen sind; dann ist $\boxed{\text{am Ende eine Probe durchzuführen}}$.

Wurzelgleichungen

Beispiel 8.7.2. ✎Am Ende: Grundmenge ist $\mathbb{G} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x-1 \geq 0 \text{ und } 4x+1 \geq 0\} = [\frac{1}{3}, \infty)$.

$$
\begin{array}{rrl}
 & \sqrt{3x-1} - \sqrt{4x+1} = 0 & \quad \mid +\sqrt{4x+1} \\
 & \sqrt{3x-1} = \sqrt{4x+1} & \quad \mid (\cdot)^2 \\
\Longrightarrow & 3x-1 = 4x+1 & \quad \mid -3x-1 \\
\Longleftrightarrow & -2 = x &
\end{array}
$$

Bei der ersten Umformung handelt es sich eventuell nicht um eine Äquivalenzumformung. Folglich ist eine Probe durchzuführen. ✎

$$(\text{linke Seite}) = \sqrt{3x-1} = \sqrt{3\cdot(-2)-1} = \sqrt{-7} \quad \text{nicht definiert!}$$

(oder $x = -2 \notin \mathbb{G}$). Also ist $x = -2$ keine Lösung, $\mathbb{L} = \varnothing$.

Beispiel 8.7.3. ✎Am Ende: Grundmenge ist $\mathbb{G} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x-2 \geq 0\} = [\frac{2}{3}, \infty)$.

$$
\begin{array}{rrl}
 & \sqrt{3x-2} - 2 = 2 & \quad \mid +2 \\
\Longleftrightarrow & \sqrt{3x-2} = 4 & \quad \mid (\cdot)^2 \\
\Longrightarrow & 3x-2 = 16 & \quad \mid +2 \\
\Longleftrightarrow & 3x = 18 & \quad \mid :3 \\
\Longleftrightarrow & x = 6 &
\end{array}
$$

Quadrieren ist eventuell keine Äquivalenzumformung, also Probe: ✎

$$(\text{linke Seite}) = \sqrt{3\cdot 6-2} = \sqrt{16} = 4 \stackrel{?}{=} (\text{rechte Seite}) = 4$$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{6\}$.

Merke 8.7.4 Lösen von Wurzelgleichungen; «Wegquadrieren von Wurzeln»

Taucht in einer Gleichung ein Wurzelausdruck auf, der die Lösungsvariable enthält, so führt das folgende Vorgehen oft zum Ziel:

- Forme die Gleichung so um, dass ein Wurzelausdruck **alleine** auf einer Seite der Gleichung steht.
- Quadriere die Gleichung (d. h. beide Seiten quadrieren), um das Wurzelzeichen zu beseitigen.

⚠ Da Quadrieren im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung ist, ist am Ende eine Probe durchzuführen.

Manchmal muss man auch mehrfach Quadrieren, um mehrere Wurzelzeichen zu beseitigen.

Aufgabe A17 Bestimme jeweils die Lösungsmenge.

a) $\sqrt{3x+1} = \sqrt{4x-1}$

b) $\sqrt{x-5} = \sqrt{7-x}$

c) $0 = \sqrt{8-5x} - \sqrt{2x-6}$

d) $10\sqrt{40-x} = 40\sqrt{10-x}$

e) $\sqrt{x-3} + 1 = \sqrt{x+4}$ Hinweis: Quadrieren, Wurzel auf eine Seite, nochmals Quadrieren

Bruchgleichungen

Beispiel 8.7.5. ✎

$$\begin{aligned}
&& \frac{2x-1}{x-3} = \frac{5x-10}{x-3} && \Big| \quad \cdot (x-3)\\
\Longrightarrow && 2x-1 = 5x-10 && \Big| \quad -2x+10\\
\Longleftrightarrow && 9 = 3x && \Big| \quad :3 \text{ (und Seiten vertauschen)}\\
\Longleftrightarrow && x = 3 &&
\end{aligned}$$

Ähnlich wie bei den Gleichungen mit Wurzeln müssen wir prüfen, ob $x = 3$ eine Lösung der Ausgangsgleichung ist. Dies ist aber nicht der Fall, denn Division durch $3 - 3 = 0$ ist nicht definiert. Also $\mathbb{L} = \varnothing$.

✎Alternative: Bestimme zuerst die Grundmenge (= die Menge, in der man Lösungen sucht): $\mathbb{G} = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Wenn man stets $x \in \mathbb{G}$ annimmt, sind alle Umformungen Äquivalenzumformungen (da $x - 3 \neq 0$). Die letzte Gleichung $x = 3$ hat **keine** Lösung in $\mathbb{G}$.

Merke 8.7.6 Lösen von Bruchgleichungen; «Durchmultiplizieren mit allen Nennern»

Kommt die Lösungsvariable im Nenner eines Bruches vor, ist es oft sinnvoll, die Gleichung mit diesem Nenner zu multiplizieren.
⚠ Am Ende ist eine Probe durchzuführen. Alternativ kann man sorgfältig mit Grundmengen arbeiten.

Aufgabe A18 Bestimme jeweils die Lösungsmenge.

a) $\dfrac{5x}{2x-3} = \dfrac{3x-10}{2x-3}$ b) $\dfrac{2x}{7x-1} = \dfrac{2-10x}{14x-2}$ c) $\dfrac{5x}{2x-3} = \dfrac{5x-10}{2x-3}$

«Produkt-gleich-Null-Regel»

Merke 8.7.7

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist:

$$T_1 \cdot T_2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad T_1 = 0 \quad \text{oder} \quad T_2 = 0$$

Aufgabe A19

a) $(2x+7)\cdot(5x-8)\cdot(x^2+1) = 0$ b) $(x+4)(x^2-4) = 0$ c) $x^3 - 2x^2 + x = 0$
d) $x \cdot (x+6) = -9$ e) $\sqrt{2x+1} = x+1$

Merke 8.7.8 «Division durch einen Term»/Ausklammern

Einen Term auf beiden Seiten ausklammern (bzw. Division durch einen Term mit Fallunterscheidung):

$$RT = ST \qquad \Longleftrightarrow \qquad R = S \quad \text{oder} \quad T = 0$$

In Worten: Wenn man auf beiden Seiten einer Gleichung denselben Term T ausklammern kann, so gilt diese Gleichung genau dann, wenn „die durch T dividierte“ Gleichung $R = S$ gilt oder der Term T Null ist.

Beweis von $\Longrightarrow$ per Fallunterscheidung: Fall 1: $T \neq 0$: Man dividiere durch T und erhält $S = R$. Fall 2: $T = 0$: Die Gleichung gilt sicherlich und man muss sich überlegen, was $T = 0$ für die Lösungsvariable bedeutet. Beweis von $\Longleftarrow$: Wenn $R = S$ gilt, multipliziere man mit T und erhält $RT = ST$. Wenn $T = 0$ gilt, gilt sicherlich $RT = ST$. besser per $RT - ST = 0$, also $(R - S)T = 0$ und vorherigem Merke.

