Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

2 Planimetrie Grundlagen

2.0.1. Die Planimetrie («ebene Geometrie», «Geometrie der Ebene») ist die Lehre der in der Ebene liegenden Figuren. Die Ebene wird als eine *Menge von Punkten* aufgefasst.

2.1 Definitionen und Notationen

2.1.1. Beachten Sie, dass die Notationen in der Geometrie nicht standardisiert sind. In verschiedenen Lehrmitteln werden verschiedene Notationen verwendet.

Wir vereinbaren die folgende Schreibweisen für Objekte in der Ebene.

P	**Punkt** (ohne Ausdehnung, bezeichnet mit grossen Buchstaben)
g	**Gerade** (beidseitig unbegrenzt, bezeichnet mit kleinen Buchstaben) Durch zwei verschiedene Punkte gibt es genau eine Gerade. Eine Gerade ist eine Menge von Punkten.
$A \in g$	Der Punkt A liegt auf der Geraden g. D.h. A ist Element der Punktemenge g.
$B \notin g$	Der Punkt B liegt nicht auf der Geraden g. D.h. B ist nicht Element von g.
AB	**Gerade** (Punktemenge) durch die Punkte A und B. Z.B. $g = AB$ (Hier ist vorausgesetzt, dass A und B voneinander verschieden sind.)
$[AB]$	**Strecke** (Punktemenge) zwischen A und B, inklusive der Punkte A und B.
$\overline{AB}$	**Länge** (relle Zahl) der Strecke $[AB]$ (gemessen als Vielfaches einer definierten Einheitslänge).
$\overline{Pg}$	**Abstand** von P zu g, definiert als die kürzeste Entfernung von P zu einem Punkt von g.
$g \parallel h$	Zwei Geraden, die keinen Punkt gemeinsam haben, heissen **parallele** Geraden. Zu einer Geraden g und einem nicht auf ihr liegenden Punkt P gibt es genau eine Parallele p durch den Punkt P.
$S \in g \cap h$	**Schnittpunkt** S der Geraden g und h. Lies «g geschnitten mit h». (Hier ist vorausgesetzt, dass die Geraden nicht parallel sind.)
$g \cap h = \varnothing$	g und h **schneiden sich nicht** (also $g \parallel h$). Das Symbol $\varnothing$ ist die **leere Menge**.
$g = h$	Die beiden Geraden g und h sind **identisch**. *Manchmal werden identische Geraden ebenfalls als parallel betrachtet.*
$[AB$	**Halbgerade**, die beim Punkt A beginnt und sich durch B ins Unendliche erstreckt.
$\alpha = \sphericalangle ASB$	**Winkel** mit **Scheitel** S und **Schenkeln** $[SA$ und $[SB$. Bezeichnung mit kleinen griechischen Buchstaben: z.B. α, β, γ, δ, ε, φ, ω.
$\sphericalangle(g,h)$	**Winkel** zwischen g und h, wobei der Winkel mit $0° \leq \sphericalangle(g,h) \leq 90°$ gemeint ist.
$g \perp h$	Lies: «g senkrecht h» $\sphericalangle(g,h) = 90°$.
m_{AB}	**Mittelsenkrechte** zu den Punkten A, B.
M_{AB}	**Mittelpunkt** der Strecke $[AB]$.
$k(M,r)$	**Kreis** mit Mittelpunkt M und Radius r.
w_{gh}	**Winkelhalbierende** zu den Geraden g, h. Da es zwei Winkelhalbierende gibt, muss erklärt werden, welche gemeint ist.
w_{gh}^1, w_{gh}^2	Paar von **Winkelhalbierenden** zu den Geraden g, h. Beachten Sie, dass $w_{gh}^1 \perp w_{gh}^2$.

2.2 Grundkonstruktionen mit Zirkel, Lineal und Geodreieck

geometrisches Objekt	Grundkonstruktion
m_{AB}	**Gegeben:** Punkte A und B. 1. Wähle $r > \frac{1}{2}\overline{AB}$ $\rightarrow r$ 2. $k(A, r)$ $\rightarrow k_1$ 3. $k(B, r)$ $\rightarrow k_2$ 4. $k_1 \cap k_2$ $\rightarrow P_1, P_2$ 5. P_1P_2 $\rightarrow m_{AB}$
M_{AB}	**Gegeben:** Punkte A und B. 1. $AB \cap m_{AB}$ $\rightarrow M_{AB}$
Senkrechte (Lot) p zu g durch P	**Gegeben:** Gerade g, Punkt P. 1. Mit Geodreieck $\rightarrow p$ **oder** 1. Wähle $r > \overline{Pg}$ $\rightarrow r$ 2. $k(P, r) \cap g$ $\rightarrow A, B$ 3. m_{AB} $\rightarrow p$
Parallele p zu g durch P	**Gegeben:** Gerade g, Punkt P. 1. Mit Geodreieck (parallele Linien) $\rightarrow p$ **oder** 1. Senkrechte zu g durch P $\rightarrow h$ 2. Senkrechte zu h durch P $\rightarrow p$
w_{gh}, bzw. w^1_{gh} und w^2_{gh}	**Gegeben:** Sich schneidende Geraden g, h. 1. $g \cap h$ $\rightarrow S$ 2. Wähle einen Radius $\rightarrow r_1$ 3. $k(S, r_1)$ $\rightarrow k$ 4. $k \cap g$, $k \cap h$ $\rightarrow G$, H (jeweils einer der Schnittpunkte) 5. m_{gh} $\rightarrow w_{gh}$, bzw. w^1_{gh} 6. Optional: Senkrechte zu w^1_{gh} durch S $\rightarrow w^2_{gh}$
Parallelen p_1, p_2 zu g mit gegebenem Abstand d	**Gegeben:** Gerade g, Länge d. 1. Wähle $P \in g$ $\rightarrow P$ 2. Senkrechte zu g durch P $\rightarrow h$ 3. $k(P, d) \cap h$ $\rightarrow H_1$, H_2 4. Parallelen zu g durch H_1, H_2 $\rightarrow p_1$, p_2
Winkel α übertragen	**Gegeben:** Winkel α, Scheitel S, Schenkel g, h, zwei Punkte $A \neq B$, die eine Halbgerade $i = [AB$ liefern. 1. Wähle einen Radius $\rightarrow r$ 2. $k(S, r)$, $k(A, r)$ $\rightarrow k_1$, k_2 3. $k_1 \cap g$, $k_1 \cap h$ $\rightarrow G$, H 4. $k_2 \cap i$ $\rightarrow I$ 5. $k(I, \overline{GH}) \cap k_2$ $\rightarrow J_1$, J_2 6. Übertragener Winkel α $\rightarrow \sphericalangle BAJ_1$, $\sphericalangle BAJ_2$

Aufgabe A1 Führen Sie alle oben aufgeführten Grundkonstruktionen durch.

Aufgabe A2 Erstellen Sie eine Konstruktionsbeschreibung für die Konstruktion des Abstands eines Punktes P zu einer Geraden g.

Aufgabe A3 Erstellen Sie eine Konstruktionsbeschreibung für das Abtragen einer Strecke.

Aufgabe A4 Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $s = 5$ cm und erstellen Sie eine Konstruktionsbeschreibung.

Aufgabe A5 Konstruieren Sie ein regelmässiges Fünfeck $ABCDE$ gemäss der folgenden Konstruktionsbeschreibung:

Gegeben: Punkt Z und Radius r (alias Mittelpunkt und Umkreisradius des zu konstruierenden Fünfecks)

1. $k(Z, r)$ $\rightarrow k$
2. Wähle $A \in k$ $\rightarrow A$
3. Senkrechte zu ZA durch Z $\rightarrow g$
4. $k \cap g$ $\rightarrow G$ (Wähle einen der beiden Schnittpunkte.)
5. $k(M_{ZG}, \overline{M_{ZG}A}) \cap g$ $\rightarrow F$ (Nimm denjenigen Schnittpunkt, der näher bei Z liegt.)
6. $\overline{AF}$ von A aus auf k 4 mal abtragen $\rightarrow B$, C, D, E

Dass das Ergebnis wirklich ein regelmässiges Fünfeck ist, wird hier geglaubt.

Aufgabe A6 «Übersetzen» und verkürzen Sie die Konstruktionsbeschreibung «*Konstruktion mit Zirkel und Lineal bei gegebener Seitenlänge*», die im Wikipedia-Artikel «Fünfeck» zu finden ist, in die hier vorgestellte Kurzschreibweise für Konstruktionsbeschreibungen.

2.3 Koordinatensystem

2.3.1. Um ein (rechtwinkliges) Koordinatensystem in der Ebene zu definieren, müssen 3 Dinge festgelegt werden:

- Ein Ursprung (auch Nullpunkt genannt) O (der Buchstabe 'O').
- Eine Einheitslänge.
- Eine Richtung für die erste Achse (x-Achse).

Die letzten zwei Dinge können z.B. durch die Wahl eines weiteren Punkts X festgelegt werden. Die Einheitslänge ist dann $\overline{OX}$. Normalerweise erhält man die y-Achse durch eine Drehung der x-Achse um 90° im **Gegenuhrzeigersinn**. Die x-Achse OX wird normalerweise horizontal mit positiver Richtung nach rechts und die y-Achse nach oben eingezeichnet.

Aufgabe A7 Zeichnen Sie auf kariertem Papier ein Koordinatensystem mit Mittelpunkt in der Blattmitte, Einheit 2 Häuschen und x-Achse nach rechts, y-Achse nach oben. Zeichnen Sie (in der gegebenen Reihenfolge) die folgenden Objekte ein:

(a) Punkte $A = (8, 2)$, $B = (2, -6)$, $C = (-4, -4)$
(b) Mittelsenkrechten m_{AB} und m_{BC}
(c) Schnittpunkt $D = m_{AB} \cap m_{BC}$. Schätzen Sie die Koordinaten von D ab.
(d) Strecke AB, Angabe der Länge $\ell = \overline{AB}$ (in Einheitslängen!). Können Sie die Länge auch berechnen?
(e) Kreis $k_1 = k(D, \overline{DA})$. Was stellen Sie fest? Können Sie Ihre Feststellung beweisen?
(f) $E = M_{AD}$ und $k_2 = k(E, \overline{EA})$.
(g) Messen Sie die Dreieckswinkel $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$ und $\gamma = \sphericalangle BCA$. Berechnen Sie deren Summe. Was sollte das Ergebnis sein? Warum ist dem eher nicht so?
(h) Strecken $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$
(i) $F = m_{AB} \cap c$. Gilt $F \in k_2$? Ist das Zufall oder können Sie das beweisen?
(j) Ist $\overline{DF} = \overline{AF}$? Gilt das auch, wenn man die Punkte A, B, C etwas anders wählt?

Aufgabe A8 Gegeben sind zwei verschiedene Punkte A und B der Ebene.

Erinnerung: Die Mittelsenkrechte m_{AB} ist definiert als die Senkrechte zur Geraden AB durch den Mittelpunkt $M = M_{AB}$.

Sei P ein beliebiger Punkt der Ebene. Zeige (jeweils mit dem Satz des Pythagoras):

(a) Gilt $P \in m_{AB}$, so folgt $\overline{PA} = \overline{PB}$.
(b) Gilt $\overline{PA} = \overline{PB}$, so folgt $P \in m_{AB}$.

2.4 Geometrische Orte (auch geometrische Örter)

2.4.1. Ein **geometrischer Ort** ist eine Menge von Punkten, die eine bestimmte «geometrische» Eigenschaft haben, bzw. eine bestimmte «geometrische» Bedingung erfüllen. In der konstruktiven Geometrie sind geometrische Orte normalerweise Geraden oder Kreise.

Objekte der konstruktiven Geometrie als geometrische Orte

Die folgende Tabelle zeigt, wie man Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende etc. als geometrische Orte verstehen kann.

geometrisches Objekt	Beschreibung als geometrischer Ort
Mittelsenkrechte m_{AB}	Gegeben sind zwei Punkte $A \neq B$. m_{AB} ist die Menge aller Punkte P, für die gilt: $\overline{PA} = \overline{PB}$. Kurz: $m_{AB} = \{P \mid \overline{PA} = \overline{PB}\}$ Beweis: Siehe Aufgabe 8.
✎ Kreis $k(M, r)$	Gegeben sind ein Punkt M und eine Länge r. ✎ $k(M, r)$ ist die Menge aller Punkte P, für die gilt: $\overline{MP} = r$. Kurz: ✎ $k(M, r) = \{P \mid \overline{PM} = r\}$
✎ Winkelhalbierendenpaar w_{gh}^1, w_{gh}^2	Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden $g \neq h$. ✎ $w_{gh}^1 \cup w_{gh}^2$ ist die Menge aller Punkte P, für die gilt: $\overline{Pg} = \overline{Ph}$. Kurz: ✎ $w_{gh}^1 \cup w_{gh}^2 = \{P \mid \overline{Pg} = \overline{Ph}\}$.
✎ Mittelparallele m_{gh}	Gegeben sind zwei parallele Geraden $g \neq h$. ✎ m_{gh} ist die Menge aller Punkte P, für die gilt: $\overline{Pg} = \overline{Ph}$. Kurz: ✎ $m_{gh} = \{P \mid \overline{Pg} = \overline{Ph}\}$.
Parallelenpaar zu g im Abstand d	✎ Gegeben: Gerade g, Länge d Kurz: $\{P \mid \overline{Pg} = d\}$

2.4.2. Geometrische Orte werden sehr oft zur Konstruktion von Punkten (oder Punktemengen) verwendet, die mehrere Bedingungen erfüllen sollen.

Beispiel 2.4.3. Gegeben sind zwei Punkte A, B mit $\overline{AB} = c = 5$. Gesucht ist ein Punkt C mit $\overline{AC} = b = 4$ und $\overline{BC} = a = 3$.

1. $k(A, b)$ $\rightarrow k_1$: 1.g.O.f. C *Erster geometrischer Ort für C*
2. $k(B, a)$ $\rightarrow k_2$: 2.g.O.f. C
3. $k_1 \cap k_2$ $\rightarrow C_1, C_2$

Der Punkt C muss gleichzeitig zwei Bedingungen erfüllen. Konstruktiv geht man so vor, dass man alle Punkte konstruiert, die eine Bedingung erfüllen (in diesem Fall je ein Kreis), die geometrischen Orte. Der Schnitt dieser Orte ergibt dann die Punkte, die beide Bedingungen erfüllen.

