Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

1 Einführung in die Mengenlehre

1.1 Axiome als Grundlagen der Mathematik

1.1.1. Die Mathematik ist die exakteste aller Wissenschaften. Man startet mit sehr wenigen «selbstverständlichen» Grundannahmen, den sogenannten **Axiomen**, und folgert daraus mit Hilfe logischer Schlussweisen möglichst viele mathematischen Sachverhalte.

Fast die gesamte moderne Mathematik kann auf 10 Axiome der **Mengenlehre** zurückgeführt werden. Siehe z.B. https://de.wikipedia.org/wiki/Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre. Die Zahlen mit ihrer Hilfe zu definieren ist zwar sehr spannend, aber auch langwierig und anspruchsvoll. Auch die 5 **Peano-Axiome**, die die natürlichen Zahlen charakterisieren, sind für unsere Zwecke zu abstrakt. Siehe z.B. https://de.wikipedia.org/wiki/Peano-Axiome.

Wir folgen deswegen eher dem historischen intuitiven Vorgehen.

Beispielsweise stellen wir uns Zahlen geometrisch als Punkte auf dem Zahlenstrahl vor.

1.2 Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

1.2.1. Fast jeder Mensch lernt, Dinge zu zählen («fünf Äpfel»), und verwendet dazu die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ... In diesem Sinne sind diese Zahlen etwas sehr «natürliches».

Die Zahl 0 ist anfänglich schwieriger zu erfassen: Warum sollte «Nichts» eine Zahl sein? Welches Kind spricht von «null Äpfeln»? Beim Zählen ist die Null aber mindestens genauso wichtig und «natürlich» wie die oben genannten Zahlen 1, 2, 3, ...

Definition 1.2.2 Natürliche Zahlen, die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

Die Zahlen

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

heissen **natürliche Zahlen**.
Wir fassen all diese Zahlen zu einem neuen Objekt zusammen, nennen diese Zusammenfassung die **Menge der natürlichen Zahlen** und bezeichnen sie mit dem Buchstaben $\mathbb{N}$. Man schreibt kurz

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Lies: «$\mathbb{N}$ ist die Menge mit den Elementen 0, 1, 2, 3, 4, usw.»

1.3 Mengen und Elemente

1.3.1. In der Alltagssprache verwenden wir viele verschiedene Begriffe, um gewisse Objekte zu einem neuen Objekt zusammenzufassen: ein Haufen Bücher, ein Stapel Blätter, eine Gruppe Kindergärtler, eine Klasse Gymnasiasten, eine Menge Geld, ...

In der Mathematik wird für solche Zusammenfassungen meist der Begriff der *Menge* verwendet. Der bedeutende Mathematiker Georg Cantor (1845-1918, siehe [Wik23, Georg Cantor]) hat diesen Begriff wie folgt definiert.

> *Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.*

Definition 1.3.2 Menge

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von Objekten (meist von Zahlen oder geometrischen Objekten wie Punkten, Dreiecken etc.), den sogenannten **Elementen** der Menge. Hierbei geht es *nur um die Zugehörigkeit* eines Objekts (und nicht um die Reihenfolge oder eventuelles mehrfaches Auftreten eines Objekts).

1.3.3. Man nennt eine Menge **endlich** bzw. **unendlich**, wenn sie aus endlich vielen bzw. unendlich vielen Elementen besteht.

Beispiele 1.3.4.
(a) Die Menge $\mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen.
(b) Die Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen.
(c) Die Menge aller Dreiecke.
(d) Die Menge aller gleichschenkligen Dreiecke.
(e) Die Menge aller Primzahlen kleiner-gleich 100. (Diese Menge ist endlich; die zuvor genannten Mengen sind unendlich.)

Merke 1.3.5 Element-Zeichen $\in$

Die Zugehörigkeit eines Objekts zu einer Menge wird mit dem Zeichen «$\in$» notiert (das Zeichen kommt vom griechischen Buchstaben Epsilon ε, das unserem e entspricht, und steht für «**E**lement»)
Die Nicht-Zugehörigkeit eines Objekts zu einer Menge wird mit dem Zeichen «$\notin$» notiert («durchgestrichenes Element-Zeichen»). Beispiele:

symbolisch:	$7 \in \mathbb{N}$	$\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$
Sprechweise:	«7 ist Element von $\mathbb{N}$»	«Wurzel 2 ist nicht Element von $\mathbb{N}$»
Kurzform:	«7 in $\mathbb{N}$»	«Wurzel 2 nicht in $\mathbb{N}$»

1.3.6. Zur konkreten Angabe einer Menge verwendet man ein Paar geschweifter Klammern «$\{$», «$\}$» und gibt dazwischen die Elemente der Menge an. Dabei gibt es
- die **aufzählende Form**: explizite Angabe aller Elemente;
- die **beschreibende Form**: Die Elemente werden durch eine Eigenschaft charakterisiert, die rechts von einem vertikalen Strich «$|$» steht.

Aufzählende Form	**Beschreibende Form**
$\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ «Die Menge mit den Elementen 0, 2, 4, 6, usw.»	$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gerade}\}$ «Die Menge aller x in $\mathbb{N}$, für die gilt: x ist gerade.»
$\{10, 11, 12, \ldots, 18, 19\}$ «Die Menge mit den Elementen 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.»	$\{k \in \mathbb{N} \mid 10 \leq k \leq 19\}$ «Die Menge aller natürlichen Zahlen k, für die gilt: 10 ist kleiner-gleich k und k ist kleiner-gleich 19.»
$\{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$ «Die Menge mit den Elementen 0, 1, 4, 9, 16, usw.»	$\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ «Die Menge aller n^2, wobei n alle natürlichen Zahlen durchläuft.