Beispiel 8.7.9.

$$\begin{aligned} x^2 - 3x &= 2x - 6 && \mid \text{Ausklammern} \\ x(x-3) &= 2(x-3) \end{aligned}$$

Nach der Merke-Box (mit $T = x - 3$ und $R = x$ und $S = 2$) gilt diese Gleichung genau dann, wenn

$$\begin{aligned} x &= 2 \qquad \text{oder} \qquad & x - 3 &= 0 \\ \mathbb{L}_1 &= \{2\} & x &= 3 \\ & & \mathbb{L}_2 &= \{3\} \end{aligned}$$

Fazit: Die Ausgangsgleichung hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{2, 3\}$.

Aufgabe A20 Bestimme jeweils die Lösungsmenge.

a) $x(x+2) = x - x^2$

b) $(x+2)(7-x) = (x-3)(x+2)$

c) $1 - x^2 = 1 - 2x + x^2$

d) $x^2 - 1 = 3 - 2x - x^2$

Hinweis: Die linke Seite ist in offensichtlicher Weise ein Produkt. Versuche, die rechte Seite ebenfalls als Produkt zu schreiben.

Merke 8.7.10 Korrektes Wurzelziehen

Korrektes „Wurzelziehen“:

$$S^2 = T^2 \quad \iff \quad |S| = |T| \quad \iff \quad S = T \quad \text{oder} \quad S = -T$$

In Worten: Die Quadrate zweier Terme stimmen genau dann überein, wenn die Terme bis auf Vorzeichen übereinstimmen.

Bemerkung: $|S| = |T|$ ist äquivalent zu $S = T$ oder $S = -T$ oder $-S = T$ oder $-S = -T$. Je zwei dieser vier Gleichungen sind gleichbedeutend, weshalb oben nur zwei davon aufgeführt sind.

Beispiel 8.7.11. $(x+4)^2 = (x-2)^2$

Nach der Merke-Box (mit $S = x + 4$ und $T = x - 2$) gilt diese Gleichung genau dann, wenn

$$\begin{aligned} x + 4 &= x - 2 \qquad \text{oder} \qquad & x + 4 &= -(x-2) \\ 4 &= -2 & x + 4 &= -x + 2 \\ \mathbb{L}_1 &= \varnothing & 2x &= -2 \\ & & x &= -1 \\ & & \mathbb{L}_2 &= \{-1\} \end{aligned}$$

Fazit: Die Ausgangsgleichung hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{-1\}$. Alternativ hätte man dies auch durch Ausmultiplizieren sehen können.

Beispiel 8.7.12. $x^4 = 16$

Nach der Merke-Box (mit $S = x^2$ und $T = 4$) gilt diese Gleichung genau dann, wenn

$$x^2 = 4 \qquad \text{oder} \qquad x^2 = -4$$

Die letztgenannte Gleichung $x^2 = -4$ hat Lösungsmenge $\varnothing$, da jedes Quadrat ≥ 0 ist. Wir müssen also nur $x^2 = 4$ lösen, was wiederum nach der Merke-Box auf $x = 2$ oder $x = -2$ führt.

Fazit: Die Ausgangsgleichung hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-2, 2\}$.

Aufgabe A21 Bestimme jeweils die Lösungsmenge.

a) $(x+3)^2 = 25$

b) $(x+3)^2 = -9$

c) $(x+3)^4 = 81$

d) $(x-3)^2 = (x+1)^2$

e) $(x-2)^2 = x^2 + 6x + 9$

f) $(x-1)^2 \cdot (x+2)^2 = (x^2 + 7x + 2)^2$

Aufgabe A22 Zeige, dass die beiden Regeln

- „Korrektes Wurzelziehen“ $\boxed{T^2 = S^2 \iff T = S \text{ oder } T = -S}$ und
- „Division durch einen Term“/Ausklammern $\boxed{RT = ST \iff R = S \text{ oder } T = 0}$

aus der „Produkt-Null-Regel“ $\boxed{ST = 0 \iff S = 0 \text{ oder } T = 0}$ folgen.

8.8 Verständnisfragen

Aufgabe A23

(a) Erklären Sie die folgenden Begriffe: Lösung einer Gleichung, Umformung, Äquivalenzumformung, lineare Gleichung

(b) Welche Umformungen sind stets Äquivalenzumformungen?

(c) Zeigen Sie durch zwei Beispiele, dass Quadrieren eine Äquivalenzumformung sein kann, aber nicht muss. (Meistens ist Quadrieren keine Äquivalenzumformung.)

(d) Was ist die allgemeine Strategie beim Lösen von Gleichungen?

(e) Was ist die Strategie beim Lösen von linearen Gleichungen?

(f) Wie kann die Lösungsmenge einer linearen Gleichung aussehen?

(g) Was ist ein Parameter?

(h) Was ist die Strategie beim Lösen von Wurzelgleichungen?

(i) Was ist die Strategie beim Lösen von Bruchgleichungen?

(j) Welche drei «Tricks» zum Lösen von nicht-linearer Gleichungen wurden im Skript erklärt?

Aufgabe A24 Kreieren Sie jeweils eine (gerne auch etwas kompliziertere) Gleichung, die folgende Bedingungen erfüllt:

a) Die einzige Lösung ist 42 und x kommt unter einer Wurzel vor.

b) Die einzige Lösung ist 42 und x kommt im Nenner eines Bruchs vor.

c) Die Gleichung hat genau die Lösungen 1 und 2.

d) Die Gleichung hat genau die Lösungen 1, 5 und -10.

e) Die Gleichung hat genau eine Lösung, ausser wenn der Parameter $a = 23$ ist.

f) Die Unbekannte x kommt unter einer Wurzel vor und die Gleichung hat keine Lösung; die durch Quadrieren beider Seiten erhalten Gleichung hat aber die Lösung 42.

8.9 Repetitionsaufgaben

Aufgabe A25 Lösen Sie die folgenden Gleichungen $\boxed{\text{mit Diskussion der Spezialfälle}}$.

a) $a(x-1) = 6(b+7x)$ b) $a(x-3) = xb-2$ c) $p(xp+1) = 2(1+2x)$

d) Für welche Werte des Parameters p hat die Gleichung $p(x+3) = 5(p-x)$ genau eine Lösung?

Aufgabe A26 Lösen Sie folgenden Gleichungen ohne Diskussion der Spezialfälle (falls solche Auftreten).

a) $\sqrt{1-2x} = x-1$ b) $\frac{2x-1}{2-x} - \frac{8-4x}{2x-1} = 0$ c) $a(x-2) = b^2x$

d) $\sqrt{\sqrt{x}+1} = 2$ e) $\sqrt{\sqrt{x}+1} = 0$ f) $\frac{3x-2a}{x-a} = \frac{3a-2x}{x-a}$

Aufgabe A27 Ein Quadrat und ein Rechteck haben dieselbe Fläche. Die eine Seite des Rechtecks misst 18 cm, die andere ist um 4 cm kürzer als die Quadratseite. Wie lang ist die Quadratseite?