Aufgabe A9 Zeichnen Sie ein Koordinatensystem mit Einheit 2 Häuschen und mindestens je 6 Einheiten nach oben und unten.

Gegeben sind die Punkte $A = (-4, -3)$, $B = (2, 0)$ und $C = (0, 2)$. Daraus ergeben sich die Geraden $g = AB$ und $h = BC$.

a) Konstruieren Sie alle Kreise, die g und h berühren und durch C gehen.

b) Konstruieren Sie die Punktemenge $\{P \mid \overline{AP} = \overline{CP}$ und $\overline{Pg} \leq \overline{Ph}\}$ und heben Sie diese farblich hervor.

c) Konstruieren Sie die Punktemenge $\{P \mid \overline{PB} \leq \overline{PC}$ und $\overline{Pg} \geq \overline{Ph}\}$ und heben Sie diese farblich hervor.

Aufgabe A10 Auf einer Wiese ist eine Ziege am Punkt $P = (1, -2)$ mit einer Leine der Länge $\ell = 6.5$ angebunden. Auf der Wiese steht ein Haus mit quadratischem Grundriss der Seitenlänge 3 mit je einer Seite auf einer positiven Achse.

Konstruieren Sie die Menge aller Punkte, die die Ziege erreichen kann.

Aufgabe A11 Gegeben sind die Geraden g durch $A = (4, -2)$ und $B = (7, 2)$ und die Parallele h zu g durch den Punkt $C(-1, -0.5)$. Weiter ist der Punkt $P(6, 3.5)$ gegeben. Konstruieren Sie alle Kreise, die g und h berühren und durch P gehen. Schätzen Sie die Koordinaten der Mittelpunkte der Kreise ab.

Aufgabe A12 Gegeben sind die Gerade $g = G_1G_2$ mit $G_1 = (-1, -1)$ und $G_2 = (4, 1)$ und der Punkt $A = (0, 2)$. Konstruieren Sie alle Kreise, die g in G_1 berühren und durch A gehen.

Aufgabe A13 Gegeben sind

- der Kreis $k = k(M, r_1)$ mit $M = (1, -1)$ und $r_1 = 3$ und
- die Gerade $g = G_1G_2$ mit $G_1 = (-1, -1)$ und $G_2 = (4, 1)$.

(a) Konstruieren Sie alle Kreise mit Radius $r_2 = 1.5$, die k und g berühren.
(b) Welche Anzahl Lösungen sind möglich, je nach Wahl der Lage und Grössen der gegebenen Objekte?

Aufgabe A14 Zeichnen Sie ein Koordinatensystem mit 7 Einheiten nach oben und 1 Einheit nach unten.

Gegeben ist der Punkt $B = (0, 2)$. Wir bezeichnen die x-Achse mit ℓ.

(a) Konstruieren Sie alle Punkte P, für die $\overline{PB} = \overline{P\ell} = 6$ gilt.
(b) Konstruieren Sie alle Punkte P, für die $\overline{PB} = \overline{P\ell} = 5.5$ gilt.
(c) Für jeden halbzahligen Wert d zwischen 1 und 5 (also $d = 1$, $d = 1.5$, $\ldots$, $d = 4.5$, $d = 5$): Konstruieren Sie alle Punkte P, für die $\overline{PB} = \overline{P\ell} = d$ gilt.
(d) Beschreiben Sie die folgende Menge in Worten:

$$\{P \in \text{Zeichenebene} \mid \overline{PB} = \overline{P\ell}\}$$

(e) Skizzieren Sie diese Menge.

Aufgabe A15 Gegeben sind $B_1 = (-4, 0)$ und $B_2 = (4, 0)$.

(a) Für jeden ganzzahligen Wert von d zwischen 1 und 9 (also für $d = 1$, $d = 2$, $d = 3$, $\ldots$, $d = 9$): Konstruieren Sie alle Punkte P, für die gilt:

$$\overline{PB_1} + \overline{PB_2} = 10 \text{ und } \overline{PB_1} = d$$

(b) Skizzieren Sie die Punktemenge

$$\{P \mid \overline{PB_1} + \overline{PB_2} = 10\}$$

(c) Beschreiben Sie diese Punktemenge in Worten.
(d) Mit welchen Hilfsmitteln könnte man diese Punktemenge relativ einfach zeichnen?

Aufgabe A16 Sie stehen auf dem Punkt $Q = (-2, -1)$, die Strecke $[B_1B_2]$ mit $B_1 = (-3, 0)$ und $B_2 = (3, 0)$ ist eine unüberwindbare Mauer. Welche Punkte hinter der Mauer (d.h. oberhalb der Geraden B_1B_2) haben die Eigenschaft, dass sie von Q gleich weit entfernt sind, egal, ob man die Mauer bei B_1 oder B_2 umgeht?

Wählen Sie das Koordinatensystem mit mindestens 2 Einheiten nach unten und 6 Einheiten nach oben.

(a) Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal (ohne Verwendung von Massangaben auf dem Lineal oder Geodreieck) denjenigen Punkt X auf $[B_1B_2]$, der die obige Eigenschaft hat.
(b) Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal mindestens 5 weitere Punkte oberhalb der Geraden B_1B_2 mit der obigen Eigenschaft.
(c) Skizzieren Sie, wie die Menge aller Punkte mit der obigen Eigenschaft aussieht.
(d) Geben Sie die Menge aller Punkte mit der obigen Eigenschaft in beschreibender Form an (mit möglichst wenig Text).

Aufgabe A17 Gegeben sind $A = (-6, 0)$ und $B = (0, 0)$.

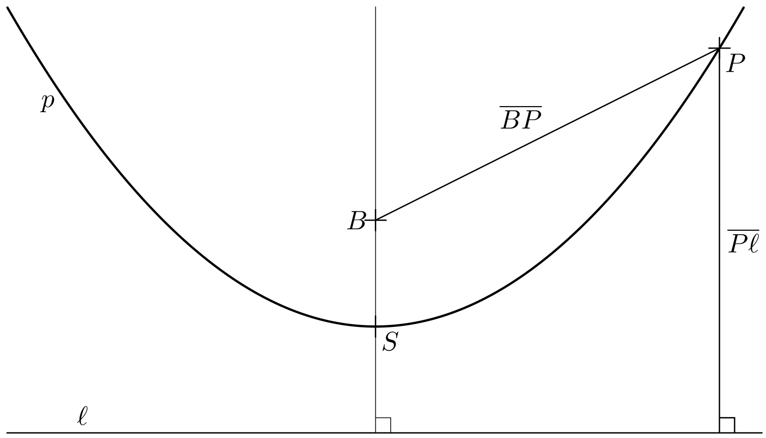
(a) Skizzieren Sie den geometrischen Ort (= die Menge) aller Punkte P in der Zeichenebene, die von A doppelt so weit entfernt sind wie von B.
(b) Geben Sie diese Menge in beschreibender Form an.
(c) Haben Sie eine Vermutung, wie man diesen geometrischen Ort alternativ beschreiben kann?

Definition 2.4.4 Parabel

✎ Gegeben ist eine Gerade ℓ, genannt **Leitlinie**, und ein Punkt B, genannt **Brennpunkt**.
Dann ist die zugehörige Parabel p der geometrische Ort aller Punkte P, die denselben Abstand zu der Leitlinie wie zu dem Brennpunkt haben.

$$p = \{P \mid \overline{PB} = \overline{P\ell}\}$$

Der **Scheitel** der Parabel ist der Schnittpunkt S der Parabel mit dem Lot zu ℓ durch B.



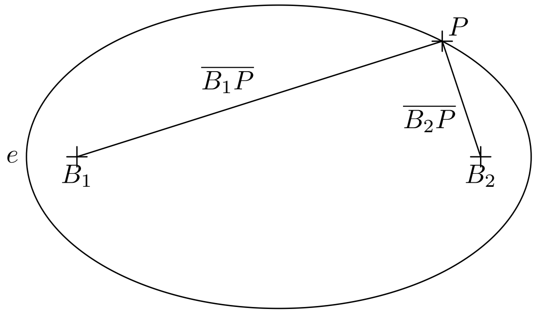
Ausblick 2.4.5. Die Wurfbahn eines Balles ist eine Parabel (wenn man vom Luftwiderstand absieht).

Ausblick 2.4.6. Eine Parabel hat die Eigenschaft, dass alle Strahlen, die senkrecht (in unserer Abbildung von oben) zur Leitlinie einfallen, zum Brennpunkt reflektiert werden. Dreht man eine Parabel um ihre Symmetrieachse, entsteht ein Paraboloid. Parabolantennen (Satellitenschüsseln) sind Paraboloide mit der Antenne im Brennpunkt.

Definition 2.4.7 Ellipse

✎ Gegeben sind zwei Punkte B_1 und B_2, die man als **Brennpunkte** bezeichnet, und eine Entfernung d (mit $d > \overline{B_1B_2}$).
Dann ist die zugehörige **Ellipse** e der geometrische Ort aller Punkte P, für die die Summe der beiden Abstände zu den Brennpunkten d beträgt («konstante Abstandssumme»).

$$e = \{P \mid \overline{PB_1} + \overline{PB_2} = d\}$$



Ausblick 2.4.8. Eine Ellipse hat die Eigenschaft, dass alle Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen, auf den anderen Brennpunkt reflektiert werden.

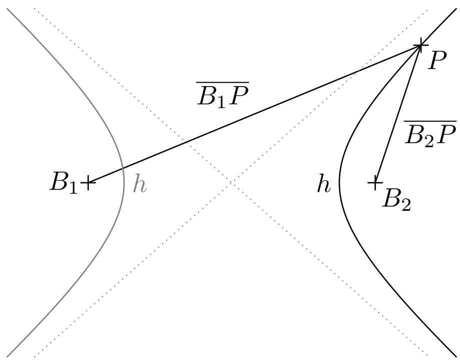
Ausblick 2.4.9. Umlaufbahnen von Planeten sind in sehr guter Näherung Ellipsen, wobei die Sonne in einem Brennpunkt steht. Dasselbe gilt für viele Kometen; beispielsweise hat der Halleyschen Komet, dessen Umlaufzeit ca. 75 Jahre beträgt, eine extrem langgestreckte Ellipsenbahn.

Definition 2.4.10 Hyperbel

Gegeben sind zwei Punkte B_1 und B_2, die man als **Brennpunkte** bezeichnet, und eine Entfernung d (mit $d < \overline{B_1B_2}$).
Dann ist die zugehörige **Hyperbel** h der geometrische Ort aller Punkte P, für die die Differenz der beiden Abstände zu den Brennpunkten betragsmässig d beträgt («konstanter Abstandsunterschied»).

$$h = \{P \mid |\overline{PB_1} - \overline{PB_2}| = d\} = \{P \mid \overline{PB_1} - \overline{PB_2} = d \text{ oder } \overline{PB_2} - \overline{PB_1} = d\}$$

Verlangt man nur die Bedingung $\overline{PB_1} - \overline{PB_2} = d$ bzw. $\overline{PB_2} - \overline{PB_1} = d$, so erhält man einen **Hyperbel-Ast**.



Ausblick 2.4.11. Eine Hyperbel hat zwei **Asymptoten**, d.h. zwei Geraden (in der Skizze oben gestrichelt), denen sich die Kurve immer mehr annähert.

Ausblick 2.4.12. Eine Hyperbel hat die Eigenschaft, dass alle Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen, so reflektiert werden, als kämen sie vom anderen Brennpunkt.

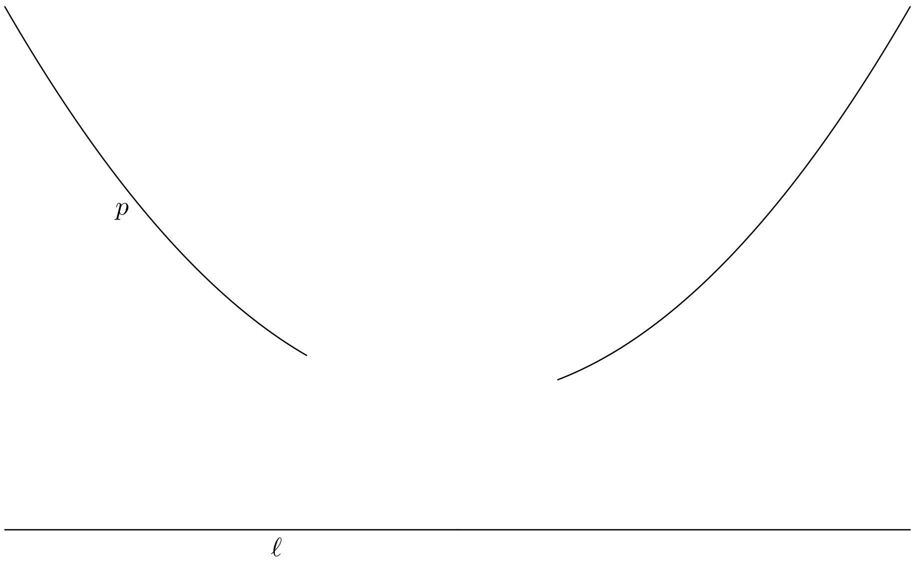
Ausblick 2.4.13. Die Bahn eines Himmelskörpers, der zu schnell unterwegs ist, um in eine (ellipsenförmige) Umlaufbahn einzuschwenken, ist eine Hyperbel.

Aufgabe A18 Gegeben ist eine Strecke $[AB]$ und eine Länge ℓ. Was ist der geometrische Ort aller Punkte C, für die der Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$ gleich ℓ ist? Was für Bedingungen muss ℓ erfüllen?

Aufgabe A19 Gegeben ist eine Gerade g und ein Punkt P. Was ist der geometrische Ort der Kreiszentren Z all derjenigen Kreise, die g berühren und durch P gehen,

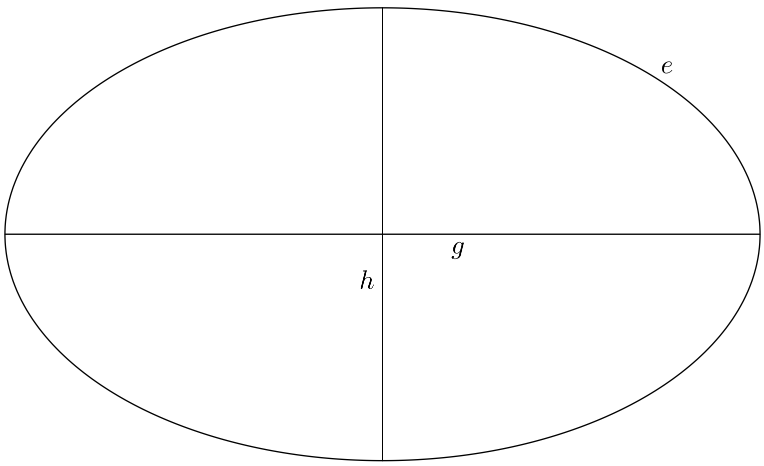
(a) wenn $P \notin g$ gilt?
(b) wenn $P \in g$ gilt?