Beispiel 1.3.7. Die Menge $\{\}$, die überhaupt kein Element enthält, heisst **leere Menge**. Meist wird sie als $\varnothing$ geschrieben, es gilt also

$$\varnothing = \{\}$$

Definition 1.3.8 Gleichheit von Mengen

Wir nennen zwei Mengen A und B **gleich**, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.
Schreibweise: $A = B$
Sprechweise: «A (ist) gleich B»

1.3.9. Beachten Sie, dass es bei einer Menge nur auf die Zugehörigkeit ankommt!
- Die Reihenfolge spielt keine Rolle: $\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\} = \{2, 1, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{3, 1, 2\} = \{3, 2, 1\}$
- Es spielt keine Rolle, ob ein Element mehrfach auftritt: $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 3, 3, 1, 2, 3\}$

Und noch ein Beispiel:

$$\{1,2,3,6\} = \{6,3,1,2\} = \{3,3,1,6,2,3,6,2,2\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 1 \text{ oder } x = 2 \text{ oder } x = 3 \text{ oder } x = 6\}$$
$$= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Teiler von } 6\}$$

1.3.10. Wir beschränken uns auf Mengen, deren Elemente mathematische Objekte sind, d. h. arithmetische Objekte wie Zahlen oder geometrische Objekte wie Punkte, Geraden, Dreiecke, ...

Der Grund dafür ist, dass «umgangssprachlich definierte Mengen» oft keine Mengen im mathematisch strengen Sinne sind, denn oft ist nicht klar, welche Objekte dazugehören:

Die Menge aller attraktiven jungen Männer.	Hier müsste man zuvor genau sagen, was «attraktiv», «jung» und «Mann» bedeuten.
Die Menge aller Schönwettertage dieses Sommers.	«Schönes Wetter» ist nicht wohldefiniert: Badi-Besucher verstehen darunter etwas anderes als Bauern oder Tornado-Hunter.

Aufgabe A1 Schreiben Sie folgende Mengen in aufzählender und beschreibender Form:

a) Die Menge aller Primzahlen.
b) Die Menge aller Vielfachen von 37.
c) Die Menge aller Kubikzahlen, die kleiner als 1111 sind.
d) Die Menge aller Zweierpotenzen.
e) Die Menge aller Primzahlen, die durch 13 teilbar sind.
f) Die Menge aller Primzahlen, die durch 91 teilbar sind.

Definition 1.3.11

Sei A eine Menge. Die Anzahl der Elemente von A heisst **Mächtigkeit** oder **Kardinalität von** A und wird wie folgt notiert:

$$|A|$$

Ist A eine unendliche Menge, so schreibt man $|A| = \infty$. Das Symbol ∞ (eine Art liegende Acht) steht für «unendlich».

Ausblick 1.3.12. Wir werden sehen, dass es in der Mathematik verschiedene Arten der Unendlichkeit gibt.

Aufgabe A2 Bestimmen Sie die Mächtigkeit der folgenden Mengen! Verwenden Sie die Schreibweise mit den beiden senkrechten Strichen aus der obigen Definition.

a) $A = \{1,2,3,4\}$
b) $B = \{0,1,2\}$
c) $C = \varnothing$
d) $D = \mathbb{N}$
e) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine einstellige Primzahl}\}$
f) $F = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 \leq x \leq 20\}$

Definition 1.3.13

Seien A und B Mengen. Dann heisst A **Teilmenge von** B, wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist. In diesem Fall schreibt man

$$A \subset B$$

Sprechweisen: «A ist in B enthalten» oder «A ist Teilmenge von B» oder «B ist **Obermenge** von A».
Die Negation (= Verneinung) dieser Aussage wird als $A \not\subset B$ notiert: Es gibt mindestens ein Element von A, das nicht Element von B ist.

Beispiele 1.3.14.

- Die Menge aller Primzahlen ist eine Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen.
- $\{0,7,1234\} \subset \mathbb{N}$.
- $\{3,7,19\} \subset \{19,3,7\}$
- $\varnothing \subset \{4,5,6\} \subset \mathbb{N}$
- $\{0,1,\sqrt{2},2,3,4\} \not\subset \mathbb{N}$

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Aufgabe A3 Gegeben ist die Menge $X = \{0, 2, 3, 4\}$. Entscheiden Sie für jede der folgenden Mengen, ob sie eine Teilmenge von X ist oder nicht und schreiben Sie dies mit Hilfe des Zeichens «$\subset$» bzw. «$\not\subset$» auf.

a) $\{0\}$ b) $\{1\}$ c) $\{2\}$ d) $\{0, 4\}$

e) $\{1, 3, 5\}$ f) $\{2, 3, 4\}$ g) $\{0, 1, 2, 3\}$ h) $\{0, 7-4, 4, \frac{6}{3}\}$

i) $\varnothing$ j) X k) $\mathbb{N}$ l) $\{\}$

Aufgabe A4 Wenn X und Y Mengen sind: Was bedeutet es, wenn sowohl $X \subset Y$ als auch $Y \subset X$ gelten?

Aufgabe A5

a) Die Menge $A = \{1, 2\}$ hat genau vier Teilmengen. Bestimmen Sie diese!

b) Bestimmen Sie alle Teilmengen der Menge $B = \{0, 1, 2, 3\}$.

c) Ergänzen Sie das folgende Theorem (was ist beim Stiftsymbol einzutragen?) und beweisen Sie es!

Theorem 1.3.15

Jede (endliche) Menge mit n Elementen hat genau ✎ Teilmengen. Beweis: Siehe Lösung von Aufgabe 5.(c)

1.4 Mengendiagramme

1.4.1. Mit Mengendiagrammen kann man die Mengenlehre graphisch veranschaulichen. Man stellt sich dabei Mengen als Regionen in der Ebene vor und Punkte dieser Regionen als Elemente der entsprechenden Mengen.