Hinweis: Gleichung aufstellen, auf die Form «Term = 0» bringen und die linke Seite faktorisieren, indem man eine Nullstelle errät.

8.9.1. Es folgen einige Aufgaben zur Wiederholung aus einer alten Version des Algebra-Aufgaben-Buchs und direkt danach die Lösungen. Dies sind alles ⚒-Aufgaben.

Ich schlage die rot markierten Aufgaben vor - selbständiges intelligentes Auswählen ist aber ausdrücklich erlaubt und erwünscht. Welcher Aufgabentyp (Textaufgaben, Wurzelaufgaben, Bruchaufgaben, Ausmultiplizieraufgaben) macht mir noch Probleme?

95 a) $\sqrt{x+5} = \sqrt{4-x}$ ● b) $\sqrt{2-x} = \sqrt{x-8}$

96 a) $\sqrt{x(x-4)} = 2\sqrt{1-x}$ ● b) $10\sqrt{40-x} = 40\sqrt{10-x}$

97 a) $\sqrt{1-x} = 5$ b) $\sqrt{x+8} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$

98 a) $\sqrt{x^2 + \frac{9}{8}} = \frac{9}{8}$ b) $\sqrt{x(2-\sqrt{3})} = 3 - \sqrt{3}$

99 ● a) $\sqrt{3x} - \sqrt{3+x} = 0$ b) $6\sqrt{x} + 7 = 8\sqrt{x} - 9$

100 a) $4 + 9\sqrt{x^2+9} = 49$ b) $\sqrt{x+243} - \sqrt{x} = \sqrt{x}$

101 a) $\sqrt{3x^2 - 50} = -x$ b) $2\sqrt{x^2 - x} = 2x + 1$ c) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} = 5 - x$

102 a) $x = 3\sqrt{x^2 - 64}$ b) $\sqrt{x^2+5} = x + 2$ ● c) $x - 4 = \sqrt{5x^2 - 8x}$

172 a) $\frac{3}{x} - \frac{1}{2x} = 4$ ● b) $\frac{1}{2x} - \frac{3}{4x} + \frac{5}{6} = 0$ c) $\frac{11}{5} - \frac{x-20}{2x} = \frac{2x-1}{3x}$

178 ● a) $\frac{4}{2x+1} = \frac{3}{2x}$ b) $\frac{7}{x-8} = \frac{11}{x-1}$ c) $\frac{14}{x-14} = \frac{x-14}{14}$

179 a) $\frac{2x+19}{x+2} = \frac{47}{3x+6}$ b) $\frac{2x}{x-5} = \frac{x-24}{5-x}$ c) $\frac{x-7}{6x+6} = \frac{x+7}{8x+8}$

180 a) $\frac{x}{x-3} = \frac{x+1}{9-3x}$ ● b) $\frac{10}{4x+3} = \frac{x+3}{4x^2+3x}$ c) $\frac{x-2}{x^2-x} = \frac{x}{x^2-1}$

46 ● a) $2x^2 - (x+3)(x-3) = (x+1)^2 - 2x + 8$
b) $(x+2)(x-3) - 3(2x-3) = (x-6)^2 + 2$
c) $(x-3)(2x-5) + 4(2-x) + 12 = 2(1-x)^2$
d) $2x(x-5) - (x-5)^2 = (x-10)^2 + 20x - 125$

47 a) $(2x-3)^2 - (x-5)^2 - 3x(x-7) + 17 = 0$
● b) $5x(x-1) - (2x+3)^2 - (x-5)(x+3) - 6 = 0$
c) $(5x-1)^2 - x[10x - 3(x-4)] = 18x^2 - 21$
d) $(2x-3)(3+2x) - [4 - 5(x-1)] \cdot x = 9x^2$

48 a) $(x-1)(x-2)(x-3) - (x-1)(x-2)(x-4) = x^2$
b) $(x-5)(x-4)(x-2) - (x-5)(x-6)(x-2) = 2x(x-1)$
c) $(x-3)^2(x+4) - (x-3)(x+4)(x-7) - 4x(x-1) = 0$
d) $(2x-3)^3 - (2x-3)^2(2x-7) = (4x-8)^2$

129 ● Eine Treppe hat 22 Stufen. Würde jede Stufe um 1.6 cm höher gebaut, könnten zwei Stufen eingespart werden. Wie hoch ist eine Stufe?

149 ● Ein Pfosten ist 10.5 m lang. Von seiner Länge befindet sich viermal so viel im Wasser wie in der Erde und halb so viel über dem Wasser wie in diesem. Wie lang ist der aus dem Wasser herausragende Teil des Pfostens?

166 ● Flussabwärts fährt ein Ledischiff in 12 Stunden ans Ziel. Für den Rückweg benötigt es bei gleicher Leistung drei Stunden mehr. In stehendem Gewässer würde die Geschwindigkeit 18 km/h betragen. Berechne die Geschwindigkeit des Flusses.

139 ● Patrick und Isabelle haben 600 Nüsse gesammelt. Isabelle sagt: “Wenn du mir die Hälfte deiner Nüsse gibst und ich dir darauf einen Drittel der Nüsse gebe, die ich dann habe, so besitzen wir schliesslich gleich viele Nüsse.” Wie viele Nüsse besassen beide am Anfang?

147 Im Bazar von Istanbul wird um einen Ledermantel gefeilscht. Der Händler verlangt umgerechnet 590 Franken, während der Käufer nur 410 Franken bezahlen will. Die beiden einigen sich so, dass der Händler den Preis um gleich viele Prozente senkt, wie der Käufer sein Angebot erhöht. Welches ist der Verkaufspreis und um wie viele Prozente sind beide von ihren Forderungen abgewichen?

46 ●	a) $\mathbb{R}$	b) 7	c) 3	d) $\mathbb{R}$
47	a) $-\frac{1}{19}$	● b) 0	c) 1	d) -1
48	a) $\frac{2}{3}$	b) $\frac{5}{3}$	c) 6	d) $\frac{7}{4}$

95	a) $-\frac{1}{2}$	● b) $\{\ \}$	
96	a) -2	● b) 8	
97	a) -24	b) $4\sqrt{3}$ (6.928)	
98	a) $\pm\frac{3}{8}$	b) 6	
99 ●	a) $\frac{3}{2}$	b) 64	
100	a) ± 4	b) 81	
101	a) -5	b) $-\frac{1}{8}$	c) $x \leq 5$
102	a) $6\sqrt{2}$ (8.485)	b) $\frac{1}{4}$	● c) $\{\ \}$

172	a) $\frac{5}{8}$	● b) $\frac{3}{10}$	c) -10
178 ●	a) $\frac{3}{2}$	b) $\frac{81}{4}$	c) 28, 0
179	a) $-\frac{5}{3}$	b) 8	c) 49
180	a) $-\frac{1}{4}$	● b) $\frac{1}{3}$	c) -2

129 ● 16 cm

149 ● 3 m

166 ● 2 km/h

139 ● je 300 Nüsse

147 Fr. 483.80; 18%

8.10 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 1 ex-note
Siehe Lehrerversion des Skripts.