Aufgabe A20 Beim Drucken einer Parabel p und ihrer Leitlinie ℓ ging durch einen Druckfehler ein Teil der Parabel verloren (siehe Skizze unten). Konstruieren Sie direkt auf dieses Blatt den Brennpunkt der Parabel und den Scheitelpunkt S der Parabel (der Punkt der Parabel, der am nächsten an ℓ ist).



Aufgabe A21 Gegeben ist eine Ellipse e sowie ihre Symmetrieachsen g und h (siehe Skizze unten). Konstruieren Sie die Brennpunkte der Ellipse e direkt auf dieses Blatt.

Hinweis: *Die Konstruktion ist extrem einfach. Die Schwierigkeit dieser Aufgabe liegt darin, die nötigen geometrischen Überlegungen zu führen und sauber zu dokumentieren..*



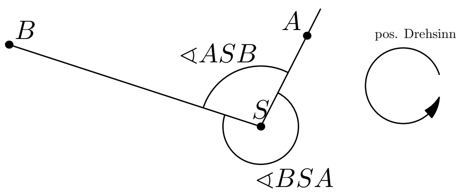
Zusammenfassung Kegelschnitte

2.4.14. Der Schnitt eines Doppelkegels mit einer Ebene ist entweder eine Parabel, eine Ellipse oder eine Hyperbel (abgesehen von Spezialfällen). Deswegen nennt man diese Gebilde *Kegelschnitte*. Ich erkläre dies gerne mit Hilfe geometrischer Modelle, die unsere Schule besitzt (vgl. Wikipedia: Dandelinsche Kugel).

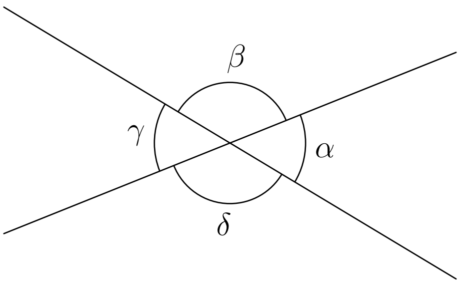
Kurve	*gegeben*	*geometrischer Ort*	*Reflexionseigenschaft*
Parabel	Brennpunkt B, Leitlinie ℓ	$\{P \mid \overline{PB} = \overline{P\ell}\}$	Senkrecht zur Leitlinie einfallende Strahlen werden zum Brennpunkt hin reflektiert.
Ellipse	Brennpunkte B_1, B_2, Abstandssumme $d > \overline{B_1B_2}$	$\{P \mid \overline{PB_1} + \overline{PB_2} = d\}$	Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen, werden zum anderen Brennpunkt hin reflektiert.
Hyperbel	Brennpunkte B_1, B_2, Abstandunterschied $d < \overline{B_1B_2}$	$\{P \mid \lvert\overline{PB_1} - \overline{PB_2}\rvert = d\}$	Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen, werden so reflektiert, als kämen sie vom anderen Brennpunkt.

2.5 Winkel

Die Schreibweise $\sphericalangle ASB$ meint den Winkel mit Scheitel S und den Halbgeraden $[SA$ und $[SB$ als Schenkeln, den man erhält, wenn man den Strahl $[SA$ im **Gegenuhrzeigersinn** (= dem **mathematisch positiven Drehsinn**) dreht, bis man beim Strahl $[SB$ ankommt.



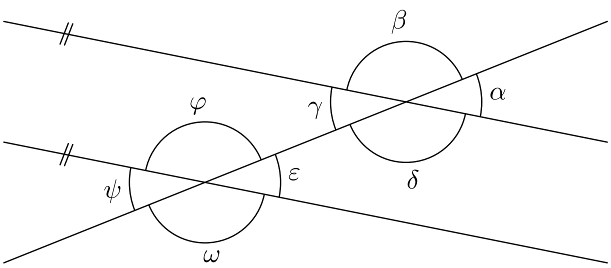
Scheitel- und Nebenwinkel



Axiom:
Scheitelwinkel sind ✎ gleich gross:
$\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$.

Folgerung:
Nebenwinkel ergänzen sich zu ✎ 180°:
$\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°$.

Winkel an Parallelen

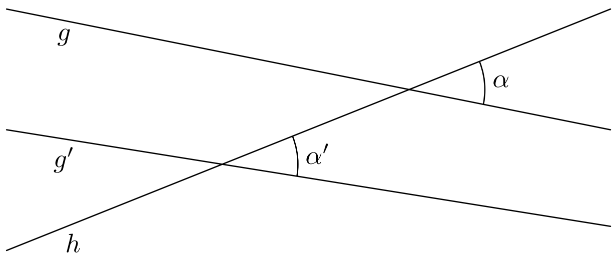


Axiom:
Stufenwinkel sind ✎ gleich gross:
$\alpha = \varepsilon$, $\beta = \varphi$, $\gamma = \psi$ und $\delta = \omega$.

Folgerung:
Ergänzungswinkel ergänzen sich zu ✎ 180°:
$\alpha + \varphi = \alpha + \omega = 180°$,
$\beta + \varepsilon = \beta + \psi = 180°$,
$\gamma + \varphi = \gamma + \omega = 180°$,
$\delta + \varepsilon = \delta + \psi = 180°$.

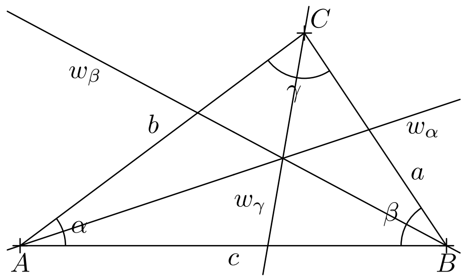
Wechselwinkel (= Scheitelwinkel von Stufenwinkeln) sind gleich gross, z.B. $\alpha = \psi$.

Folgerung:
Kriterium für Parallelität von Geraden
Sei eine Gerade h gegeben, die zwei Geraden g und g' schneidet, und seien α und α' zwei «sich entsprechende» Winkel wie in der Skizze rechts.
Dann folgt aus $\alpha = \alpha'$, dass die beiden Geraden g und g' parallel zueinander sind.



Standard-Bezeichnungen in Dreiecken

Wenn nicht explizit anders vereinbart, verwenden wir in einem Dreieck die folgenden Bezeichnungen:



A, B, C	**Eckpunkte**, normalerweise im Gegenuhrzeigersinn (= mathematisch positivem Drehsinn) benannt
a, b, c	**Seiten**, gegenüber von A liegt a etc.
α, β, γ	**Innenwinkel** an den entsprechenden Eckpunkten.
w_α, w_β, w_γ	**Winkelhalbierende** der entsprechenden Winkel.
h_a, h_b, h_c	**Höhen** auf die entsprechenden Seiten (nicht eingezeichnet)
M_a, M_b, M_c	**Seitenmittelpunkte** (nicht eingezeichnet)
m_a, m_b, m_c	**Mittelsenkrechten** der entsprechenden Seiten (nicht eingezeichnet), z.B. $m_a = m_{BC}$
s_a, s_b, s_c	**Seitenhalbierende oder Schwerlinien** der entsprechenden Seiten (nicht eingezeichnet), z.B. $s_a = AM_a$

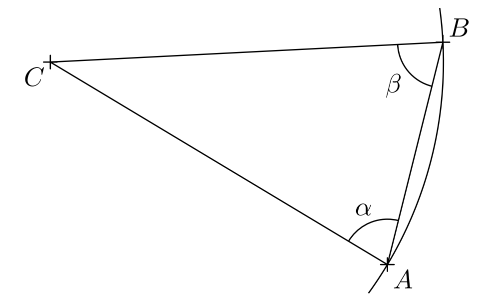
Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Aufgabe A22 Beweisen Sie mit Hilfe der oben genannten Eigenschaften von Neben-, Scheitel-, Stufen- und Ergänzungswinkeln, dass die (Innen-)Winkelsumme in jedem Dreieck 180° beträgt.

Hinweis: Zeichne eine geeignete parallele Gerade zu einer Seite ein.

Gleichschenklige Dreiecke

Ein Dreieck heisst genau dann **gleichschenklig**, wenn zwei Seiten gleich lang sind. Die gleich langen Seiten nennt man **Schenkel**, die dritte Seite heisst **Basis**. Die beiden Winkel zwischen Basis und Schenkeln sind dann gleich gross (also $\alpha = \beta$ in der Zeichnung rechts).
Umgekehrt gilt auch: Wenn in einem Dreieck zwei Winkel gleich gross sind, so ist das Dreieck gleichschenklig.



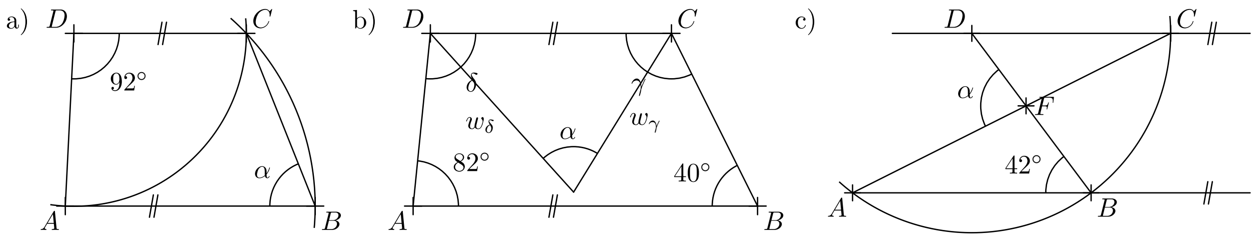
Gleichseitige Dreiecke

Ein Dreieck heisst genau dann **gleichseitig**, wenn seine drei Seiten gleich lang sind. Dann sind auch alle Winkel gleich 60°. Umgekehrt gilt auch: Sind alle Winkel in einem Dreieck gleich gross (nämlich 60° wegen der Winkelsumme im Dreieck), so ist das Dreieck gleichseitig.

Aufgabe A23 Wie gross ist jeweils der Winkel α?

Hinweis: Die Kreisbögen sollen andeuten, dass gewisse Abstände gleich sind (etwa $\overline{DA} = \overline{DC}$ in Teilaufgabe (a) und $\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC}$ in Teilaufgabe (c)).

Bemerkung: Die angegebenen Winkel stimmen teilweise nicht, damit Sie nachdenken, anstatt Winkel mit dem Geodreieck zu messen.



Aufgabe A24 Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden. Zeigen Sie, dass die beiden zugehörigen Winkelhalbierenden senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe A25 Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck mit $\alpha = \beta$ (unter Verwendung der Standard-Bezeichnungen). Finde in jedem der folgenden vier Fälle heraus, wie gross α ist.

a) $\gamma = 40°$ b) $\gamma = 3\alpha$ c) $\beta + \gamma = 140°$ d) $\alpha = \gamma$

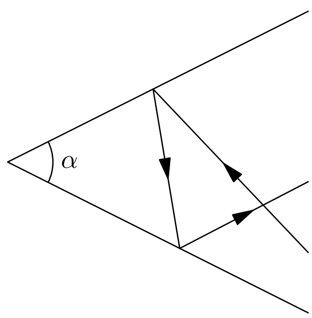
Aufgabe A26 Beweisen Sie: In jedem $\triangle ABC$ gilt $\sphericalangle(w_\alpha, w_\beta) = 90° - \frac{\gamma}{2}$ bzw. $\sphericalangle(w_\alpha, w_\beta) = 90° + \frac{\gamma}{2}$.
Die zwei möglichen Wahlen dieses Winkels ergänzen sich zu 180°.

Aufgabe A27

Ein Lichtstrahl wird an den beiden Schenkeln eines Winkels α reflektiert. Dabei gilt das Reflexionsgesetz aus der Physik:

Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel.

Unter welchem Winkel δ schneiden sich der einfallende und der ausfallende Lichtstrahl? *Hinweis: Führen Sie die Hilfswinkel β und γ im Dreieck mit dem Winkel α ein.*

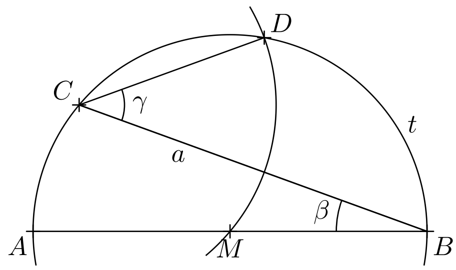


Aufgabe A28

Gegeben ist eine Strecke $[AB]$ und ein Winkel β mit Scheitel B und Schenkeln AB und a. Es wird folgende Konstruktion ausgeführt:

1. M_{AB} $\rightarrow M$
2. $k(M, \overline{MA})$ $\rightarrow t$
3. $a \cap t$ $\rightarrow C$
4. $k(C, \overline{CM}) \cap t$ $\rightarrow D$

a) Berechnen Sie $\gamma = \sphericalangle BCD$ in Abhängigkeit von β.
Hinweis: Untersuchen Sie das Dreieck $\triangle MCD$.
b) Für welchen Winkel β gilt $CD \parallel AB$?
Hinweis: Dies benötigt das Kriterium für Parallelität von Geraden.

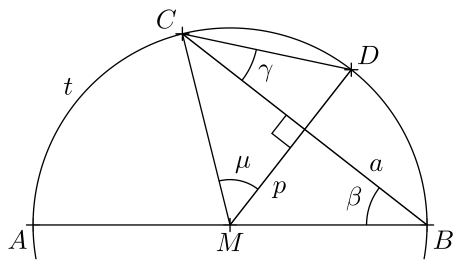


Aufgabe A29

Gegeben ist eine Strecke $[AB]$ und ein Winkel β mit Scheitel B und Schenkeln AB und a. Es wird folgende Konstruktion ausgeführt:

1. M_{AB} $\rightarrow M$
2. $k(M, \overline{MA})$ $\rightarrow t$
3. $a \cap t$ $\rightarrow C$
4. $\perp$ zu a durch M $\rightarrow p$
5. $p \cap t$ $\rightarrow D$

a) Berechnen Sie $\gamma = \sphericalangle BCD$ und $\mu = \sphericalangle DMC$ in Abhängigkeit von β.