✎

A = Menge aller Vierecke
B = Menge aller Rechtecke
C = Menge aller Rauten
D = Menge aller Quadrate
E = Menge aller Parallelogramme

Aufgabe A6 Erstelle ein Mengendiagramm für die folgenden Mengen:

G = Menge aller Dreiecke
A = Menge aller rechtwinkligen Dreiecke
B = Menge aller gleichseitigen Dreiecke
C = Menge aller gleichschenkligen Dreiecke

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

1.5 Mengenoperationen – Konstruktion neuer Mengen aus bekannten Mengen

1.5.1. In den folgenden Definitionen sind A und B beliebige Mengen.

Definition 1.5.2 Schnitt

Die Menge

$$A \cap B \overset{\text{Definition}}{=} \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

aller Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind, wird der **Schnitt von A und B** genannt.
Sprechweise: «A geschnitten B»

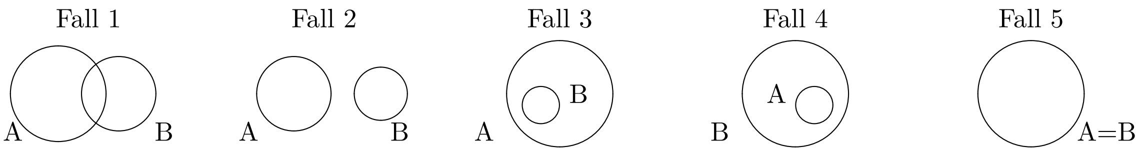


Abbildung 1: Markiere jeweils den Schnitt $A \cap B$.

Definition 1.5.3 Vereinigung

Die Menge

$$A \cup B \overset{\text{Def.}}{=} \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

aller Elemente, die in A oder in B enthalten sind, wird als **Vereinigung von A und B** bezeichnet.
Sprechweise: «A vereinigt B»

1.5.4. Beachte: Die Aussage «$x \in A$ oder $x \in B$» ist wahr, falls **mindestens eine** der beiden Teilaussagen «$x \in A$», «$x \in B$» wahr ist. Also auch dann, wenn beide Teilaussagen wahr sind.

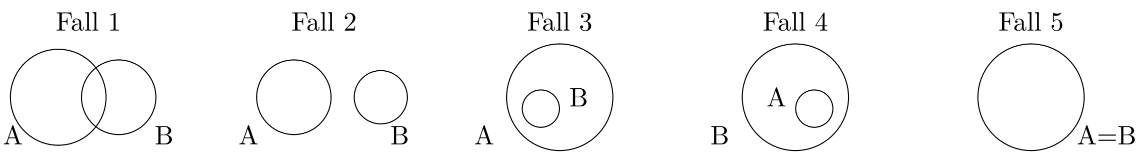


Abbildung 2: Markiere jeweils die Vereinigung $A \cup B$.

Definition 1.5.5 Differenzmenge

Die Menge

$$A \setminus B \overset{\text{Def.}}{=} \{x \in A \mid x \notin B\}$$

aller Elemente von A, die nicht in B liegen, heisst **Differenzmenge A ohne B**.
Sprechweise: «A ohne B»

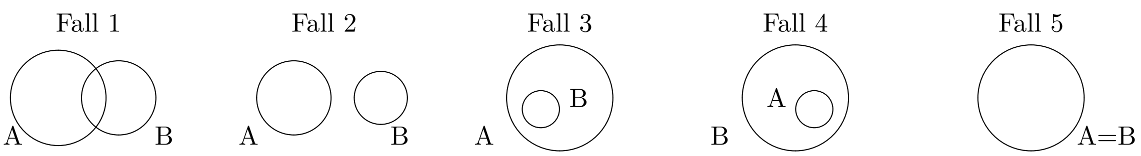


Abbildung 3: Markiere jeweils die Differenzmenge $A \setminus B$.

Definition 1.5.6 Komplement (Spezialfall einer Differenzmenge bezüglich einer Grundmenge)

Oft arbeitet man mit einer fixierten Menge G, der sogenannten *Grundmenge*.
Ist A eine beliebige Teilmenge einer Grundmenge G, in Formeln $A \subset G$, so heisst

$$\overline{A} \stackrel{\text{Def.}}{=} G \setminus A = \{x \in G \mid x \notin A\}$$

Komplement von A in G. Komplement bedeutet Ergänzungsmenge: Was fehlt noch zur Grundmenge?
Sprechweise: «A Komplement»

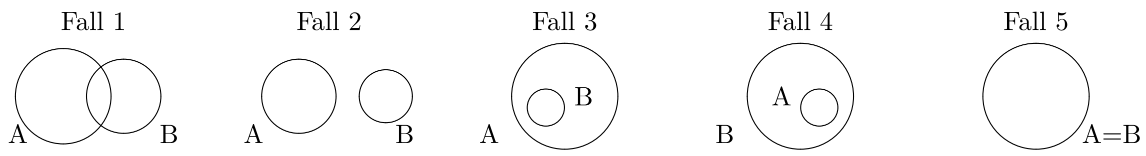


Abbildung 4: Markiere jeweils das Komplement $\overline{A}$, wobei G jeweils durch einen sehr grossen, nicht eingezeichneten Kreis gegeben ist. Spielt B eine Rolle?

Aufgabe A7 Gegeben sind die Mengen $A = \{3, 5, 6, 8, 9\}$, $B = \{6, 7, 9, 10, 11\}$ und $G = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 12\}$. Geben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Form an!

a) $A \cap B$
b) $A \cup B$
c) $A \setminus B$
d) $\overline{A}$

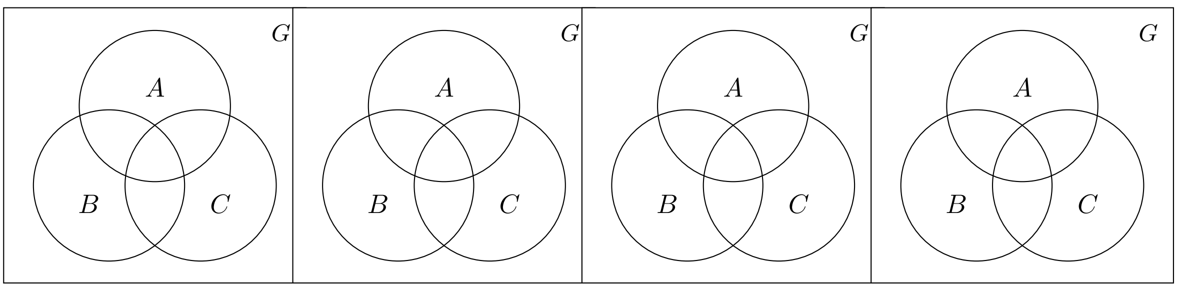
Aufgabe A8 Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $T_n := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ teilt } n\}$ die Menge ihrer Teiler und $V_n := \{yn \mid y \in \mathbb{N}\}$ die Menge ihrer Vielfachen. Beispielsweise gelten $T_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ und $V_6 = \{0, 6, 12, 18, \dots\}$. Geben Sie die folgenden Mengen in möglichst kompakter Form an!