Lösung zu Aufgabe 2 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-124
(bitte melden, falls ausführliche Lösung gewünscht)

a) 12 b) 39 c) 40 d) $-1,75 = -\frac{7}{4}$

(4)

Lösung zu Aufgabe 3 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-127
77
(bitte melden, falls ausführliche Lösung gewünscht)

Lösung zu Aufgabe 4 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-132
8
(bitte melden, falls ausführliche Lösung gewünscht)

Lösung zu Aufgabe 5 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-138
Simones Alter heute: x (gemessen in der Einheit Jahre). In 7 Jahren: $x+7$.

Alter Simones Tante heute: $5x$. In 7 Jahren: $5x+7$.

$$\begin{aligned} 3(x+7) &= 5x+7 \\ 3x+21 &= 5x+7 && \mid -3x-7 \\ 14 &= 2x && \mid :2 \\ 7 &= x \end{aligned}$$

Simone ist heute 7 Jahre alt.

Lösung zu Aufgabe 6 ex-komplexere-lineare-gleichungen

a)
$$\begin{aligned} \frac{4x-5}{3} - \frac{2x-3}{6} &= \frac{x}{2} - 1 && \mid \cdot 6 \\ 2(4x-5) - (2x-3) &= 3x-6 \\ 8x-10-2x+3 &= 3x-6 \\ 6x-7 &= 3x-6 && \mid -3x+7 \\ 3x &= 1 && \mid :3 \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 4x(x-1) &= (2x-1)^2-1 & \\ 4x^2-4x &= 4x^2-4x+1-1 & \quad &| -4x^2+4x \\ 0 &= 0 & \\ \text{Also } \mathbb{L} &= \mathbb{R} & \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{8x-3}{8}-\frac{8+3x}{3} &= 0 & \quad &| \cdot 24 \\ 3(8x-3)-8(8+3x) &= 0 & \\ 24x-9-(64+24x) &= 0 & \\ 24x-9-64-24x &= 0 & \\ -73 &= 0 & \\ \text{Also } \mathbb{L} &= \varnothing & \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-128

Unbekannte Zahl: z, Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{N}$.

Ziffer 3 links hinzufügen ergibt: $300 + z$

Ziffer 3 rechts hinzufügen ergibt: $10z + 3$

Unterschied der Zahlen ist 333, also zwei Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} 300+z-(10z+3) &= 333 & \\ 297-9z &= 333 & \quad &| -297 \\ -9z &= 36 & \quad &| : (-9) \\ z &= -4 & \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \varnothing$ (da -4 nicht natürlich ist).

$$\begin{aligned} 10z+3-(300+z) &= 333 & \\ 9z-297 &= 333 & \quad &| +297 \\ 9z &= 630 & \quad &| : 9 \\ z &= 70 & \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \{70\}$. Da nur Äquivalenzumformungen durchgeführt wurden, ist keine Probe nötig. Um Rechenfehler zu entdecken, ist die Probe aber trotzdem sinnvoll: 703-370=333.

Lösung zu Aufgabe 8 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-144

Erster Teil des Kapitals in Frankeng: x [Franken]. Jahreszins davon: $0.06x$.

Zweiter Teil des Kapitals: $70350 - x$ [Franken]. Jahreszins davon $0.05(70350 - x)$.

$$\begin{aligned} 0.06x+0.05(70350-x) &= 4100 & \\ 0.01x+3517.5 &= 4100 & \quad &| -3517.5 \\ 0.01x &= 582.5 & \quad &| : 0.01 \\ x &= 58250 & \end{aligned}$$

Der zu 6% verzinste Teil beträgt 58250 Franken, der zu 5% verzinste Teil 12100 Franken.

Lösung zu Aufgabe 9 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-163

Gesuchte in Uhrzeit in Minuten nach 16 Uhr: x [min]

Winkel des Minutenzeigers: $6x$ [°] (da eine Minute einem Winkel von $\frac{360}{60}^\circ = 6^\circ$ entspricht; Winkelweite ab Zeigerstellung senkrecht nach oben)

Winkel des Stundenzeigers: $120 + \frac{1}{2}x$ [°] (16 Uhr oder 4 Uhr entspricht 120°, pro Stunde 30°, also pro Minute 0.5°.)

Unterschied der Winkel muss 90 [°] sein. Es gibt also zwei Möglichkeiten:

$$
\begin{aligned}
6x-(120+\frac{1}{2}x) &= 90 \\
\frac{11}{2}x-120 &= 90 && \mid +120 \\
\frac{11}{2}x &= 210 && \mid : \frac{11}{2} \\
x &= \frac{420}{11} \approx 38.182
\end{aligned}
$$

Der rechte Winkel entsteht ungefähr zur Zeit 16:38:10.91 (denn $\frac{420}{11} = 38 + \frac{2}{11}$ und $\frac{2}{11} \cdot 60 = 10.\overline{90}$).

$$
\begin{aligned}
120+\frac{1}{2}x-6x &= 90 \\
-\frac{11}{2}x+120 &= 90 && \mid -90+\frac{11}{2}x \\
30 &= \frac{11}{2}x && \mid : \frac{11}{2} \\
x &= \frac{60}{11} \approx 5.455
\end{aligned}
$$

Der rechte Winkel entsteht ungefähr zur Zeit 16:05:27.27.

Lösung zu Aufgabe 10 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-165

Fahrzeit des Zugs A bis zur Begegnung: x [h]

Fahrzeit des Zugs B bis zur Begegnung: $x-\frac{1}{4}$ [h]

Zurückgelegte Strecke von A ($s = v \cdot t$): $72x$ [km]

Zurückgelegte Strecke von B ($s = v \cdot t$): $88\left(x-\frac{1}{4}\right)$ [km]

$$
\begin{aligned}
72x+88\left(x-\frac{1}{4}\right) &= 120 \\
160x-22 &= 120 && \mid +22 \\
160x &= 142 && \mid : 160 \\
x &= 0.8875\,\mathrm{h} = 53.25\,\mathrm{min}
\end{aligned}
$$

Die Züge begegnen sich nach 53 Minuten und 15 Sekunden, also um 15:53 Uhr und 15 Sekunden.

Lösung zu Aufgabe 11 ex-note-parameter

Siehe Lehrerversion des Skripts.

Lösung zu Aufgabe 12 ex-note-zwei-parameter

Gesucht ist in jeder Teilaufgaben eine Punktzahl x, so dass die Gleichung $1+5\cdot\frac{x}{b} = n$ für die angegebenen Parameter «Note» n und «für Note 6 nötige Punktzahl» b gilt. Wir lösen diese Gleichung nach der Lösungsvariablen x auf:

$$
\begin{aligned}
1+5\cdot\frac{x}{b} &= n \\
b+5x &= bn \\
5x &= bn-b = b(n-1) \\
x &= \frac{b}{5}(n-1)
\end{aligned}
$$

Nun lösen wir die drei Teilaufgaben:

(a) Für $n=4$ und $b=100$ ist die benötigte Punktzahl $x=\frac{b}{5}(n-1)=\frac{100}{5}(4-1)=60$.