2.6 Kreiswinkelsätze

Aufgabe A30 Entdecke die Aussagen der unten erklärten Kreiswinkelsätze selbst!

(a) Wähle zwei Punkte A und B, deren Abstand 10 cm beträgt.
  (i) Markiere mindestens 10 Punkte P, für die $\sphericalangle APB = 90°$ gilt.
  Empfohlenes Vorgehen: Stelle dir vor, dass sich zwei Stecknadeln an den Punkten A und B befinden. Nimm dein Geodreieck als «Schablone für einen 90°-Winkel» und bewege es so, dass sich seine beiden Katheten entlang der Stecknadeln bewegen.
  (ii) Stelle eine Vermutung auf, wie die Menge $\{P \in \text{Zeichenebene} \mid \sphericalangle APB = 90°\}$ aussieht.

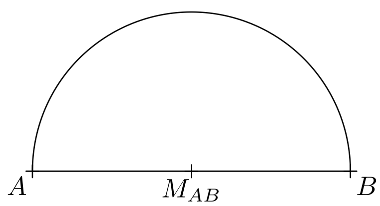
(b) Wähle nun zwei Punkte A und B mit Abstand 7 cm.
  (i) Markiere mindestens 10 Punkte P, für die $\sphericalangle APB = 45°$ gilt.
  Empfohlenes Vorgehen: Verwende wieder das Geodreieck als «Schablone für einen 45°-Winkel».
  (ii) Stelle eine Vermutung auf, wie die Menge $\{P \in \text{Zeichenebene} \mid \sphericalangle APB = 45°\}$ aussieht.
  (iii) Falls du bei der vorigen Teilaufgabe einen Kreis oder Kreisbogen vermutet hast: Konstruiere seinen Mittelpunkt M. (Hinweis: Aus drei verschiedenen Punkten eines Kreises kann man leicht den Mittelpunkt konstruieren.) Miss den Winkel $\sphericalangle AMB$. Fällt dir etwas auf?

(c) Wähle einen beliebigen Winkel α zwischen 10° und 80° (mit $\alpha \neq 45°$). Ersetze in der vorigen Teilaufgabe den Winkel 45° durch den Winkel α und löse die Aufgabe.
Hinweis: Du kannst dir entweder eine Kartonschablone für deinen Winkel α basteln oder die entsprechenden Punkte P auch wie folgt ermitteln: Lass von A einen Strahl ausgehen. Finde auf diesem Strahl einen Punkte P mit $\sphericalangle APB = \alpha$; Hinweis zu Letzterem: Winkelsumme im Dreieck ABP. Alternative: Trage in einem beliebigen Punkt des Strahls den Winkel α ab und konstruiere die Parallele zu seinem anderen Schenkel, die durch B geht.

Thales-Kreis (bzw. Thales-Halbkreis)

Definition 2.6.1 Thales-Kreis bzw. Thales-Halbkreis

Sind zwei verschiedene Punkte A und B gegeben, so heisst der Kreis $k(M_{AB}; \frac{1}{2}\overline{AB})$ **Thales-Kreis**. Seinen Kreisbogen von B nach A (im mathematisch positiven Drehsinn) nennen wir **Thales-Halbkreis** über der Strecke $[AB]$, vgl. die Zeichnung rechts. Letztere Bezeichnung habe ich bisher nirgends gelesen, obwohl sie mir sehr nützlich erscheint.



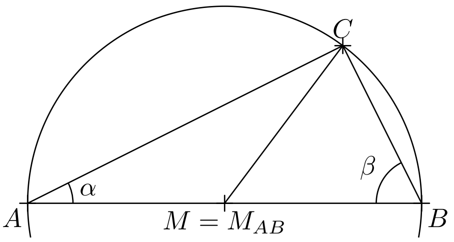
Satz 2.6.2 von Thales samt Umkehrung

Gegeben ist ein Dreieck ABC. Dann gelten:

(a) Satz von Thales: Wenn der Punkt C auf dem Thales-Halbkreis über der Strecke $[AB]$ liegt, so hat das Dreieck einen rechten Winkel bei C.

(b) Umkehrung des Satzes von Thales: Hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel, so liegt C auf dem Thales-Halbkreis über der Strecke $[AB]$, d.h. mit anderen Worten ist M_{AB} der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC.

Beweis. (a) Beweis von $C \in$ (Thales-Halbkreis) $\Rightarrow \gamma = 90°$.



✎ Gelte $C \in$ (Thales-Halbkreis).

$\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$

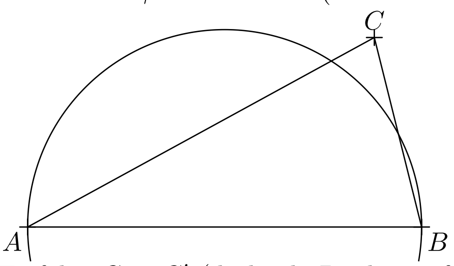
$\Rightarrow \triangle AMC$ und $\triangle MBC$ gleichschenklig.

$\Rightarrow \gamma = \alpha + \beta$.

$\Rightarrow 180° \overset{\text{Winkelsumme}}{=} \alpha+\beta+\gamma = \gamma+\gamma = 2\gamma$.

Division durch 2 liefert $90° = \gamma$.

(b) Beweis von $\gamma = 90° \Rightarrow C \in$ (Thales-Halbkreis).



Gelte $\sphericalangle ACB = 90°$ (Zeichnung bewusst falsch).
Sei C' der Schnittpunkt des Thales-Halbkreises mit der Geraden AC. Zeichne $[BC']$ ein.
Satz von Thales: $\sphericalangle AC'B = 90°$.
Die Gerade AC schneidet BC und BC' im selben Winkel $90°$, also sind BC und BC' parallel (Kriterium für Parallelität von Geraden, siehe Abschnitt 2.5); genauer gilt $BC = BC'$, da beide Geraden durch den Punkt B gehen.
Es folgt $C = C'$ (da beide Punkte auf AC und auf $BC = BC'$ liegen). Nach Konstruktion liegt C' auf dem Thales-Halbkreis. Also hat auch $C = C'$ diese Eigenschaft.

□

Satz 2.6.3 Umformulierung des Satzes von Thales samt Umkehrung als Gleichheit von Mengen

Sind zwei beliebige, aber verschiedene Punkte A und B gegeben, so ist der zugehörige Thales-Halbkreis der geometrische Ort aller Punkte P, von denen aus die Strecke $[AB]$ unter einem Winkel von $90°$ erscheint, in Formeln

$$\text{Thales-Halbkreis} = \{P \in \text{Zeichenebene} \mid \sphericalangle APB = 90°\}$$

Beweis. Die Inklusion $\subset$ ist Teil (a) von Satz 2.6.2, die Inklusion $\supset$ ist Teil (b). □

Merke 2.6.4

Gegeben ist Kreis $k = k(Z, r)$ und ein Punkt B auf diesem Kreis. Die **Tangente** an k im Punkt B ist die Senkrechte zu ZB durch B; diese Gerade hat die Eigenschaft, dass sie k in genau einem Punkt, nämlich B, schneidet; in anderen Worten ist die Tangente diejenige Gerade, die k im Punkt B berührt (lateinisch *tangere* = berühren).

Aufgabe A31 Gegeben ist ein Kreis $k = k(Z, r)$ und ein Punkt P ausserhalb von k. Konstruieren Sie alle Tangenten an k durch P.

Aufgabe A32 Anschaulich: Eine Leiter lehnt fast senkrecht an einer Wand (= der y-Achse) und rutscht dann langsam ab, bis sie am Boden (= der x-Achse) liegt. Welche Kurve beschreibt der Mittelpunkt der Leiter?

Abstrakt: Wählen Sie einen beliebigen Punkt A auf der x-Achse (A ist der Fusspunkt der Leiter) und (falls möglich) einen Punkt B auf der y-Achse mit $\overline{AB} = 6$ (= Länge der Leiter) und markieren Sie M_{AB}. Wenn A variiert, was ist der geometrische Ort aller Punkte M_{AB}, die man auf diese Weise erhält? Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie diese.

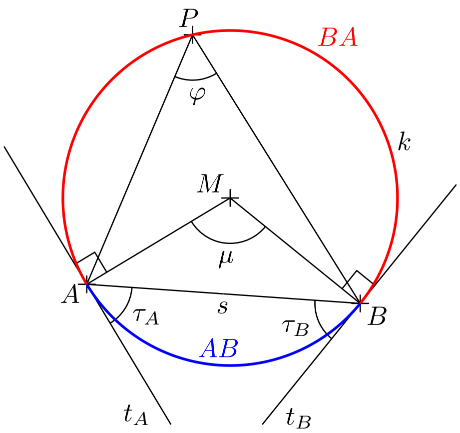
Aufgabe A33 Gegeben sind zwei Kreise $k_1 = k(Z_1, r_1)$ und $k_2 = k(Z_2, r_2)$ mit $Z_1 = (-3, 1)$ und $r_1 = 3$ und $Z_2 = (4, -3)$ und $r_2 = 1.5$. Konstruieren Sie alle 4 Geraden, die beide Kreise berühren.

Hinweis: Vergrössert oder verkleinert man die Radien beider Kreise um die gleiche Länge, so verschieben sich gemeinsame Tangenten parallel. Vergrössern, bzw. verkleinern Sie einen Kreis so, dass der andere zum Punkt wird. Machen Sie erst eine Skizze, um die Situation zu verstehen.

Aufgabe A34 In einem allgemeinen Dreieck $\triangle ABC$ sei H_a bzw. H_b der Höhenfusspunkt der Höhe h_a bzw. h_b auf der (Verlängerung der) Seite a bzw. b. Zeigen Sie, dass das Dreieck $\triangle M_{AB}H_aH_b$ gleichschenklig ist.

Sätze über Zentri-, Peripherie- und Sehne-Tangente-Winkel

Definition 2.6.5



Seien A und B zwei verschiedene Punkte auf einem Kreis k mit Mittelpunkt M. Dann bezeichnen wir

- den Kreisbogen von A nach B (im mathematisch positiven Drehsinn) als $\overset{\frown}{AB}$; blau gefärbt; gebogener Pfeil über AB dort zu ergänzen
- den Kreisbogen von B nach A als $\overset{\frown}{BA}$. rot gefärbt

Wir nennen

- die Strecke $s = [AB]$ eine **Sehne** im Kreis k. Allgemein heisst jede Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten eines Kreises Sehne.
- den Winkel $\mu = \sphericalangle AMB$ **Zentriwinkel** (oder **Mittelpunktswinkel**) über dem Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ (oder über der Sehne $[AB]$).
- für jeden Punkt $P \in \overset{\frown}{BA}$ den Winkel $\varphi = \sphericalangle APB$ **Peripheriewinkel** (oder Umfangswinkel) bei P über dem Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ (oder über der Sehne $[AB]$).

In der Zeichnung sind ausserdem die Tangente t_A an den Kreis k im Punkt A und die Tangente t_B an den Kreis k im Punkt B eingezeichnet. Interessant sind die beiden Winkel zwischen Sehne $s = [AB]$ und diesen Tangenten. Wir nennen den Winkel

- τ_A **Sehne-Tangente-Winkel** bei A zum Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$;
- τ_B **Sehne-Tangente-Winkel** bei B zu $\overset{\frown}{AB}$ Gemeint ist beide Male der Winkel, der den blauen Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ «enthält».

Satz 2.6.6 Kreiswinkelsätze

Gegeben seien zwei beliebige Punkte $A \neq B$ auf einem beliebigen Kreis k mit Mittelpunkt M.

Sei $P \in \overset{\frown}{BA}$ ein beliebiger Punkt und seien $\mu = \sphericalangle AMB$, $\varphi = \sphericalangle APB$ und τ_A und τ_B wie in Definition 2.6.5. Dann gelten

$$\varphi = \frac{1}{2}\mu = \tau_A = \tau_B \qquad \text{oder gleichbedeutend} \qquad \mu = 2\varphi = 2\tau_A = 2\tau_B$$

In Worten:

(1) **Peripheriewinkel-Satz:** Alle Peripheriewinkel über einem fixierten Kreisbogen sind gleich gross, nämlich halb so gross wie der entsprechende Zentriwinkel. (Denn unabhängig von der Wahl des Punktes $P \in \overset{\frown}{BA}$ gilt $\sphericalangle APB = \varphi = \frac{1}{2}\mu$ und der Zentriwinkel μ hängt offensichtlich nicht von P ab.)

(2) **Sehne-Tangente-Winkel-Satz:** Die beiden Sehne-Tangente-Winkel sind gleich gross und genauso gross wie jeder Peripheriewinkel über dem zugehörigen Kreisbogen.

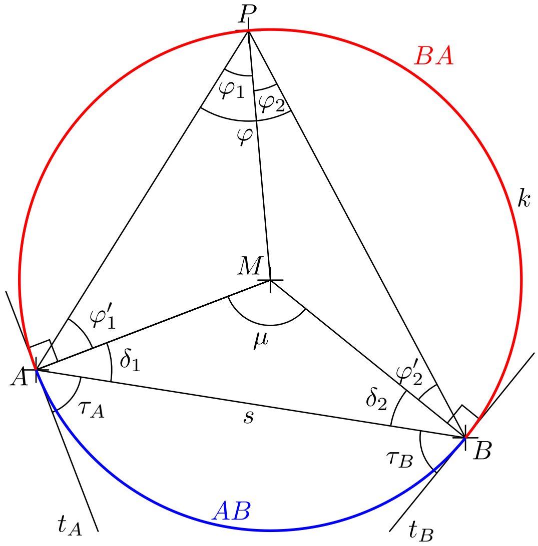
(3) **Zentriwinkel-Satz:** Der Zentriwinkel über dem Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ ist doppelt so gross wie jeder Peripheriewinkel/wie jeder der beiden Sehne-Tangente-Winkel.

2.6.7. Beachte: Der Peripheriewinkel-Satz liefert den Satz von Thales 2.6.2.(a) als Spezialfall: Wenn die Sehne $[AB]$ ein Durchmesser ist (also durch den Mittelpunkt M des Kreises geht), so beträgt der Zentriwinkel $180°$ und somit jeder Peripheriewinkel $\frac{180°}{2} = 90°$.