a) $T_{12} \cap T_{18}$
b) $(T_{12} \setminus T_{18}) \cup (T_{18} \setminus T_{12})$
c) $T_{12} \cap V_3$
d) $V_9 \cap V_6$

1.5.7. Ein **Venn-Diagramm** ist ein Mengendiagramm, bei dem alle Möglichkeiten der Zugehörigkeit zu den beteiligten Mengen als «zusammenhängende Gebiete» auftauchen.

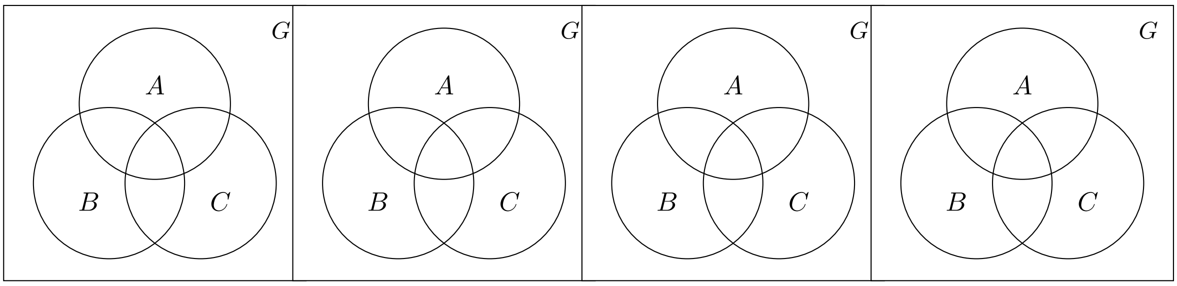
Aufgabe A9 Schraffieren Sie in den folgenden Venn-Diagrammen jeweils den Bereich, der zu dem Ausdruck unter dem Diagramm gehört. Dabei sind die Mengen A, B und C jeweils Teilmengen der Grundmenge G; Komplemente werden in G gebildet.

a)



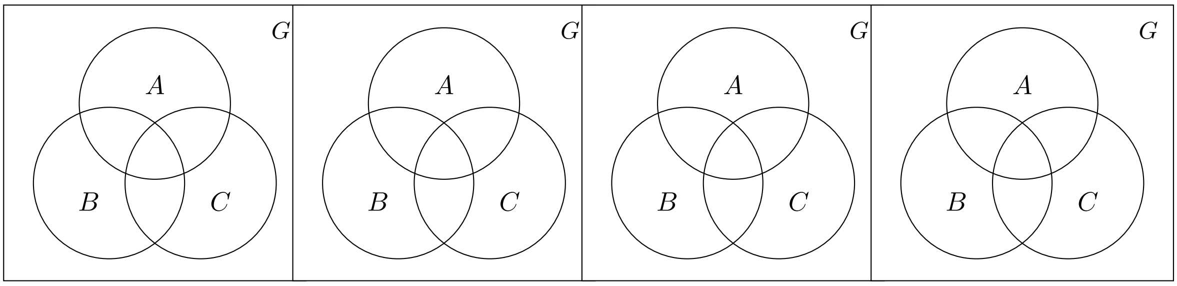
$(A \cup B) \cup C$ $\quad$ $A \cup (B \cup C)$ $\quad$ $(A \cap B) \cap C$ $\quad$ $A \cap (B \cap C)$

b)



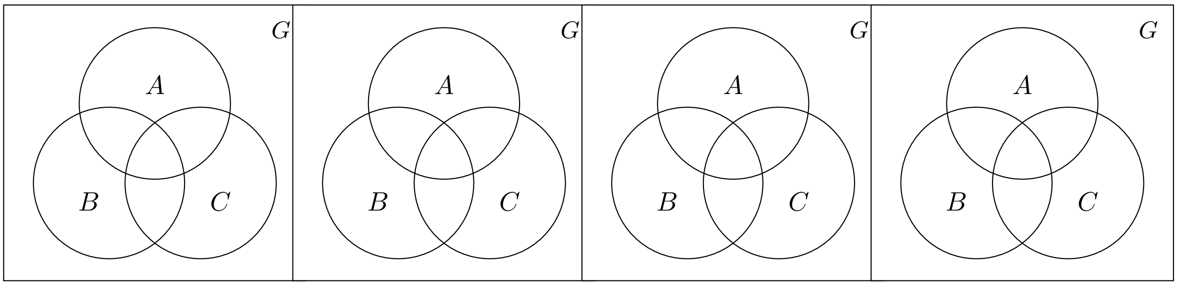
$(A \cup B) \cap C$ | $A \cup (B \cap C)$ | $(A \cap B) \cup C$ | $A \cap (B \cup C)$

c)



$\overline{A} \cup \overline{B}$ | $\overline{A \cup B}$ | $\overline{A} \cap \overline{B}$ | $\overline{A \cap B}$

d)



$A \cap B \cap C$ | $A \cap B \cap \overline{C}$ | $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ | $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