(b) Für $n=5$ und $b=30$ ist die benötigte Punktzahl $x=\frac{b}{5}(n-1)=\frac{30}{5}(5-1)=24$.

(c) Für $n=5.5$ und $b=20$ ist die benötigte Punktzahl $x=\frac{b}{5}(n-1)=\frac{20}{5}(5.5-1)=18$.

Lösung zu Aufgabe 13 ex-gleichungen-mit-parametern-ohne-diskussion

a)

$$
\begin{aligned}
qx-x &= q^2-1 \\
x(q-1) &= (q+1)(q-1) && \mid : (q-1) \\
x &= q+1
\end{aligned}
$$

b)
$$\begin{aligned}
2(bz-cz) &= z+bz-c \\
2bz-2cz &= z+bz-c && \mid -z-bz \\
2bz-2cz-z-bz &= -c \\
z(2b-2c-1-b) &= -c \\
z(b-2c-1) &= -c && \mid :(b-2c-1) \\
z &= -\frac{c}{b-2c-1}
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
(y-3p)^2 &= 2y(y+3p)-y(y-1) \\
y^2-6py+9p^2 &= 2y^2+6py-(y^2-y) \\
y^2-6py+9p^2 &= y^2+6py+y && \mid -y^2-6py-y-9p^2 \\
-12py-y &= -9p^2 \\
y(-12p-1) &= -9p^2 && \mid :(-12p-1) \\
y &= \frac{9p^2}{12p+1}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 14 ex-gleichungen-mit-parametern-mit-diskussion

a)
$$\begin{aligned}
ax+b &= 3 \\
ax &= 3-b
\end{aligned}$$

Fall 1: Normalfall $a \neq 0$. Lösung $x = \frac{3-b}{a}$.
Fall 2: Spezialfall $a = 0$. Unsere Gleichung lautet dann $0 = 3-b$.
  Fall 2.1: $b \neq 3$. $\mathbb{L} = \varnothing$.
  Fall 2.2: $b = 3$. $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

b)
$$\begin{aligned}
px-5 &= 2x+q && \mid -2x+5 \\
px-2x &= q+5 \\
x(p-2) &= q+5
\end{aligned}$$

Fall 1: Normalfall $p-2 \neq 0$. Lösung $x = \frac{q+5}{p-2}$.
Fall 2: Spezialfall $p-2=0$**, also** $p=2$**.** Unsere Gleichung lautet $0 = q+5$.
  Fall 2.1: $q \neq -5$. $\mathbb{L} = \varnothing$.
  Fall 2.2: $q = -5$. $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

c)
$$\begin{aligned}
p^2x-px &= p^2-1 \\
x(p^2-p) &= p^2-1
\end{aligned}$$

Fall 1: Normalfall $p^2-p \neq 0$**, d.h.** $p(p-1) \neq 0$**, d.h.** $p \neq 0$ **und** $p \neq 1$**.**
Lösung $x = \frac{p^2-1}{p^2-p} = \frac{(p+1)(p-1)}{p(p-1)} = \frac{p+1}{p}$.
Fall 2: Spezialfall $p = 0$. Unsere Gleichung lautet $0 = -1$, also $\mathbb{L} = \varnothing$.
Fall 3: Spezialfall $p = 1$. Unsere Gleichung lautet $0 = 0$, also $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

Lösung zu Aufgabe 15 ex-drei-mittelwerte-beispiele

(a) Bei Geschwindigkeit v_1 benötigt der Velofahrer die Zeit $t_1 = \frac{s}{v_1}$ für die Strecke s.
Bei Geschwindigkeit v_2 benötigt der Velofahrer die Zeit $t_2 = \frac{s}{v_2}$ für die Strecke s.
Insgesamt benötigt er für die Strecke $2s$ also die Zeit $t_1+t_2 = \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}$. Die Durchschnittsgeschwindigkeit

beträgt also

$$v_{\text{Durchschnitt}} = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_2 + v_1} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$$

Dies ist das harmonische Mittel von v_1 und v_2.
Diesen Ausdruck kann man auch als $\frac{1}{\frac{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}{2}}$ schreiben, also als Kehrwerte des arithmetischen Mittels der Kehrwerte von v_1 und v_2.

(b) Während der Fahrt mit Geschwindigkeit v_1 legt er die Strecke $s_1 = v_1 t$ zurück, während der Fahrt mit Geschwindigkeit v_2 die Strecke $s_2 = v_2 t$. Da er insgesamt die Strecke $s_1 + s_2$ in der Zeit $2t$ zurücklegt, ist die Durschschnittsgeschwindigkeit

$$v_{\text{Durchschnitt}} = \frac{s_1 + s_2}{2t} = \frac{v_1 t + v_2 t}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Dies ist das arithmetische Mittel von v_1 und v_2.

(c) Antworten stehen bereits oben.

Lösung zu Aufgabe 16 ex-gleichungen-mit-wurzeln-und-logarithmen

(a)

$$\begin{aligned} \frac{2}{5}x - \frac{7}{2} &= \left(\frac{x}{3} + 6\right) \cdot 5 && \mid \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \\ 12x - 105 &= (10x + 180) \cdot 5 \\ 12x - 105 &= 50x + 900 \\ -1005 &= 38x \\ -\frac{1005}{38} &= x \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \sqrt{3}x + \ln(7) &= \ln(3)x + \sqrt{6} \\ \sqrt{3}x - \ln(3)x &= \sqrt{6} - \ln(7) \\ x\big(\sqrt{3} - \ln(3)\big) &= \sqrt{6} - \ln(7) \\ x &= \frac{\sqrt{6} - \ln(7)}{\sqrt{3} - \ln(3)} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{5}x - \frac{\ln(7)}{2} &= \ln(3)x + \sqrt[3]{6} && \mid \cdot 5 \cdot 2 \\ 2\sqrt{3}x - 5\ln(7) &= 10\ln(3)x + 10\sqrt[3]{6} \\ 2\sqrt{3}x - 10\ln(3)x &= 10\sqrt[3]{6} + 5\ln(7) \\ \big(2\sqrt{3} - 10\ln(3)\big)x &= 10\sqrt[3]{6} + 5\ln(7) \\ x &= \frac{10\sqrt[3]{6} + 5\ln(7)}{\big(2\sqrt{3} - 10\ln(3)\big)} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 17 ex-lineare-wurzel-gleichungen

a)

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+1} &= \sqrt{4x-1} \\ 3x + 1 &= 4x - 1 && \mid -3x + 1 \\ 2 &= x \end{aligned}$$

Probe:

$$(\text{linke Seite}) = \sqrt{3 \cdot 2 + 1} = \sqrt{7} \stackrel{?}{=} (\text{rechte Seite}) = \sqrt{4 \cdot 2 - 1} = \sqrt{7}.$$

Die fragliche Gleichheit gilt, d.h. $\mathbb{L} = \{2\}$.