Beweis. Zu zeigen ist

$$\mu = 2\varphi = 2\tau_A = 2\tau_B$$

Wir verbinden P mit M und verwenden die Winkel φ_1, φ_2, φ_1', φ_2', δ_1 und δ_2 (siehe Zeichnung).



✎ Offensichtlich gilt

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

Gleichschenklige Dreiecke:

$$\triangle ABM, \qquad \triangle AMP, \qquad \triangle BPM$$

Also

$$\delta_1 = \delta_2, \qquad \varphi_1 = \varphi_1', \qquad \varphi_2 = \varphi_2'$$

Winkelsumme in den Dreiecken ABM und ABP:

$$\delta_1+\delta_2+\mu \overset{ABM}{=} 180^\circ \overset{ABP}{=} \varphi_1'+\delta_1+\delta_2+\varphi_2'+\varphi_1+\varphi_2$$

Subtrahiere δ_1 und δ_2 auf beiden Seiten:

$$\mu = \varphi_1' + \varphi_2' + \varphi_1 + \varphi_2 \overset{\text{siehe oben}}{=} \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2 \overset{\text{siehe oben}}{=} \varphi + \varphi = 2\varphi$$

Damit ist der Peripheriewinkel-Satz bewiesen.

Die Tangente t_A bzw. t_B steht senkrecht auf dem Radius MA bzw. MB:

$$\delta_1 + \tau_A = 90^\circ \qquad \text{bzw.} \qquad \delta_2 + \tau_B = 90^\circ$$

Wegen $\delta_1 = \delta_2$ folgt

$$\tau_A = 90^\circ - \delta_1 = 90^\circ - \delta_2 = \tau_B$$

d.h. die beiden Sehne-Tangente-Winkel sind gleich.

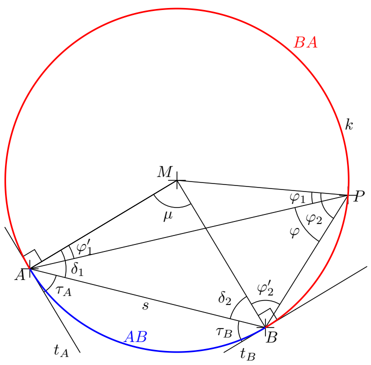
Nochmals Winkelsumme im Dreieck ABM:

$$\mu = 180^\circ - \delta_1 - \delta_2 = \underbrace{90^\circ - \delta_1}_{=\tau_A=\tau_B} + \underbrace{90^\circ - \delta_2}_{=\tau_B=\tau_A} = \tau_A + \tau_B = 2\tau_A = 2\tau_B$$

□

2.6.8. Genaugenommen muss man die Kreiswinkelsätze noch in den beiden folgenden Fällen beweisen. Die Argumentation geht fast genauso wie in dem obigen Beweis.

Das Dreieck ABM ist nicht im Dreieck ABP enthalten.



Der betrachtete Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ ist länger als der halbe Kreisumfang; mit anderen Worten ist der Zentriwinkel $\mu > 180^\circ$.

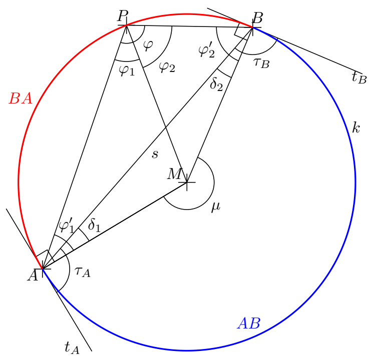
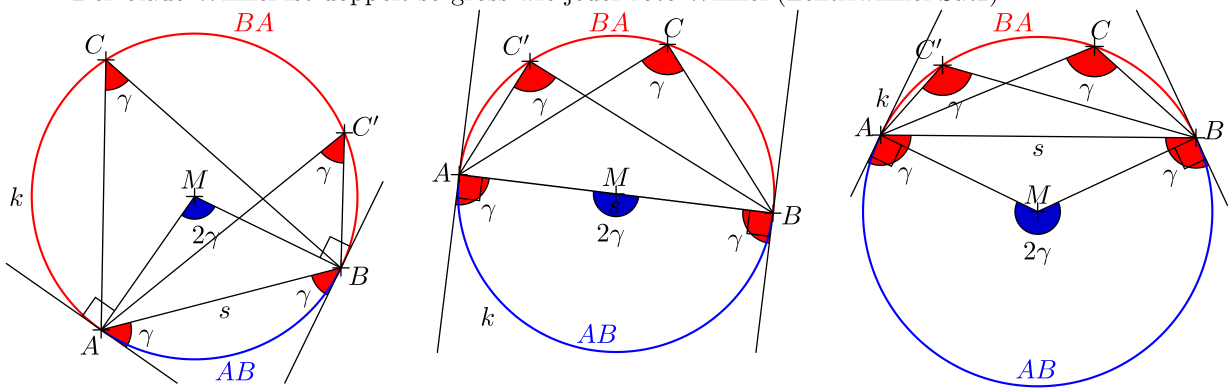


Illustration 2.6.9 der Kreiswinkelsätze

Die folgenden drei Bilder illustrieren die Kreiswinkelsätze in den Fällen, dass der Zentriwinkel über dem betrachteten blauen Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ kleiner als 180° bzw. gleich 180° (Thales-Fall, Kreisbogen ist Halbkreis, Sehne ist Durchmesser) bzw. grösser als 180° ist. Jeweils gelten:

- Alle roten Winkel sind gleich gross (Peripheriwinkelsatz und Sehne-Tangente-Winkel-Satz).
- Der blaue Winkel ist doppelt so gross wie jeder rote Winkel (Zentriwinkel-Satz).



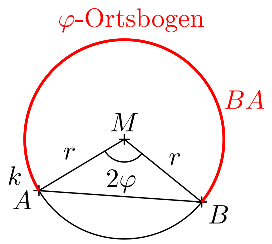
Ortsbogen

Satz 2.6.10 Umkehrung des Peripheriewinkel-Satzes

Gegeben sind zwei Punkte $A \neq B$ und ein fixierter Winkel $0 < \varphi < 180°$.
Ist P ein beliebiger Punkt der Zeichenebene mit $\sphericalangle APB = \varphi$, so liegt P auf dem (in der nachfolgenden Definition 2.6.11 definierten) φ-Ortsbogen über $[AB]$.

Beweis. Der Beweis geht vollkommen analog zum Beweis der Umkehrung des Satzes von Thales (Teil (b) von Satz 2.6.2): Man ersetze den dortigen Winkel 90° durch φ, das Wort «Thales-Halbkreis» durch das Wort «φ-Ortsbogen» und verwende statt des Satzes von Thales den Peripheriewinkel-Satz. □

Definition 2.6.11 Ortsbogen zu einem Winkel φ



Gegeben sind zwei Punkte $A \neq B$ und ein fixierter Winkel $0 < \varphi < 180°$.
Beachte: Es gibt genau einen Punkt M der Zeichenebene mit (vgl. Aufgabe 35)

$$\overline{MA} = \overline{MB} \quad \text{und} \quad \sphericalangle AMB = 2\varphi$$

Dann ist der **φ-Ortsbogen über der Strecke** $[AB]$ definiert als der Kreisbogen $\overset{\frown}{BA}$ des Kreises $k = k(M, r)$ mit Radius $r = \overline{MA} = \overline{MB}$.

Statt des rot geschriebenen BA sollte in der Zeichnung $\overset{\frown}{BA}$ stehen.

Satz 2.6.12 Umformulierung des Peripheriewinkelsatzes samt Umkehrung als Gleichheit von Mengen

Gegeben sind zwei Punkte $A \neq B$ und ein fixierter Winkel $0 < \varphi < 180°$. Dann ist der φ-Ortsbogen über $[AB]$ der geometrische Ort aller Punkte P, von denen aus die Strecke $[AB]$ unter dem Winkel φ erscheint, in Formeln

$$(\varphi\text{-Ortsbogen}) = \{P \in \text{Zeichenebene} \mid \sphericalangle APB = \varphi\}$$

Daher der Name φ-Ortsbogen: Es handelt sich um einen geometrischen Ort und dieser ist ein Kreisbogen.

Beweis. Die Inklusion $\subset$ (d.h. die linke Menge ist in der rechten enthalten) ist der Peripheriewinkel-Satz 2.6.6, die Inklusion $\supset$ (d.h. die rechte Menge ist in der linken enthalten) ist seine Umkehrung, Satz 2.6.10. □

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Aufgabe A35 Wählen Sie zwei beliebige Punkte A und B, die mindestens 8 cm voneinander entfernt liegen.

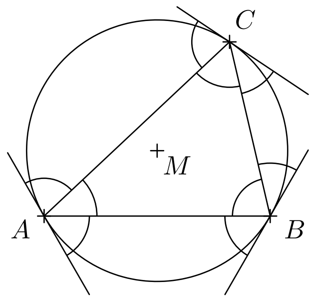
(a) Gegeben ist der Winkel $\varphi = 65°$. Konstruieren Sie den Punkt M, der die beiden Bedingungen $\overline{MA} = \overline{MB}$ und $\sphericalangle AMB = 2\varphi$ aus Definition 2.6.11 erfüllt.
Zeichnen Sie damit den 65°-Ortsbogen über der Strecke $[AB]$.

(b) Lösen Sie dieselbe Aufgabe mit $\varphi = 115°$.
Achtung: Der Punkt M liegt nicht «oberhalb» der Strecke $[AB]$, der 115°-Ortsbogen aber schon!

2.7 Aufgaben zu den Kreiswinkelsätzen (inklusive Ortsbögen)

Aufgabe A36

Gegeben ist ein Dreieck ABC samt Umkreis mit Umkreismittelpunkt im Inneren und Tangenten an den Umkreis in den Eckpunkten wie in der Skizze angedeutet. Welche der neun markierten Winkel sind gleich gross? Markieren Sie gleich grosse Winkel mit derselben Farbe.



Aufgabe A37 Sie befinden sich auf einem Boot auf dem Bodensee und sehen die Strecke Arbon-Rorschach unter einem Winkel von $\alpha = 70°$ (d.h. $\sphericalangle$(Arbon)(Boot)(Rorschach) $= 70°$) und die Strecke Rorschach-Staad unter einem Winkel von $\beta = 45°$. (Solche Winkel-Messungen führt man wohl mit einem Sextanten durch.) Konstruieren Sie in die folgende «Seekarte» des Bodensees den Punkt, an dem sich Ihr Boot befindet. Gerne dürfen Sie die Seekarte durch die ungefähre Uferlinie ergänzen.

Aufgabe A38 Wenn von einem Dreieck ABC die folgenden Daten bekannt sind, konstruieren sie jeweils das Dreieck oder die Dreiecke mit diesen Daten (Einheit jeweils 2 Häuschen oder 1cm).

(a) $c = 5$, $\gamma = 60°$, $h_c = 4$
(b) $c = 5$, $\gamma = 60°$, $\delta = \sphericalangle ACM_{AB} = 40°$
(c) $c = 5$, $h_a = 3$, $\gamma = 70°$

Aufgabe A39 Definition: Ein Viereck $ABCD$ heisst **Sehnenviereck**, wenn es einen geeigneten Kreis k gibt, so dass die vier Eckpunkte A, B, C, D in dieser Reihenfolge auf dem Kreis liegen. Der Name *Sehnenviereck* kommt daher, dass die vier Seiten des Vierecks *Sehnen* des Kreises k sind.

(a) Zeigen Sie: Ist $ABCD$ ein Sehnenviereck, so ergänzen sich gegenüberliegende Winkel zu 180° (d.h. $\alpha+\gamma = 180°$ und $\beta+\delta = 180°$).
Hinweis: Peripheriewinkel-Satz oder Sehne-Tangente-Satz; betrachte die Sehne AC und die *beiden* Kreisbögen $\overset{\frown}{AC}$ und $\overset{\frown}{CA}$.

(b) Zeigen Sie: Ist $ABCD$ ein nicht-überschlagenes Viereck, dessen gegenüberliegende Winkel sich zu 180° ergänzen, so ist $ABCD$ ein Sehnenviereck.
Hinweis: Betrachte den Umkreis des Dreiecks ABC und verwende die Umkehrung des Peripheriewinkel-Satzes.

Ein «überschlagenes» Viereck ist ein Viereck mit zwei gegenüberliegenden Seiten, die sich schneiden. Beispiel: Ist $WXYZ$ ein Quadrat oder Rechteck, so sind $WXZY$ und $WYXZ$ überschlagene Vierecke.

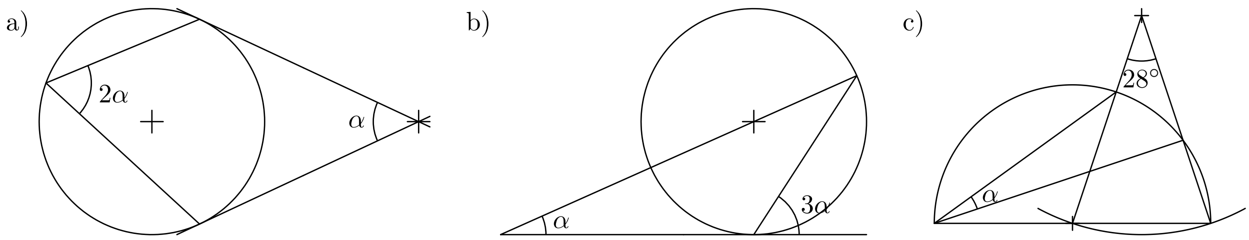
Bemerkung: Dies liefert die folgenden Charakterisierung von Sehnevierecken: Ein nicht-überschlagenes Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn sich gegenüberliegende Winkel zu 180° ergänzen (dies muss man nur bei einem Paar sich gegenüberliegender Winkel checken).

Aufgabe A40 Gegeben sind zwei unterschiedlich grosse Kreise k_1 und k_2, die sich in einem Punkt B von aussen berühren. Durch den Punkt B wird eine Gerade g gelegt, die keine Tangente an die Kreise ist. Die Gerade g schneidet den Kreis k_1 bzw. k_2 in einem weiteren Punkt T_1 bzw. T_2. Sei t_1 bzw. t_2 die Tangente an k_1 bzw. k_2 im Punkt T_1 bzw. T_2.

a) Machen Sie eine saubere Skizze der Situation.

b) Beweisen Sie, dass $t_1 \parallel t_2$.