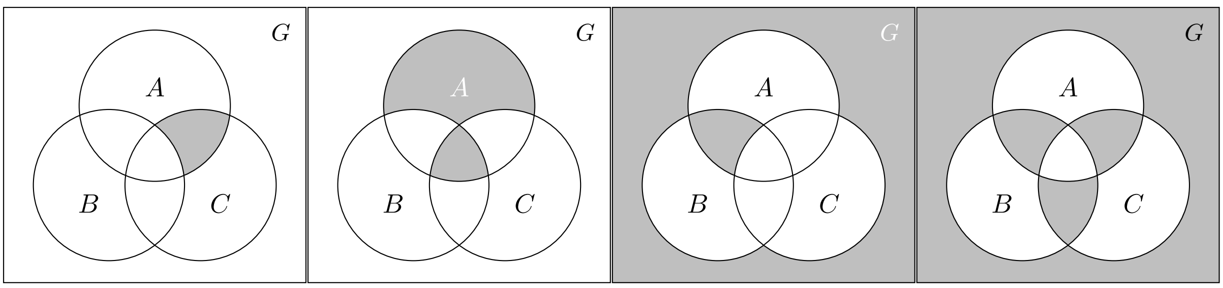
e) In jeder der vorherigen Teilaufgaben (a), (b), (c), (d) können Sie etwas beobachten. Was?

Theorem 1.5.8 Assoziativgesetze

Für alle Mengen A, B, C gelten die **Assoziativgesetze** ✎

Man kann deshalb Klammern weglassen und schreibt $A \cup B \cup C$ bzw. $A \cap B \cap C$. Beweis: Siehe Lösung von Aufgabe 9.(a).

Aufgabe A10 Finde nun jeweils einen Ausdruck, der die graue Menge beschreibt!



Ausblick 1.5.9. Wer mehr wissen will, mag [Wik23, Menge (Mathematik), Mengendiagramm, Mengenlehre] lesen.

1.6 Repetitionsaufgaben

Aufgabe A11

(a) Gib die folgenden Mengen in aufzählender Form an.
   (i) Die Menge der punktsymmetrischen Grossbuchstaben des Alphabets.
   (ii) Die Menge der Grossbuchstaben des Alphabets mit einer vertikalen Symmetrieachse.

(b) Gib die folgenden Mengen in aufzählender Form an und gib zusätzlich an, wie man den mathematischen Ausdruck vorliest.
   (i) $\{x \in \mathbb{N} \mid 16 \leq x^2 < 49\}$
   (ii) $\{t \in \mathbb{N} \mid t \text{ ist durch 3 teilbar, aber kein Vielfaches von } 6\}$
   (iii) $\{5s + 2 \mid s \in \mathbb{N}\}$
   (iv) $\{3 - 2a \mid a \in \mathbb{N} \setminus \{2, 5\}\}$

(c) Gib die folgenden Mengen in beschreibender Form an.

(i)	$A = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$	(ii)	$B = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$	(iii)	$C = \{0, 7, 14, 21, 28, \dots\}$
(iv)	$D = \{7, 21, 35, 49, \dots\}$	(v)	$E = \{1, 3, 7, 21\}$	(vi)	$F = \{1, 3, 9, 27, 81, \dots\}$
(vii)	$G = \{20, 21, 22, 23, 24, \dots\}$	(viii)	$H = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$	(ix)	$I = \{0, -1, -2, -3, -4, \dots\}$

Aufgabe A12 Lückenformeln: Entscheide bei jedem Kasten, in welcher Beziehung die beiden Mengen links und rechts des Kastens stehen. (Dabei sind die Grundmenge G und ihre Teilmengen A, B, C beliebig.)

- Wenn die beiden Mengen stets[1] gleich sind, schreibe ein Gleichheitszeichen $=$ in den Kasten.
- Sonst: Wenn die linke Menge stets eine Teilmenge der rechten Menge ist, schreibe ein Teilmengenzeichen $\subset$ in den Kasten.
- Sonst schreibe ein Fragezeichen ? in den Kasten.

Beispiel: Die Lösung von $A \cap A \; \square \; A$ ist $A \cap A \; \boxed{=} \; A$.

Hinweis: Verwende Venn-Diagramme (mit zwei oder drei Mengen), jeweils eines für die linke Menge und eines für die rechte Menge! Farben dürfen verwendet werden.

(a) $\varnothing \; \square \; \overline{A} \cap A \; \square \; G$

(b) $\varnothing \; \square \; \overline{A} \cup A \; \square \; G$

(c) $\overline{\overline{A}} \; \square \; A$ (links steht das Komplement des Komplements von A)

(d) $A \cap B \; \square \; A \; \square \; A \cup B$

(e) $A \cup B \; \square \; B \cup A$

(f) $A \setminus B \; \square \; B \setminus A$

(g) $A \cap \overline{B} \; \square \; A \setminus B$

(h) $\overline{A} \cup \overline{B} \; \square \; \overline{A \cap B}$

(i) $\overline{A} \cap \overline{B} \; \square \; \overline{A \cap B}$

(j) $\overline{A} \cap \overline{B} \; \square \; \overline{A \cup B}$

(k) $A \cap (B \cup C) \; \square \; (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(l) $A \cup (B \cap C) \; \square \; (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Aufgabe A13 Wenn A und B Mengen mit $|A| = 10$ und $|B| = 7$ sind, wie viele Elemente hat

a) $A \cap B$ höchstens?
b) $A \cap B$ mindestens?
c) $A \cup B$ höchstens?
d) $A \cup B$ mindestens?
e) $A \setminus B$ höchstens?
f) $A \setminus B$ mindestens?
g) $B \setminus A$ höchstens?
h) $B \setminus A$ mindestens?
i) $\overline{A}$ höchstens?
j) $\overline{A}$ mindestens?

[1] Damit ist gemeint: Für alle Wahlen der Mengen A, B, C und der Grundmenge G.

 Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

1.7 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 1 ex-zahlmengen-schreibweisen

Es gibt oft mehrere korrekte Möglichkeiten für die beschreibende Form.

a) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist prim}\}$

b) $\{0, 37, 74, 111, 148, 185, \ldots, \} = \{37x \mid x \in \mathbb{N}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist Vielfaches von } 37\}$
$= \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 37 teilbar}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ 37 ist ein Teiler von } n\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 37k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\}$

c) $\{0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000\} = \{a^3 \mid a \in \mathbb{N} \text{ und } a^3 < 1111\}$
$= \{b \in \mathbb{N} \mid b < 1111 \text{ und } b = c^3 \text{ für ein } c \in \mathbb{N}\} = \{b \in \mathbb{N} \mid b \text{ ist Kubikzahl und kleiner als } 1111\}$

d) $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots\} = \{2^z \mid z \in \mathbb{N}\} = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 2^x \text{ für ein } x \in \mathbb{N}\}$
$= \{y \in \mathbb{N} \mid y \text{ ist Zweierpotenz}\}$.

e) $\{13\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 13\}$

f) Beachte $91 = 7 \cdot 13$. Somit gibt es keine Primzahl, die durch 91 teilbar ist.
$\{\} = \varnothing = \{p \in \mathbb{N} \mid p < 0\} = \{p \in \mathbb{N} \mid p + 1 = p\} = \{p \in \mathbb{N} \mid \text{falsch}\}$

Lösung zu Aufgabe 2 ex-maechtigkeit

a) $|A| = 4$ b) $|B| = 3$ c) $|C| = 0$ d) $|D| = \infty$ e) $|E| = 4$ f) $|F| = 11$

Lösung zu Aufgabe 3 ex-teilmenge-einfach

a) $\{0\} \subset X$ b) $\{1\} \not\subset X$ c) $\{2\} \subset X$ d) $\{0, 4\} \subset X$

e) $\{1, 3, 5\} \not\subset X$ f) $\{2, 3, 4\} \subset X$ g) $\{0, 1, 2, 3\} \not\subset X$ h) $\{0, 7-4, 4, \frac{6}{3}\} = \{0, 3, 4, 2\} = \{0, 2, 3, 4\} \subset X$

i) $\varnothing \subset X$ j) $X \subset X$ k) $\mathbb{N} \not\subset X$ l) $\{\} = \varnothing \subset X$

Lösung zu Aufgabe 4 ex-teilmenge-beide-richtungen

Dies bedeutet, dass X und Y gleich sind, in Formeln $X = Y$. Genauer ist die Aussage $X = Y$ gleichbedeutend zu den Aussagen $X \subset Y$ und $Y \subset X$, denn genau dann sind zwei Mengen gleich, wenn jedes Element der ersten Menge in der zweiten Menge enthalten ist und umgekehrt.

Lösung zu Aufgabe 5 ex-teilmengen-von-1234

a) Die Menge $A = \{1, 2\}$ hat die folgenden 4 Teilmengen: $\{1, 2\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{\}$

b) $B = \{0, 1, 2, 3\}$ hat
- eine nullelementige Teilmenge: $\varnothing = \{\}$
- vier einelementige Teilmengen: $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$
- sechs zweielementige Teilmengen: $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{0, 3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$,
- vier dreielementige Teilmengen: $\{1, 2, 3\}$, $\{0, 2, 3\}$, $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 1, 2\}$
- eine vierelementige Teilmenge: $B = \{0, 1, 2, 3\}$

c) Jede Teilmenge B einer n-elementigen Menge A ist eindeutig dadurch beschreibbar, dass man bei jedem der n Elemente von A angibt, ob es zu B gehört oder nicht (d.h. bei jedem Element gibt es zwei Möglichkeiten). Folglich hat A genau

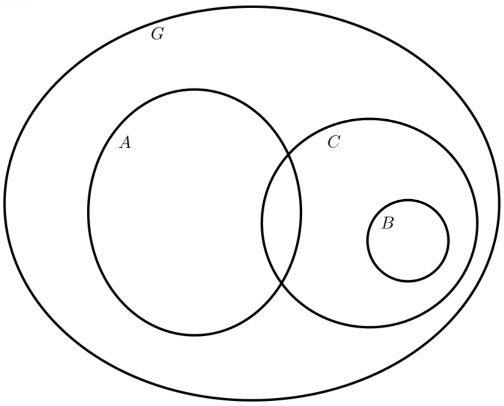
$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n \text{ Faktoren}} = 2^n$$

Teilmengen.
Alternativlösung («vollständige Induktion»): Man überzeugt sich direkt, dass die Aussage für $n = 1$ gilt (und auch für $n = 0$, denn die leere Menge $\varnothing$ hat genau $2^0 = 1$ Teilmenge, nämlich die leere Menge).
Dann überlegt man sich, dass beim Übergang von einer Menge mit n Elementen zu einer Menge mit $n+1$ Elementen (d.h. ein neues Element kommt dazu) jede Teilmenge der grösseren Menge entweder

- eine Teilmenge der kleineren Menge ist oder
- eine um das neue Element vergrösserte Teilmenge der kleineren Menge ist.

Es gibt also doppelt so viele Teilmengen wie zuvor. Wenn wir schon wissen, dass die n-elementige Menge 2^n Teilmengen hat, so hat die $(n+1)$-elementige Teilmenge also $2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$ Teilmengen.

Lösung zu Aufgabe 6 ex-mengendiagramm-dreiecke



Bemerkung: Auf die genaue Form der Mengen und deren Lage kommt es hier nicht an.

Bemerkung: Das «Dreieck mit drei Seiten der Länge Null» wird hier nicht als Dreieck aufgefasst. (Welche Innenwinkel hat es? Ist es rechtwinklig?)