b)
$$\begin{aligned} \sqrt{x-5} &= \sqrt{7-x} && |(\cdot)^2 \\ x-5 &= 7-x && |+x+5 \\ 2x &= 12 && |:2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{6-1} = \sqrt{1} \stackrel{?}{=} \sqrt{7-6} = \sqrt{1}$. Also $\mathbb{L} = \{6\}$.

c)
$$\begin{aligned} 0 &= \sqrt{8-5x} - \sqrt{2x-6} && |+\sqrt{2x-6} \\ \sqrt{2x-6} &= \sqrt{8-5x} && |(\cdot)^2 \\ 2x-6 &= 8-5x && |+5x+6 \\ 7x &= 14 && |:7 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Probe: Die linke Seite $\sqrt{2\cdot 2-6} = \sqrt{4-6} = \sqrt{-2}$ ist nicht definiert (dasselbe gilt für die rechte Seite). Also $\mathbb{L} = \{\} = \varnothing$.

d)
$$\begin{aligned} 10\sqrt{40-x} &= 40\sqrt{10-x} && |:10 \\ \sqrt{40-x} &= 4\sqrt{10-x} && |(\cdot)^2 \\ 40-x &= 16(10-x) \\ 40-x &= 160-16x && |-40+16x \\ 15x &= 120 && |:15 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Probe: Linke Seite $= 10\sqrt{40-8} = 10\sqrt{32} = 10\cdot\sqrt{16}\cdot\sqrt{2} = 40\sqrt{2}$, rechte Seite $= 40\sqrt{2}$. Also $\mathbb{L} = \{8\}$.

Lösung zu Aufgabe 18 ex-lineare-bruch-gleichungen

a)
$$\begin{aligned} \frac{5x}{2x-3} &= \frac{3x-10}{2x-3} && |\cdot(2x-3) \\ 5x &= 3x-10 && |-3x \\ 2x &= -10 && |:2 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Um zu testen, ob dies auch eine Lösung der Ausgangsgleichung ist, müssen wir den Nenner $2x-3$ ausrechnen: $2\cdot(-5)-3 = -13 \neq 0$. Also $\mathbb{L} = \{-5\}$.

b)
$$\begin{aligned} \frac{2x}{7x-1} &= \frac{2-10x}{14x-2} && |\cdot 2\cdot(7x-1) \\ 2\cdot 2x &= 2-10x && |+10x \\ 14x &= 2 && |:14 \\ x &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Nenner-Probe: $7\cdot\frac{1}{7}-1 = 0$, also ist $x = \frac{1}{7}$ keine Lösung der Ursprungsgleichung und damit $\mathbb{L} = \varnothing$.

c)
$$\begin{aligned} \frac{5x}{2x-3} &= \frac{5x-10}{2x-3} && |\cdot(2x-3) \\ 5x &= 5x-10 && |-5x \\ 0 &= -10 \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \varnothing$

Lösung zu Aufgabe 19 ex-spezielle-nichtlineare-gleichungen

a)
$$(2x+7)\cdot(5x-8)\cdot(x^2+1)=0$$

Damit das Produkt Null ist, muss einer der Faktoren Null sein:

$$\begin{aligned} 2x+7&=0 &\quad\text{oder}\quad& & 5x-8&=0 &\quad\text{oder}\quad& & x^2+1&=0\\ x&=-\frac{7}{2} & & & x&=\frac{8}{5} & & & x^2&=-1\\ \mathbb{L}_1&=\{-\frac{7}{2}\} & & & \mathbb{L}_2&=\{\frac{8}{5}\} & & & \mathbb{L}_3&=\varnothing \end{aligned}$$

Und damit: $\mathbb{L}=\{-\frac{7}{2},\frac{8}{5}\}$

b)
$$(x+4)(x^2-4)=0$$

Damit das Produkt Null ist, muss einer der Faktoren Null sein:

$$\begin{aligned} x+4&=0 &\quad\text{oder}\quad& & x^2-4&=0\\ x&=-4 & & & x^2&=4 \end{aligned}$$

Und damit: $\mathbb{L}=\{-4,-2,2\}$.

c)
$$\begin{aligned} x^3-2x^2+x&=0\\ x(x^2-2x+1)&=0\\ x(x-1)^2&=0 \end{aligned}$$

Damit das Produkt Null ist, muss einer der Faktoren Null sein (wobei ein Faktor zweifach vorkommt):

$$x=0 \qquad\text{oder}\qquad x-1=0$$

Und damit: $\mathbb{L}=\{0,1\}$.

d)
$$\begin{aligned} x\cdot(x+6)&=-9 && |+9\\ x^2+6x+9&=0\\ (x+3)^2&=0\\ x+3&=0\\ x&=-3 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} \sqrt{2x+1}&=x+1 && |(\cdot)^2\\ 2x+1&=x^2+2x+1 && |-2x-1\\ 0&=x^2\\ x&=0 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{1+2\cdot 0}=0+1$, also $\sqrt{1}=1$, also $1=1$, wahre Aussage. Also ist $\mathbb{L}=\{0\}$.

Lösung zu Aufgabe 20 ex-ausklammern-und-dann-linear

a)
$$\begin{aligned} x(x+2) &= x - x^2 && \mid \text{rechts } x \text{ ausklammern} \\ x(x+2) &= x(1-x) \end{aligned}$$

Nach der Merke-Box vor der Aufgabe (mit $T = x$ und $R = x+2$ und $S = 1-x$) ist dies gleichbedeutend zu:

(Man kann es sich auch so merken: Wenn man beide Seiten durch x teilt, kommt $x+2 = 1-x$ heraus; jedoch muss man den Fall $x = 0$ gesondert betrachten, denn man darf nicht durch Null teilen.)

$$\begin{aligned} x+2 &= 1-x && \text{oder} && x = 0 \\ 2x &= -1 && \text{oder} && x = 0 \\ x &= -\frac{1}{2} && \text{oder} && x = 0 \end{aligned}$$

Also $\mathbb{L} = \{-\frac{1}{2}, 0\}$.

b)
$$(x+2)(7-x) = (x-3)(x+2)$$

Nach der Merke-Box vor der Aufgabe (mit $T = x+2$ und $R = 7-x$ und $S = x-3$) ist äquivalent:

(Per Division durch $x+2$ erhalten wir die erste der folgenden Gleichungen, jedoch unter der Bedingung $x+2 \neq 0$; den Fall $x+2 = 0$ muss man separat betrachten.)

$$\begin{aligned} 7-x &= x-3 && \text{oder} && x+2 = 0 \\ -2x &= -10 && \text{oder} && x = -2 \\ x &= 5 && \text{oder} && x = -2 \end{aligned}$$

Also $\mathbb{L} = \{-2, 5\}$.

c)
$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= 1 - 2x + x^2 && \mid \text{links dritte und rechts zweite binomische Formel verwenden} \\ (1-x)(1+x) &= (1-x)^2 \end{aligned}$$

Merke-Box mit $T = 1-x$ und $R = 1+x$ und $S = 1-x$:

$$\begin{aligned} 1+x &= 1-x && \text{oder} && 1-x = 0 \\ 2x &= 0 && \text{oder} && 1 = x \\ x &= 0 && \text{oder} && x = 1 \end{aligned}$$

Also $\mathbb{L} = \{0, 1\}$.

d)
$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 3 - 2x - x^2 && \mid \text{links dritte binomische Formel, rechts kann } (1-x) \text{ ausklammern!} \\ (x+1)(x-1) &= (1-x)(3+x) \\ (x+1)(-1)(1-x) &= (1-x)(3+x) \\ (-x-1)(1-x) &= (1-x)(3+x) \end{aligned}$$

Merke-Box mit $T = 1-x$ und $R = -x-1$ und $S = 3+x$:

$$\begin{aligned} -x-1 &= 3+x && \text{oder} && 1-x = 0 \\ -2x &= 4 && \text{oder} && 1 = x \\ x &= -2 && \text{oder} && x = 1 \end{aligned}$$

Also $\mathbb{L} = \{-2, 1\}$.