Aufgabe A41 Berechnen Sie den Winkel α:



Aufgabe A42 Gegeben sind zwei unterschiedlich grosse Kreise k_1 und k_2, die sich in zwei Punkten A und B schneiden. Weiter ist eine beliebige Gerade g durch A gegeben, die jeden der beiden Kreise in einem weiteren Punkt schneidet. Sei C der „neue" Schnittpunkt von g und k_1 und sei D der „neue" Schnittpunkt von g und k_2.

a) Machen Sie eine saubere Skizze der Situation.

b) Beweisen Sie, dass der Winkel $\sphericalangle CBD$ immer gleich gross ist, egal wie g durch A gelegt wird.

Aufgabe A43 Diese Aufgabe kann mit GeoGebra gelöst werden.

Gegeben sind ein Kreis k und vier beliebige Punkte $A, B, C, D \in k$, so dass sich die Sehnen $[AB]$ und $[CD]$ nicht schneiden.

Hinweis: Die Sehne $[CD]$ soll mit gleichbleibender Länge auf dem Kreis wandern können. Definieren Sie darum in GeoGebra die Sehne $[CD]$ mit Hilfe eines Kreises mit Mittelpunkt C auf k und gegebenem Radius. Der Punkt D ist dann ein Schnittpunkt der beiden Kreise.

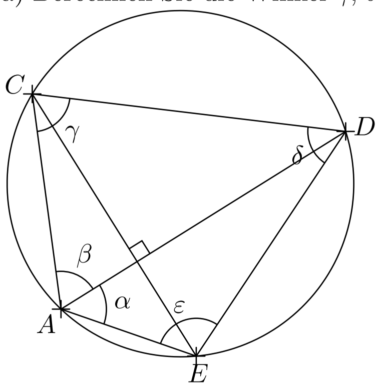
Sei X der Diagonalenschnittpunk des Vierecks $ABCD$.

Wenn die Sehne $[CD]$, ohne ihre Länge zu ändern, auf k wandert, wo liegen dann alle Punkte X? Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie diese.

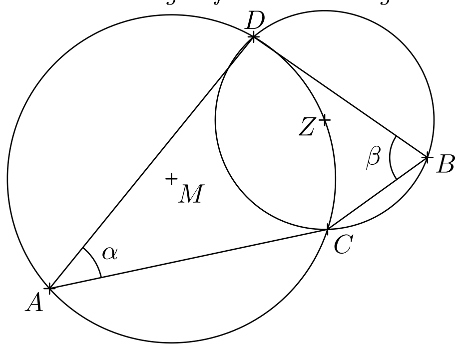
Aufgabe A44 Gegeben ist ein allgemeines Dreieck $\triangle ABC$. Im Punkt A wird die Tangente t an den Umkreis gelegt. Berechnen Sie den Winkel $\delta = \sphericalangle(t, a)$, wenn α, β und γ gegeben sind. Machen Sie eine saubere Skizze der Situation. *Hinweis: Anzugeben ist δ in Abhängigkeit von zwei beliebigen der drei Winkel α, β und γ.*

Aufgabe A45

a) Berechnen Sie die Winkel γ, δ und ε aus α und β:



b) Wie hängen α und β zusammen? *Hinweis: A und B sind beliebig auf den Kreisen gewählt.*



Aufgabe A46

Gegeben sind zwei Kreise k_1 und k_2, die sich nicht schneiden und nicht ineinander liegen. Es gibt also zwei äussere gemeinsame Tangenten t_1 und t_2 und zwei innere gemeinsame Tangenten t_3 und t_4. Jede innere Tangente schneidet jede äussere Tangente; dies ergibt vier Schnittpunkte. Zeigen Sie, dass diese vier Schnittpunkte auf einem Thaleskreis über der Strecke $[Z_1Z_2]$ liegen.

Machen Sie dazu eine gute Skizze mit Zirkel und Lineal, die gemeinsamen Tangenten brauchen aber nicht konstruiert zu werden.

Aufgabe A47

Beweisen Sie: In jedem Dreieck ABC gilt $w_\gamma \cap m_{AB} \in u$, wobei u der Umkreis des Dreiecks ist.

Aufgabe A48

Gelernt aus Rademacher-Toeplitz, Von Zahlen und Figuren, Seite 20f.

Ist ABC ein beliebiges Dreieck, so hat das aus den Höhenfusspunkten gebildete Dreieck EFG die Reflexionseigenschaft = Billard-Eigenschaft: Der Strahl von jedem Höhenfusspunkt zu jedem der beiden anderen Höhenfusspunkte wird von der entsprechenden Dreiecksseite zum dritten Höhenfusspunkt reflektiert.

2.8 Repetitionsaufgaben zum Konstruieren und zu Kegelschnitten

Ab hier Aufgaben, die eher zum Anfang des Planimetrie-Skripts (bis zum Themengebiet Kegelschnitte (Parablen, Ellipsen, Hyperbeln)) gehören. Sie sollten als eigenständige Serie von Repetitionsaufgaben ans Ende des ersten Teils!

Aufgabe A49 Zeichnen Sie ein spitzwinkliges (= alle drei Winkel $< 90°$) Dreieck ABC und konstruieren Sie einen Halbkreis mit Mittelpunkt auf der Seite c so, dass die Seiten a und b Tangenten des Halbkreises sind.

Aufgabe A50 Gegeben sind jeweils zwei Objekte:

(a) zwei sich schneidende Geraden g und h mit $\sphericalangle(g, h) = 60°$;
(b) zwei sich schneidende Kreise $k_1 = k(M_1, r_1 = 3)$ und $k_2 = k(M_2, r_2 = 2.5)$ mit $\overline{M_1M_2} = 4$;
(c) eine Gerade g und ein Kreis $k = k(M, r = 3)$ mit $\overline{Mg} = 1$.

Konstruieren Sie jeweils alle Kreise mit Radius 1, die beide Objekte berühren. Wie gross ist jeweils die Anzahl der Lösungen?

Aufgabe A51 Physikalische Beobachtung: Ein Lichtstrahl g wird von einer Kurve k so reflektiert, als ob der Lichtstrahl von der Tangente im Schnittpunkt $g \cap k$ reflektiert würde.

Gegeben ist ein Kreis um $Z = (1, -2)$ mir Radius $r = 4$ und die Punkte $A = (-6, 4)$ und $B = (-4, 3)$. Konstruieren Sie die Reflexion am Kreis des von A durch B gehenden Lichtstrahls.

Aufgabe A52 Von einer Ellipse kennt man den einen Brennpunkt $B_1 = (2, 0)$ und zwei Punkte $P_1 = (0, 2)$ und $P_2 = (-1, 1)$ auf der Ellipse.

a) Gegeben ist die Abstandssumme $d = 5$. Konstruieren Sie den (die) zweiten Brennpunkt(e) und skizzieren Sie die Ellipse(n).
b*) Wenn die Abstandssumme nicht gegeben ist, beschreiben Sie den geometrischen Ort aller zweiten Brennpunkte B_2.

Aufgabe A53 Gegeben sind zwei Kreise k_1 und k_2 mit Zentren Z_1 und Z_2 und unterschiedlichen Radien r_1 und r_2.

a) Beschreiben Sie, wie man die Kreiszentren Z_3 eines Kreises k_3 mit gegebenem Radius r_3 konstruiert, so dass k_3 beide Kreise k_1 und k_2 berührt. Wie viele Lösungen kann es maximal geben? Kann es gar keine Lösungen geben?

In den beiden restlichen Teilaufgaben nehmen wir an, dass $\overline{Z_1Z_2} > r_1 + r_2$ gilt (und somit $k_1 \cap k_2 = \varnothing$).
b) Beschreiben Sie, wie man den Kreis mit kleinstmöglichem Radius konstruiert, der beide Kreise k_1 und k_2 berührt.

c) Was ist der geometrische Ort aller Kreiszentren der Kreise, die beide gegebenen Kreise von aussen berühren?

Aufgabe A54 Von einer Parabel kennt man zwei Punkte auf der Parabel $P_1 = (-4, 0)$ und $P_2 = (4, 2)$ sowie den Brennpunkt $B = (-1, -3)$. Konstruieren Sie alle möglichen Leitlinien und die entsprechenden Scheitelpunkte der Parablen (Punkte, die am nächsten an der Leitlinie sind) und skizzieren Sie die entsprechenden Parabeln.

Aufgabe A55 Zeigen Sie, dass sich eine Ellipse und eine Hyperbel mit gemeinsamen Brennpunkten senkrecht schneiden. Verwenden Sie dazu die Reflexionseigenschaften der beiden Kurven. *Hinweis: Der Schnittwinkel zweier Kurven bei einem Schnittpunkt ist per Definition der (kleinere der beiden) Winkel zwischen den beiden Tangenten im Schnittpunkt.*

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

2.9 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 2 ex-kb-abstand-p-g

Gegeben: Gerade g, Punkt P (mit $P \notin g$).

1. Wähle $r > \overline{Pg}$ $\rightarrow r$
2. $k(P, r)$ $\rightarrow k$
3. $k \cap g$ $\rightarrow A,\ B$
4. M_{AB} $\rightarrow Q$
5. $\overline{PQ}$ $\rightarrow \overline{Pg}$

Lösung zu Aufgabe 3 ex-kb-strecke-abtragen

Gegeben: Strecke $[AB]$, Gerade g mit Punkt $P \in g$.

1. $\overline{AB}$ $\rightarrow r$
2. $k(P, r)$ $\rightarrow k$
3. $k \cap g$ $\rightarrow C,\ D$

Lösung zu Aufgabe 4 ex-kb-gleichseitiges-dreieck

Gegeben: Länge $s = 5$ cm.

1. Punkt A wählen $\rightarrow A$
2. Gerade c durch A wählen $\rightarrow c$
3. s von A auf g abtragen $\rightarrow B_1,\ B_2$
4. $k(A, s)$ $\rightarrow k_1$
5. $k(B_1, s)$ $\rightarrow k_2$
6. $k_1 \cap k_2$ $\rightarrow C_1,\ C_2$

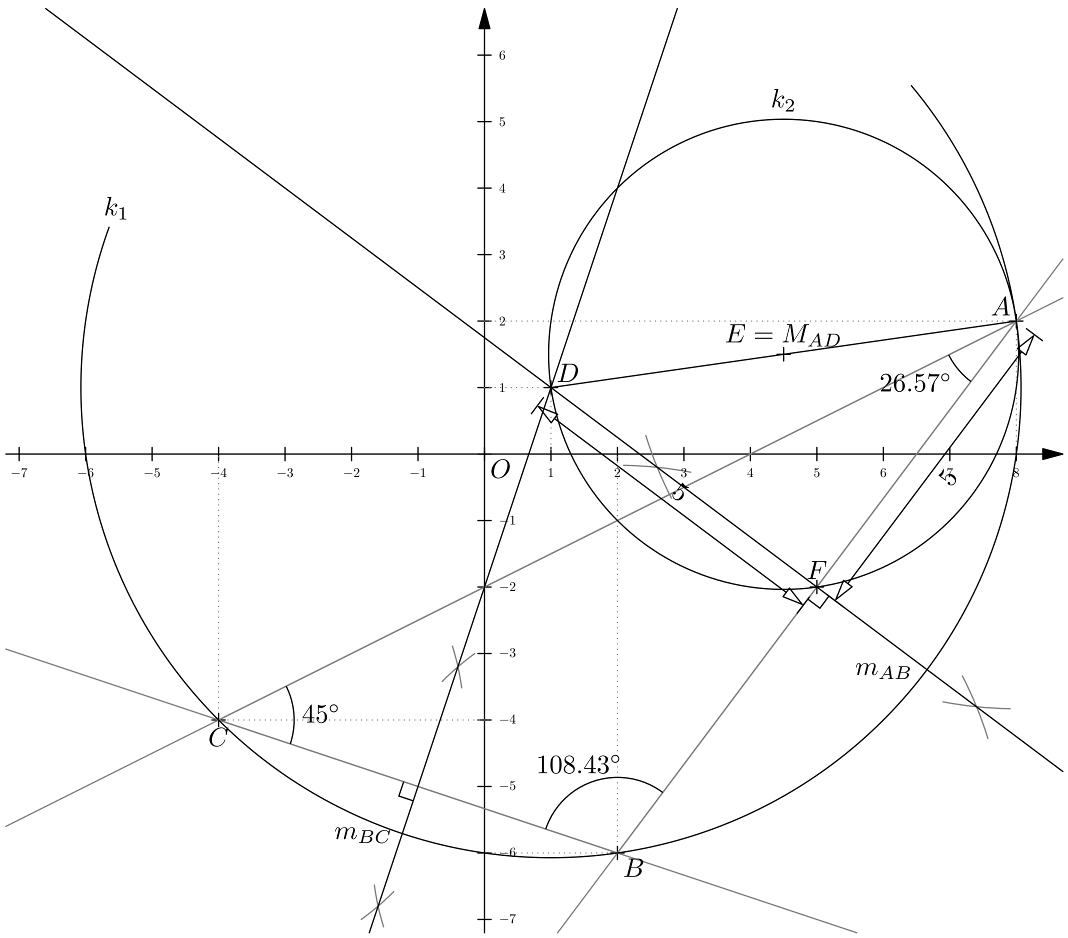
Lösung: ΔAB_1C_1.

Lösung zu Aufgabe 6 ex-kb-penta-aus-seite

Gegeben: Punkte A, B.

1. Senkrechte zu AB durch A $\rightarrow h$
2. $k(A, \overline{AB})$ $\rightarrow k_1$
3. $k_1 \cap h$ $\rightarrow H$
4. $k(M_{AB}, \overline{M_{AB}H}) \cap AB$ $\rightarrow J$
5. $k(B, \overline{BJ})$ $\rightarrow k_2$
6. $k_1 \cap k_2$ $\rightarrow E$
7. $m_{AB} \cap k_2$ $\rightarrow D$
8. $k(D, \overline{DE}) \cap k(B, \overline{AB})$ $\rightarrow C$

Lösung zu Aufgabe 7 ex-koordinaten-system-einfuehrung



(c) $D = (1, 1)$ (sogar exakt).