Lösung zu Aufgabe 7 ex-mengenoperationen-einfach

a) $A \cap B = \{6, 9\}$

b) $A \cup B = \{3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

c) $A \setminus B = \{3, 5, 8\}$

d) $\overline{A} = \{0, 1, 2, 4, 7, 10, 11, 12\}$

Lösung zu Aufgabe 8 ex-mengenoperationen-teiler-vielfache

a) $T_{12} \cap T_{18} = T_6$

b) $(T_{12} \setminus T_{18}) \cup (T_{18} \setminus T_{12}) = \{4, 9, 12, 18\}$

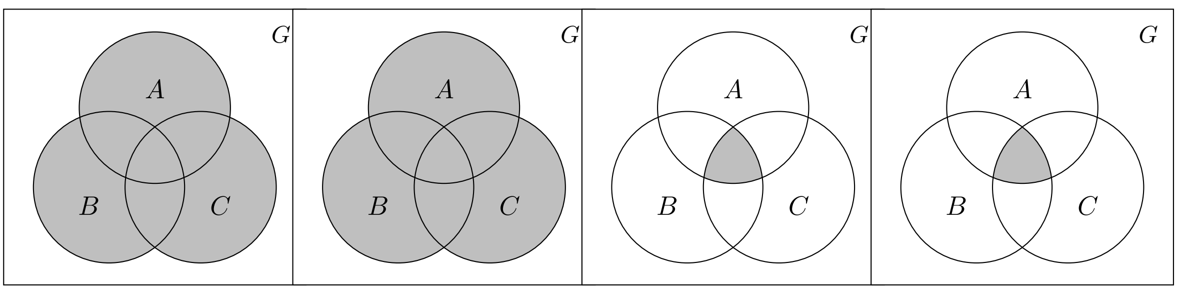
c) $T_{12} \cap V_3 = \{3, 6, 12\}$

d) $V_9 \cap V_6 = V_{18}$

Lösung zu Aufgabe 9 ex-venn-menge-schraffieren

Schraffiere in den folgenden Venn-Diagrammen jeweils den Bereich, der zu dem Ausdruck unter dem Diagramm gehört. Die Mengen A, B und C sind jeweils Teilmengen der Grundmenge G; Komplemente werden in G gebildet.

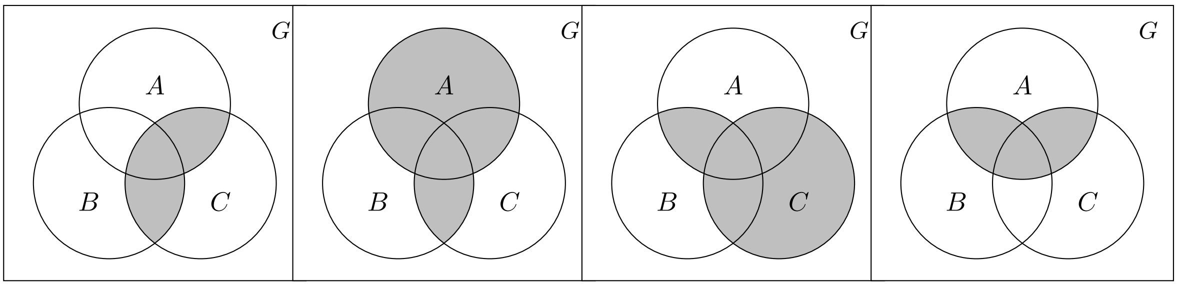
a)



$(A \cup B) \cup C$ | $A \cup (B \cup C)$ | $(A \cap B) \cap C$ | $A \cap (B \cap C)$

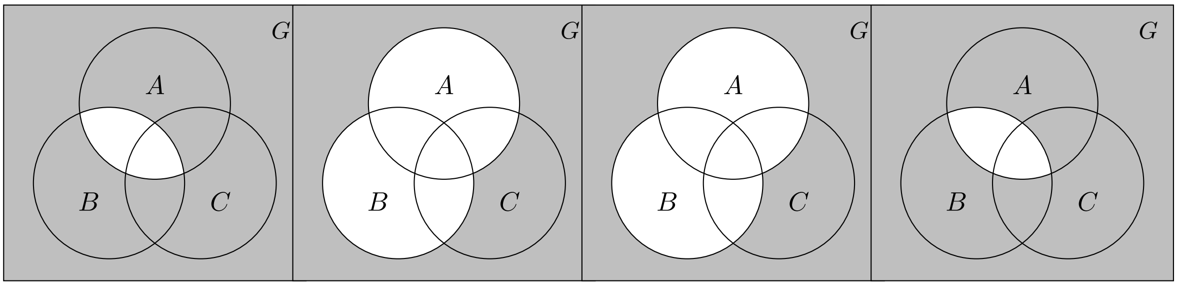
Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

b)



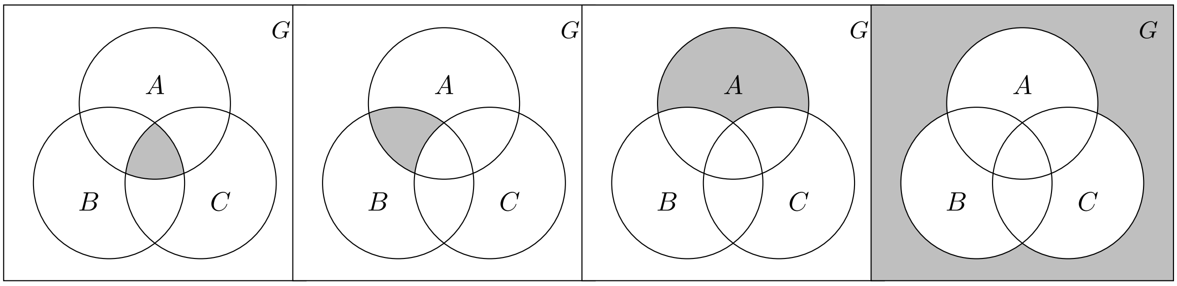
$(A\cup B)\cap C$ $\quad$ $A\cup(B\cap C)$ $\quad$ $(A\cap B)\cup C$ $\quad$ $A\cap(B\cup C)$

c)



$\overline{A}\cup\overline{B}$ $\quad$ $\overline{A\cup B}$ $\quad$ $\overline{A}\cap\overline{B}$ $\quad$ $\overline{A\cap B}$

d)



$A\cap B\cap C$ $\quad$ $A\cap B\cap\overline{C}$ $\quad$ $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ $\quad$ $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

e)

- In (a) gelernt: Für alle Mengen A, B, C gelten die sogenannten **Assoziativgesetze** $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C$ und $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C$. Man kann deshalb Klammern weglassen.
- In (b) gelernt: Hier darf man keine Klammern weglassen!
- In (c) gelernt: Für alle Mengen A und B gelten die sogenannten **de-morganschen Gesetze** $\overline{A}\cup\overline{B} = \overline{A\cap B}$ und $\overline{A}\cap\overline{B} = \overline{A\cup B}$.
- In (d) gelernt: Jeder Bereich lässt sich als Schnitt geeigneter Mengen und Komplemente schreiben.