Lösung zu Aufgabe 21 ex-wurzelziehen-und-dann-linear

a)
$$\begin{aligned}(x+3)^2 &= 25\\(x+3)^2 &= 5^2\end{aligned}$$

Dies ist nach der Merke-Box vor der Aufgabe (mit $S = x+3$ und $T = 5$) gleichbedeutend zu:

$$\begin{aligned}x+3 &= 5 &\quad\text{oder}\quad && x+3 &= -5\\ x &= 2 &\quad\text{oder}\quad && x &= -8\end{aligned}$$

Also $\mathbb{L} = \{-8, 2\}$.

b)
$$(x+3)^2 = -9$$

Für jeden Wert von x ist $(x+3)^2$ als Quadrat nicht-negativ und somit nie -9. Also gibt es keine Lösung, d. h. $\mathbb{L} = \varnothing$.

c)
$$\begin{aligned}(x+3)^4 &= 81 &\quad& \mid \text{Potenzgesetz links}\\((x+3)^2)^2 &= 9^2\end{aligned}$$

Dies ist nach der Merke-Box mit $S = (x+3)^2$ und $T = 9$ äquivalent zu:

$$\begin{aligned}(x+3)^2 &= 9 &\quad\text{oder}\quad&& (x+3)^2 &= -9 &\quad& \text{(rechte Gleichung hat keine Lösung)}\\(x+3)^2 &= 3^2\end{aligned}$$

Merke-Box mit $S = x+3$ und $T = 3$:

$$\begin{aligned}x+3 &= 3 &\quad\text{oder}\quad && x+3 &= -3\\ x &= 0 &\quad\text{oder}\quad && x &= -6.\end{aligned}$$

Also $\mathbb{L} = \{-6, 0\}$.

d)
$$(x-3)^2 = (x+1)^2$$

Geht auch direkt durch Ausmultiplizieren und Ausrechnen, denn dann kann man links und rechts den Term x^2 abziehen.

Merke-Box mit $S = x-3$ und $T = x+1$:

$$\begin{aligned}x-3 &= x+1 &\quad\text{oder}\quad && x-3 &= -(x+1)\\ 0 &= 4 &\quad\text{oder}\quad && x-3 &= -x-1\\ 0 &= 1 &\quad\text{oder}\quad && 2x &= 2\\ 0 &= 1 &\quad\text{oder}\quad && x &= 1\end{aligned}$$

(Die linke Gleichung hat keine Lösung.) Also $\mathbb{L} = \{1\}$.

e) Geht auch durch Ausmultiplizieren links und ausrechnen, denn die beiden x^2 heben sich auf.

$$\begin{aligned}(x-2)^2 &= x^2+6x+9 &\quad& \mid \text{rechts erste binomische Formel}\\(x-2)^2 &= (x+3)^2\end{aligned}$$

Merke-Box mit $S = x-2$ und $T = x+3$:

$$\begin{aligned}x-2 &= x+3 &\quad\text{oder}\quad && x-2 &= -(x+3)\\ -5 &= 0 &\quad\text{oder}\quad && x-2 &= -x-3\\ 1 &= 0 &\quad\text{oder}\quad && 2x &= -1\\ 1 &= 0 &\quad\text{oder}\quad && x &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Also $\mathbb{L} = \{-\frac{1}{2}\}$ (da links keine Lösung).

f)
$$(x-1)^2 \cdot (x+2)^2 = (x^2+7x+2)^2 \qquad \mid \text{Potenzgesetz links}$$
$$\Big((x-1)\cdot(x+2)\Big)^2 = (x^2+7x+2)^2$$

Merke-Box mit $S=(x-1)(x+2)$ und $T=x^2+7x+2$.

$$\begin{aligned}
(x-1)(x+2) &= x^2+7x+2 && \text{oder} && (x-1)(x+2) = -(x^2+7x+2)\\
x^2+x-2 &= x^2+7x+2 && \text{oder} && x^2+x-2 = -x^2-7x-2\\
-4 &= 6x && \text{oder} && 2x^2+8x = 0\\
6x &= -4 && \text{oder} && x^2+4x = 0\\
x &= -\tfrac{4}{6} && \text{oder} && x(x+4) = 0
\end{aligned}$$

Auf rechte Gleichung wende die Merke-Box „Produkt Null $\iff$ einer der Faktoren Null“ an:

$$\begin{aligned}
x &= -\tfrac{2}{3} && \text{oder} && x = 0 && \text{oder} && x+4 = 0\\
x &= -\tfrac{2}{3} && \text{oder} && x = 0 && \text{oder} && x = -4
\end{aligned}$$

Also $\mathbb{L} = \{-4, -\frac{2}{3}, 0\}$.

Lösung zu Aufgabe 22 ex-konsequenzen-produkt-null

a) „Korrektes Wurzelziehen“:

$$\begin{aligned}
T^2 = S^2 &\iff T^2 - S^2 = 0\\
&\iff (T-S)(T+S) = 0\\
&\overset{\text{Produkt-Null-Regel}}{\iff} T-S=0 \text{ oder } T+S=0\\
&\iff T=S \text{ oder } T=-S
\end{aligned}$$

b) „Division durch einen Term“:

$$\begin{aligned}
RT = ST &\iff RT - ST = 0\\
&\iff (R-S)T = 0\\
&\overset{\text{Produkt-Null-Regel}}{\iff} R-S=0 \text{ oder } T=0\\
&\iff R=S \text{ oder } T=0
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 23 ex-gleichungen-verstaendnis

Lösung zu Aufgabe 24 ex-gleichungen-kreieren

Die vorgeschlagenen Lösungen sind möglichst einfach gehalten. Die Gleichungen können durch Term- und Äquivalenzumformungen beliebig “verkompliziert” werden.