(d) 10 Einheiten (bei 8mm Einheit: 80mm/8mm = 10)
Berechnung mit Pythagoras: Betrachte das rechtwinklige Dreieck mit den Eckpunkten A, B und $(8, -6)$. Seine Katheten haben die Längen 6 und 8, somit hat die Hypotenuse die Länge $\sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$.

(e) Feststellung: $A, B, C \in k_1$. Mit anderen Worten ist D der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$.
Begründung: Wegen $D \in m_{AB}$ gilt $\overline{DA} = \overline{DB}$; wegen $D \in m_{BC}$ gilt $\overline{DB} = \overline{DC}$. Insgesamt folgt $\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC}$, d.h. die drei Punkte A, B, C liegen alle auf dem Kreis $k_1 = k(D, \overline{DA})$.

(g) $\alpha \approx 26.57°$, $\beta \approx 108.43°$, $\gamma = 45°$.
Das Ergebnis sollte 180° sein (Winkelsumme im Dreieck). Da man die Winkel nicht ganz exakt messen kann, beträgt die berechnete Summe ungefähr 180°.

(i) Ja, es gilt $F \in k_2$. Wegen $\sphericalangle DFA = 90°$ liegt F auf dem Thaleskreis über der Strecke $[DA]$.
Beachte: Der Thaleskreis über einer Strecke besteht genau aus denjenigen Punkten, von denen aus die Strecke unter einem rechten Winkel erscheint.

(j) In dieser speziellen Situation gilt das.
Würde man den Punkt C etwas in Richtung B verschieben, würde sich $[DF]$ ändern, $[AF]$ aber nicht.

Lösung zu Aufgabe 8 ex-beweise-zur-geom-orte-tabelle

Sei $M = M_{AB}$ der Mittelpunkt von A und B. Per Definition ist m_{AB} die Senkrechte zu AB durch M.

(a) Wir nehmen an, dass $\overline{AM} = \overline{BM}$ gilt. Pythagoras auf die rechtwinkligen Dreiecke AMP und BMP angewendet ergibt

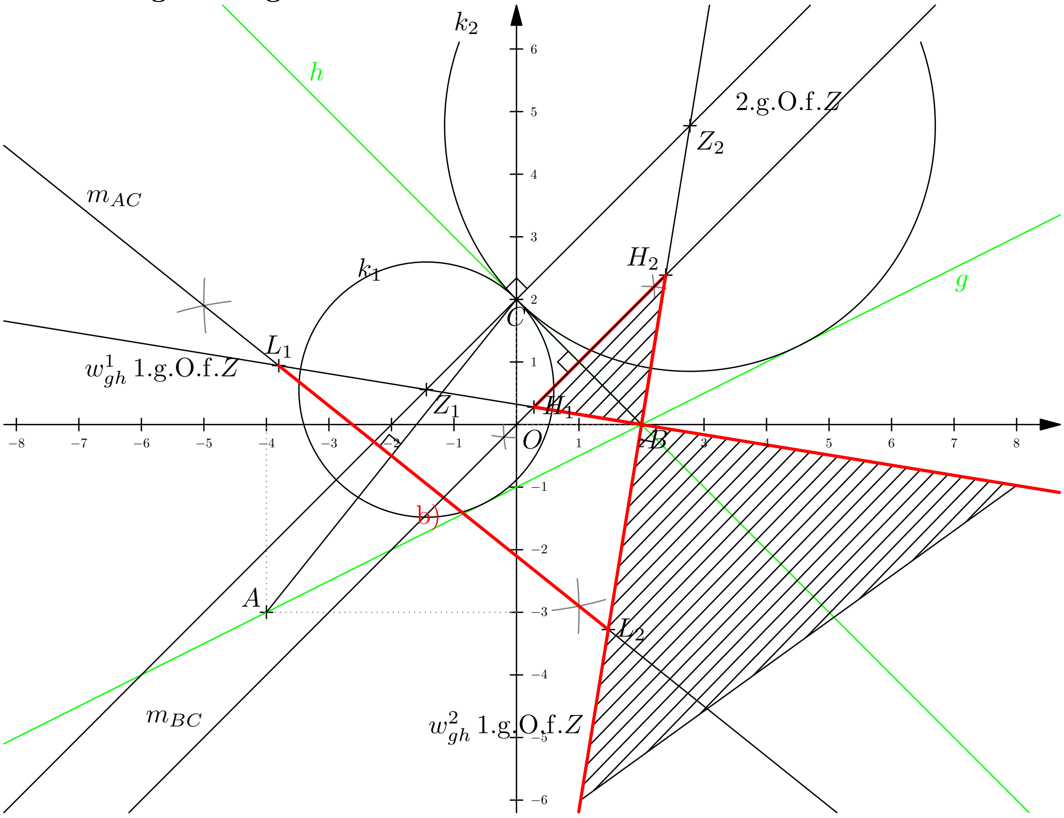
$$\overline{PA} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{MP}^2} \overset{\text{verwende } \overline{AM} = \overline{BM}}{=} \sqrt{\overline{BM}^2 + \overline{MP}^2} = \overline{PB}$$

(b) Wir nehmen an, dass $\overline{PA} = \overline{PB}$ gilt. Fälle das Lot von P auf die Gerade AB und nenne den Fusspunkt des Lots S (das ist der Schnittpunkt des Lots mit der Geraden AB). Die beiden Dreiecke ASP und BSP sind rechtwinklig und Pythagoras liefert

$$\overline{AS}^2 + \overline{SP}^2 = \overline{PA}^2 \overset{\text{wegen } \overline{PA} = \overline{PB}}{=} \overline{PB}^2 = \overline{BS}^2 + \overline{SP}^2$$

Zieht man auf beiden Seiten $\overline{SP}^2$ ab, so folgt $\overline{AS}^2 = \overline{BS}^2$ und daraus $\overline{AS} = \overline{BS}$. Also gilt $S = M$ und somit $P \in m_{AB}$.

Lösung zu Aufgabe 9 ex-geometrische-oerter3



(a) Für das Kreiszentrum Z gilt: $\overline{Zg} = \overline{Zh}$ (Kreis berührt die Geraden) und $ZC \perp h$ (berührt h in C). Das ergibt 2 geometrische Örter für Z.

1.	w_{gh}^1, w_{gh}^2	$\to$ 1.g.O.f.Z
2.	$\perp$ zu h durch C	$\to$ 2.g.O.f.Z
3.	Schnitt der beiden geom. Orte für Z	$\to$ Z_1, Z_2
4.	$k(Z_1, \overline{Z_1, C})$, $k(Z_2, \overline{Z_2, C})$	$\to$ zwei Kreise, Lösungen zu a)

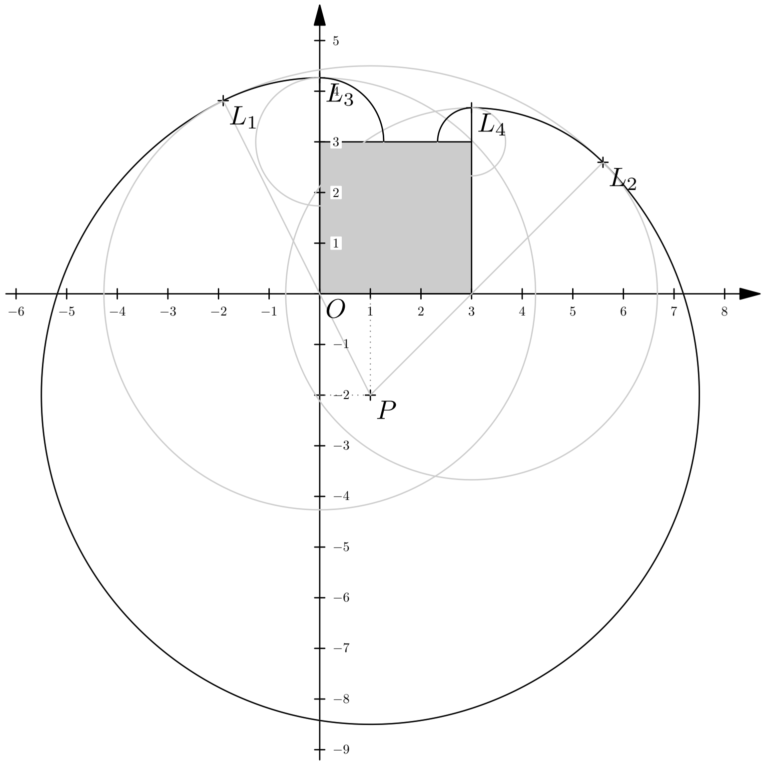
(b) Der erste geometrische Ort ist m_{AC}. Der zweite geometrische Ort ist die ganze Fläche zwischen w_{gh}^1 und w_{gh}^2 in der g enthalten ist. Deren Schnitt ergibt eine Strecke.

1.	$m_{AC} \cap w_{gh}^1$, $m_{AC} \cap w_{gh}^2$	$\to$ L_1, $L_2]$
2.	$[L_1, L_2]$	$\to$ Verbindungsstrecke, Lösung zu b)

(c) Der erste geometrische Ort ist die *Halbebene*, die B enthält und durch die Gerade m_{BC}, begrenzt ist. Der zweite geometrische Ort ist die ganze Fläche zwischen w_{gh}^1 und w_{gh}^2 in der h enthalten ist. Deren Schnitt ergibt eine Fläche.

1.	$m_{BC} \cap w_{gh}^1$, $m_{BC} \cap w_{gh}^2$	$\to$ H_1, H_2
2.	Schraffierte Fläche	$\to$ Lösung zu c)

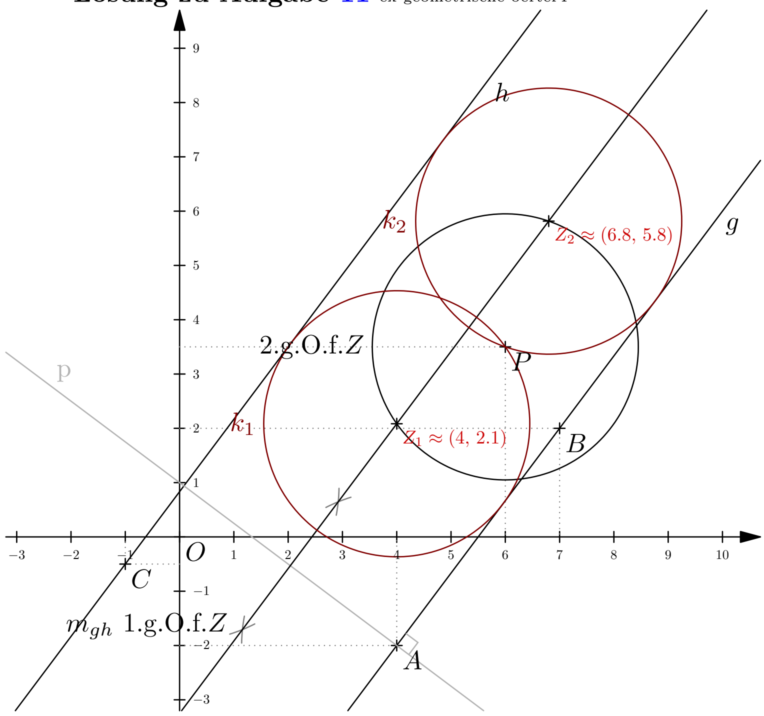
Lösung zu Aufgabe 10 ex-geometrische-oerter-ziege-ums-haus



Die Eckpunkte des Hauses werden vom Nullpunkt aus im Gegenuhrzeigersinn mit H_1, H_2, H_3 und H_4 bezeichnet.

1. $k(P, 6.5)$ $\to k_1$
2. $k_1 \cap PH_1$ und $k_1 \cap PH_2$ $\to L_1$ und L_2
3. $k(H_0, \overline{H_1L_1})$ und $k(H_1, \overline{H_1L_2})$ $\to k_2$ und k_3
4. $k_2 \cap H_1H_4$ und $k_3 \cap H_2H_3$ $\to L_3$ und L_4

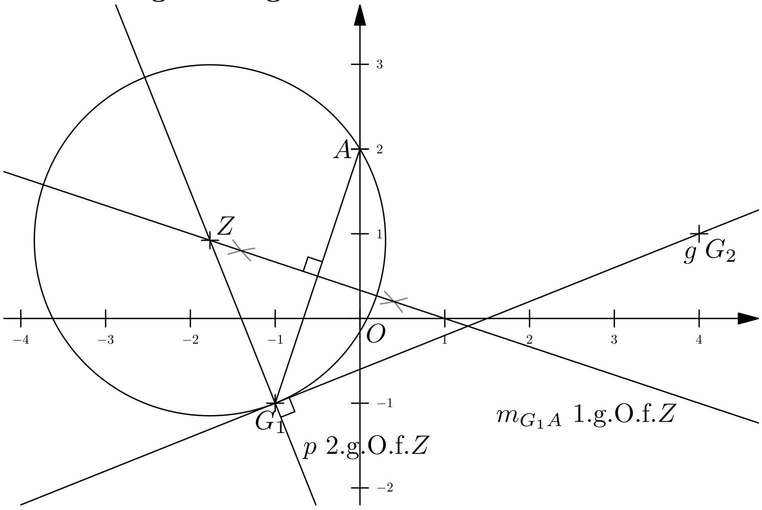
Lösung zu Aufgabe 11 ex-geometrische-oerter4



Es wird zuerst das Kreiszentrum Z konstruiert. Es gilt $\overline{Zg} = \overline{Zh}$. Der Kreisradius muss $\frac{1}{2}\overline{gh}$ sein, und damit $\overline{ZP} = \frac{1}{2}\overline{gh}$.