Lösung zu Aufgabe 10 ex-venn-ausdruck-zu-gebiet

- $A\cap\overline{B}\cap C$ oder $(A\cap C)\setminus B$
- $(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap B\cap C)$ (es gibt auch andere Möglichkeiten)
- $(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap B\cap\overline{C})$ (es gibt auch andere Möglichkeiten)
- $(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)$ (es gibt auch andere Möglichkeiten)

Lösung zu Aufgabe 11 ex-mengenschreibweisen

(a) (i) $\{H, I, N, O, S, X, Z\}$
  (ii) $\{A, H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y\}$
(b) (i) $\{4, 5, 6\}$
  «Die Menge aller x in $\mathbb{N}$ mit 16 kleiner-gleich x^2 kleiner 49»
  oder «Die Menge aller natürlichen Zahlen x, für die gilt: 16 ist kleiner-gleich x Quadrat und x Quadrat ist kleiner als 49»
  oder «Die Menge aller x Element $\mathbb{N}$, für die gilt: 16 kleiner-gleich x Quadrat kleiner 49»
  oder (sehr ausführlich) «Die Menge aller Elemente x in der Menge der natürlichen Zahlen, für die gilt: 16 kleiner-gleich x Quadrat kleiner 49»
  (ii) $\{3, 9, 15, 21, 27, \dots\}$

«Die Menge aller t in $\mathbb{N}$, die durch 3 teilbar sind, aber kein Vielfaches von 6 sind»
oder (leicht abgewandelt, aber gleichbedeutend) «Die Menge aller t in $\mathbb{N}$, die durch 3 teilbar sind, aber nicht durch 6»
oder (leicht abgewandelt, aber gleichbedeutend) «Die Menge aller durch 3, aber nicht durch 6 teilbaren natürlichen Zahlen»

(iii) $\{2, 7, 12, 17, 22, \dots\}$
«Die Menge aller $5s + 2$, wobei s die/alle natürlichen Zahlen durchläuft»
oder (recht kurz) «Die Menge aller $5s + 2$ für s in $\mathbb{N}$»
oder (nicht so eng an der mathematischen Notation, beschreibt aber dieselbe Menge) «Die Menge aller natürlichen Zahlen, die bei Division durch 5 den Rest 2 ergeben»

(iv) $\{3, 1, -3, -5, -9, -11, -13, \dots\}$
«Die Menge aller $3 - 2a$, wobei a alle natürlichen Zahlen mit Ausnahme von 2 und 5 durchläuft»
oder (etwas umständlich und schwer verständlich) «Die Menge aller $3 - 2a$, wobei a in $\mathbb{N}$ ohne die Menge, die aus den Elementen 2 und 5 besteht»
oder (etwas verkürzt und üblich) «Die Menge aller $3 - 2a$, wobei a in $\mathbb{N}$ ohne 2, 5»

(c) (i) $A = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gerade}\}$
(ii) $B = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist ungerade}\}$
(iii) $C = \{7a \mid a \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Vielfaches von } 7\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist durch 7 teilbar}\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \text{ ist Teiler von } x\}$
(iv) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Vielfaches von 7 und } x \text{ ist ungerade}\} = \{(2n + 1) \cdot 7 \mid n \in \mathbb{N}\}$
(v) $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ein Teiler von } 21\}$
(vi) $F = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist Potenz von } 3\} = \{3^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
(vii) $G = \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 20\}$
(viii) $H = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ ist Primzahl und } p \leq 13\} = \{p \in \mathbb{N} \mid p \leq 16 \text{ ist prim}\}$
(ix) $I = \{-x \mid x \in \mathbb{N}\}$

Lösung zu Aufgabe 12 ex-mengen-wahr-oder-falsch

(a) $\varnothing \boxed{=} \overline{A} \cap A \boxed{\subset} G$

(b) $\varnothing \boxed{\subset} \overline{A} \cup A \boxed{=} G$

(c) $\overline{\overline{A}} \boxed{=} A$ (links steht das Komplement des Komplements von A)

(d) $A \cap B \boxed{\subset} A \boxed{\subset} A \cup B$

(e) $A \cup B \boxed{=} B \cup A$

(f) $A \setminus B \boxed{?} B \setminus A$

(g) $A \cap \overline{B} \boxed{=} A \setminus B$

(h) $\overline{A} \cup \overline{B} \boxed{=} \overline{A \cap B}$

(i) $\overline{A} \cap \overline{B} \boxed{\subset} \overline{A \cap B}$

(j) $\overline{A} \cap \overline{B} \boxed{=} \overline{A \cup B}$

(k) $A \cap (B \cup C) \boxed{=} (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(l) $A \cup (B \cap C) \boxed{=} (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Lösung zu Aufgabe 13 ex-mengen-groesse-abschaetzen

a) 7 (wenn $B \subset A$)
b) 0 (wenn A und B *disjunkt* sind, d.h. kein gemeinsames Element haben: Dann gilt $A \cap B = \varnothing$)
c) 17 (wenn A und B disjunkt sind)
d) 10 (wenn $B \subset A$)
e) 10 (wenn A und B disjunkt sind)

f) 3 (wenn $B \subset A$)

g) 7 (wenn A und B disjunkt sind)

h) 0 (wenn $B \subset A$)

i) es gibt keine Obergrenze: $\overline{A}$ kann beliebig viele Elemente haben und auch unendlich sein; letzteres tritt ein, wenn die Grundmenge G unendlich ist.

j) 0 (im Fall $A = G$).

Literatur

[Wik23] Contributors Wikipedia. Wikipedia, 2023. www.wikipedia.org.