a) $\sqrt{x-42}=0$; Alternative: $\sqrt{x}=\sqrt{42}$

b) $\frac{42}{x}=1$ oder äquivalent $\frac{1}{x}=\frac{1}{42}$.
Oder $\frac{x-42}{x}=0$ oder $x-42=\frac{0}{x}$

c) $(x-1)(x-2)=0$ oder $17(x-1)^{2024}(x-2)^{42}=0$

d) Naheliegendstes Beispiel $(x-1)(x-5)(x+10)=0$

e) $x(a-23)=1$

f) $\sqrt{x}=-\sqrt{42}$

Lösung zu Aufgabe 25 ex-gleichungen-mit-parametern-mit-diskussion2

a)

$$\begin{aligned} a(x-1) &= 6(b+7x) \\ ax - a &= 6b + 42x \qquad && \mid -42x + a \\ ax - 42x &= 6b + a \\ x(a-42) &= 6b + a \end{aligned}$$

Fall 1: Normalfall $a \neq 42$**.** Lösung $x = \frac{6b+a}{a-42}$.
Fall 2: Spezialfall $a = 42$**.** Eingesetzt: $x \cdot 0 = 6b + 42$.
Fall 2.1: $6b + 42 = 0$**, d.h.** $b = -7$**.** Dann $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.
Fall 2.2: $b \neq -7$**.** Dann $\mathbb{L} = \varnothing$.

b)

$$\begin{aligned} a(x-3) &= xb - 2 \\ ax - 3a &= xb - 2 \qquad && \mid +3a - xb \\ ax - xb &= 3a - 2 \\ x(a-b) &= 3a - 2 \end{aligned}$$

Fall 1: Normalfall $a \neq b$**.** Lösung $x = \frac{3a-2}{a-b}$.
Fall 2: Spezialfall $a = b$**.** Eingesetzt: $x \cdot 0 = 3a - 2$.
Fall 2.1: $3a - 2 = 0$**, d.h.** $a = \frac{2}{3}$**.** In diesem Fall: $\mathbb{L} = \mathbb{R}$
Fall 2.2: $a \neq \frac{2}{3}$**.** Dann $\mathbb{L} = \varnothing$

c)

$$\begin{aligned} p(xp+1) &= 2(1+2x) \\ p^2x + p &= 2 + 4x \qquad && \mid -p - 4x \\ p^2x - 4x &= 2 - p \\ x(p^2 - 4) &= 2 - p \end{aligned}$$

Fall 1: Normalfall $p^2 - 4 \neq 0$**, d.h.** $p \neq -2$ **und** $p \neq +2$**.** In diesem Fall ist $x = \frac{2-p}{p^4-4} = \frac{-(p-2)}{(p+2)(p-2)} = -\frac{1}{p+2}$.
Fall 2: Spezialfall $p = -2$**.** Eingesetzt: $x \cdot 0 = 2 - (-2)$, also $0 = 4$, und damit $\mathbb{L} = \varnothing$.
Fall 3: Spezialfall $p = +2$**.** Eingesetzt: $x \cdot 0 = 2 - (+2)$, also $0 = 0$, und damit $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

d)

$$\begin{aligned} p(x+3) &= 5(p-x) \\ px + 3p &= 5p - 5x \qquad && \mid +5x - 3p \\ px + 5x &= 2p \\ x(p+5) &= 2p \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat genau dann genau eine Lösung, nämlich $\frac{2p}{p+5}$, wenn $p + 5 \neq 0$, also wenn $p \neq -5$. (Im Fall $p = -5$ lautet die Gleichung $x \cdot 0 = -10$, was keine Lösung hat.)

Lösung zu Aufgabe 26 ex-gleichungen-vermischt

a)

$$\begin{aligned} \sqrt{1-2x} &= x - 1 \qquad && \mid (\cdot)^2 \quad ⚠ \\ 1 - 2x &= x^2 - 2x + 1 \qquad && \mid +2x - 1 \\ 0 &= x^2 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{1 - 2 \cdot 0} \stackrel{?}{=} 0 - 1$, also $\sqrt{1} \stackrel{?}{=} -1$, also $1 \stackrel{?}{=} -1$; dies ist falsch. Also $\mathbb{L} = \{\} = \varnothing$.

b)

$$\begin{aligned}
\frac{2x-1}{2-x} - \frac{8-4x}{2x-1} &= 0 && |\cdot(2-x)(2x-1) \quad ⚠\\
(2x-1)^2 - 4(2-x)^2 &= 0\\
4x^2-4x+1-(16-16x+4x^2) &= 0\\
12x-15 &= 0\\
12x &= 15 && |:12\\
x &= \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Probe: Einsetzen (mühsam) oder festellen, dass im ersten Schritt mit einer Zahl ungleich Null multipliziert wurde (jetzt wo man x kennt), und es so tatsächlich eine Äquivalenzumformung war. Also $\mathbb{L} = \{\frac{5}{4}\}$.

c)

$$\begin{aligned}
a(x-2) &= b^2x\\
ax-2a &= b^2x && |+2a-b^2x\\
ax-b^2x &= 2a\\
x(a-b^2) &= 2a && |:(a-b^2)\\
x &= \frac{2a}{a-b^2}
\end{aligned}$$

(Spezialfall $a-b^2=0$ nicht diskutiert.)

d)

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sqrt{x}+1} &= 2 && |(\cdot)^2 \quad ⚠\\
\sqrt{x}+1 &= 4 && |-1\\
\sqrt{x} &= 3 && |(\cdot)^2 \quad ⚠\\
x &= 9
\end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{\sqrt{9}+1} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} \stackrel{?}{=} 2$. Das stimmt, also $\mathbb{L} = \{9\}$.

e)

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sqrt{x}+1} &= 0 && |(\cdot)^2 \quad ⚠\\
\sqrt{x}+1 &= 0 && |-1\\
\sqrt{x} &= -1 && |(\cdot)^2 \quad ⚠\\
x &= 1
\end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{\sqrt{1}+1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq 0$. Also $\mathbb{L} = \varnothing$.
Eigentlich hätte man schon bei der vorletzten Gleichung aufhören können, da eine Wurzel immer eine positive Zahl oder Null ergibt und diese Gleichung somit keine Lösung hat.

f)

$$\begin{aligned}
\frac{3x-2a}{x-a} &= \frac{3a-2x}{x-a} && |\cdot(x-a) \quad ⚠\\
3x-2a &= 3a-2x && |+2a+2x\\
5x &= 5a && |:5\\
x &= a
\end{aligned}$$

Probe: Man erhält in der Ausgangsgleichung eine Division durch Null. Also $\mathbb{L} = \varnothing$.

Lösung zu Aufgabe 27 ex-flaeche-quadrat-rechteck

Sei x die Länge der Quadratseite. Das Rechteck hat dann die Seitenlängen 18 und $x-4$ (in Zentimeter). Da Quadrat und Rechteck dieselbe Fläche haben, gilt $x^2 = 18(x-4)$. Ausmultiplizieren und alle Terme auf eine Seite bringen ergibt

$$x^2 - 18x + 72 = 0$$

Durch Ausprobieren der ganzzahligen Teiler von 72 erhält man die Lösung $x = 6$. Damit kann man die linke Seite faktorisieren und erhält

$$(x-6)(x-12) = 0$$

Die beiden Lösungen sind als $x = 6$ und $x = 12$.