1. Mittelparallele m_{gh} $\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2. $k = k(P, \frac{1}{2}\overline{gh})$ $\rightarrow$ 2.g.O.f.Z
3. $m_{gh} \cap k$ $\rightarrow$ Z_1, Z_2
4. $k(Z_1, \frac{1}{2}\overline{gh})$, $k(Z_2, \frac{1}{2}\overline{gh})$ $\rightarrow$ 2 Lösungen

Lösung zu Aufgabe 12 ex-geometrische-oerter1

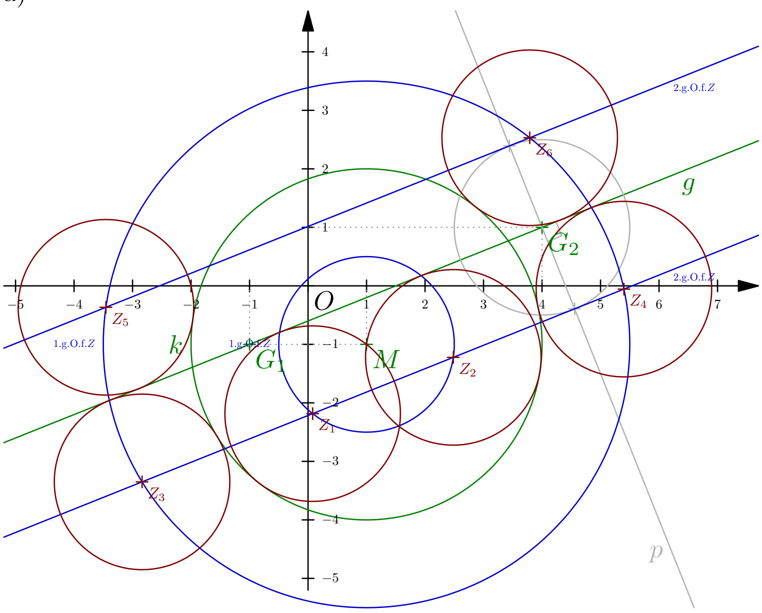


Man konstruiert zuerst das gesuchte Kreiszentrum Z, das folgende Bedingungen erfüllen muss: $\overline{ZA} = \overline{ZG_1}$ und $\overline{Zg} = \overline{ZG_1}$, bzw. $ZG_1 \perp g$ (damit der gesuchte Kreis die Gerade g im Punkt G_1 berührt).

1. m_{G_1A} $\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2. $\perp$ zu g durch G_1 $\rightarrow$ 2.g.O.f.Z
3. $k(Z, \overline{ZG_1})$ $\rightarrow$ 1 Lösung

Lösung zu Aufgabe 13 ex-geometrische-oerter2

a)



Man konstruiert das gesuchte Kreiszentrum Z:

1. $k_1 = k(M, r_1 - r_2)$ und $k_2 = k(M, r_1 + r_2)$ $\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2. Parallelenpaar p_1, p_2 zu g im Abstand r_2 $\rightarrow$ 2.g.O.f.Z
3. $(k_1 \cup k_2) \cap (p_1 \cup p_2)$ $\rightarrow$ 6 Lösungen.

b*) Es kann zwischen 0 und 8 Lösungen geben.

0 Lösungen wenn $\overline{kg} > 2r$, wobei $\overline{kg} = \overline{Mg} - r_1$.

1 Lösung wenn $\overline{kg} = 2r$.

2 Lösungen wenn $\overline{kg} < 2r$ und $g \cap k = \varnothing$.

3 Lösungen wenn g Tangente an k und $r_2 > r_1$.

4 Lösungen wenn g Tangente an k ist und $r_2 \leq r_1$, oder wenn $\overline{Mg} < r_1$ und $r_2 > r_1$.

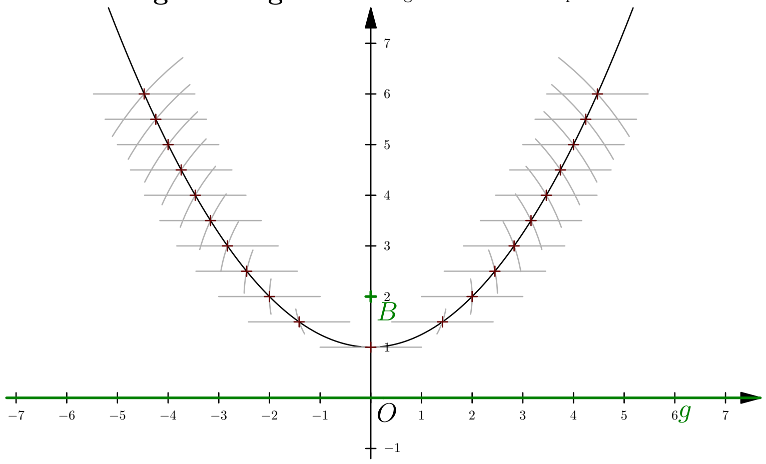
5 Lösungen wenn $\overline{Mg} = r_1 - r_2$ (und damit $r_1 > r_2$).

7 Lösungen wenn $r_2 < 2r_1$ und $\overline{gM} + r_2 = r_1$.

8 Lösungen wenn $r_2 < 2r_1$ und $\overline{gM} + r_2 < r_1$.

6 Lösungen sonst.

Lösung zu Aufgabe 14 ex-geometrische-oerter-parabel-entdecken



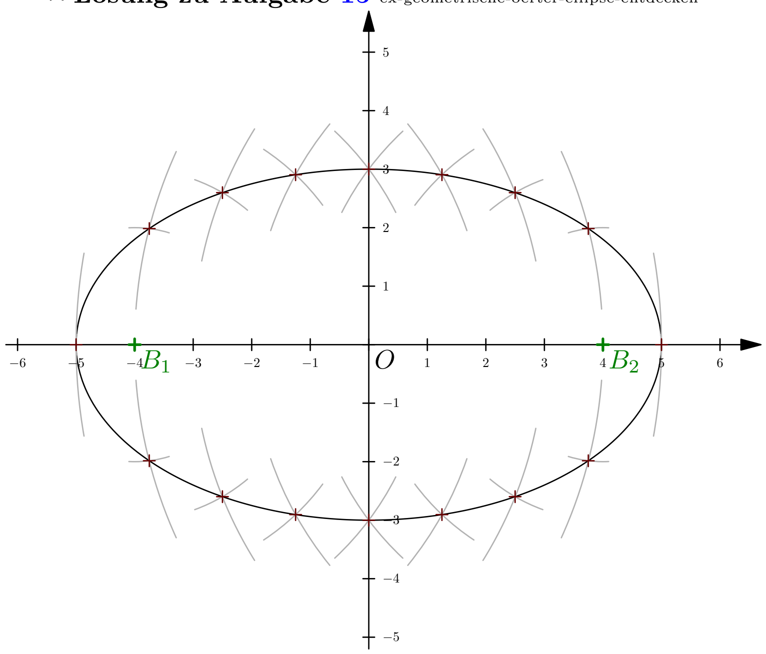
(a)-(c) Für alle halbzahligen d zwischen 1 und 6 wird folgende Konstruktion durchgeführt:

1. Parallele zu g im Abstand d $\rightarrow p$
2. $k(B,d) \cap p$ $\rightarrow P_1$, P_2 (nur ein Schnittpunkt für $d = 1$)

(d) «Die Menge alle Punkte der Zeichenebene, die von B und ℓ denselben Abstand haben.» oder: «Der geometrische Ort aller Punkte der Zeichenebene, die von B und ℓ denselben Abstand haben.»

(e) Siehe Zeichnung. Die gesuchte Punktmenge ist eine «gekrümmte Kurve», die nirgends einen Knick hat. Diese Kurve ist ein Beispiel einer **Parabel**.

Lösung zu Aufgabe 15 ex-geometrische-oerter-ellipse-entdecken



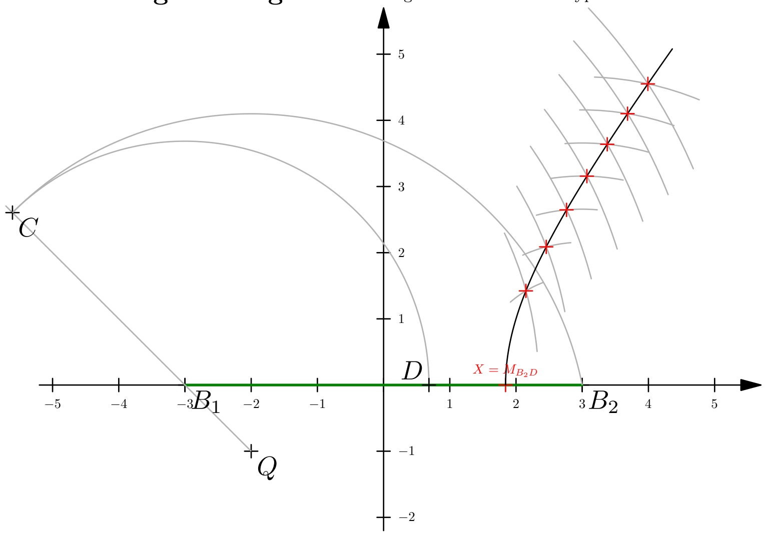
(a) Für alle ganzzahligen d von 1 bis 9 wird folgende Konstruktion durchgeführt:
   1. $k(B_1, d) \cap k(B_2, 10 - d) \quad \rightarrow$ 2 Punkte (ausser für $d = 1$ und $d = 9$)

(b) Siehe Zeichnung. Die gesuchte Punktmenge ist eine «gekrümmte Kurve» und heisst **Ellipse**. Sie hat nirgends einen Knick!

(c) «Die Menge aller Punkte der Zeichenebene, für die die Summe der Abstände zu den Punkte B_1 und B_2 genau 10 beträgt.» oder «Der geometrische Ortaller Punkte der Zeichenebene, für die die Summe der Abstände zu den Punkte B_1 und B_2 genau 10 beträgt.»

(d) Schlägt man bei B_1 und B_2 zwei Nägel ein und legt eine Fadenschlaufe der Länge $10 + \overline{B_1B_2} = 10 + 8 = 18$ um die Nägel, kann mit einem Stift, der die Schlaufe spannt, die Ellipse gezeichnet werden.
Diese Konstruktion heisst auch *Gärtnerkonstruktion der Ellipse* (Gärtner verwenden zwei Pflöcke und ein Seil).

Lösung zu Aufgabe 16 ex-geometrische-oerter-hyperbel-entdecken



(a) Zuerst wird der Punkt D auf $[B_1B_2]$ konstruiert, der via B_1 so weit von Q entfernt, wie der Punkt B_2 von Q entfernt ist. Der Mittelpunkt von D und B_2 ist dann X:
   1. $k(Q, \overline{QB_2}) \cap [QB_1 \quad \rightarrow C$
   2. $k(B_1, \overline{B_1C}) \cap [B_1B_2] \quad \rightarrow D$
   3. $M_{B_2D} \quad \rightarrow X$

(b) Für alle halbzahligen d von 0.5 bis 4 wird folgende Konstruktion durchgeführt (es gibt auch andere Konstruktionsmöglichkeiten):
   1. $k(B_1, d + \overline{B_1X}) \cap k(B_2, d + \overline{B_2X}) \quad \rightarrow$ 1 Punkt oberhalb von B_1B_2

(c) Siehe Zeichnung. Die entstehende Kurve (ein halber **Hyperbelast**) hat keinen Knick! Die Tangente an die Hyperbel in X steht senkrecht zur Mauer.

(d)
$$\{P \in \text{Zeichenebene} \mid \overline{PB_1} + \overline{B_1Q} = \overline{PB_2} + \overline{B_2Q}\}$$
Alternative (ziehe auf beiden Seiten der geforderten Gleichung $\overline{B_1Q}$ und $\overline{PB_2}$ ab):
$$\{P \in \text{Zeichenebene} \mid \overline{PB_1} - \overline{PB_2} = \underbrace{\overline{B_2Q} - \overline{B_1Q}}_{\text{diese Zahl ist konstant}}\}$$
Beachte, dass der unterklammerte Ausdruck nur von B_1, B_2 und Q abhängt. Er stimmt auch mit $\overline{XB_1} - \overline{XB_2}$ überein.

Lösung zu Aufgabe 17 ex-geometrische-orte-apollonius

(a) (Zeichnung zu ergänzen)

(b) $\{P \in \text{Zeichenebene} \mid \overline{PA} = 2\overline{PB}\}$.

(c) Es handelt sich um einen Kreis mit Mittelpunkt $(-2, 0)$ und Radius 8, den sogenannten **Apolloniuskreis**. (Der Beweis, dass es sich wirklich um ein Kreis handelt, folgt später.)

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Lösung zu Aufgabe 18 ex-geometrische-oerter-ellipse1

Damit überhaupt ein Dreieck gezeichnet werden kann muss $\ell \geq 2\overline{AB}$ sein. Ansonsten ist der geometrische Ort die leere Menge $\varnothing$.

Es gilt also $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \ell$, bzw. $\overline{AC} + \overline{BC} = \ell - \overline{AB}$ und damit ist der geometrische Ort aller Punkte C eine Ellipse mit Brennpunkten A und B und Abstandssumme $\ell - \overline{AB}$.

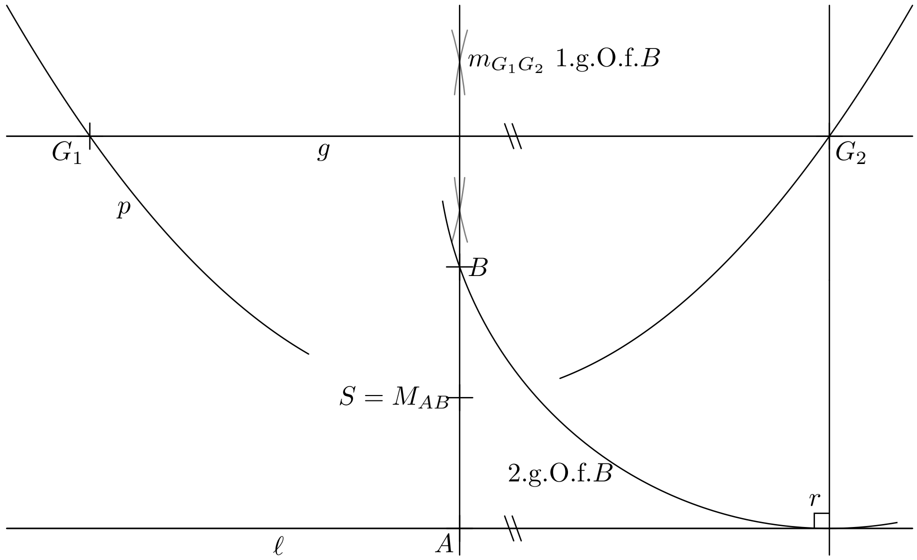
Lösung zu Aufgabe 19 ex-geometrische-oerter-parabel1

(a) Für die Kreiszentren Z gilt: $\overline{ZP} = \overline{Zg}$. Damit ist der gesuchte geometrische Ort eine Parabel mit Brennpunkt P und Leitlinie g.

(b) Da g Tangente an die Kreise ist und der Berührungspunkt P auf g ist, ist der geometrische Ort die Senkrechte zu g durch P.

Lösung zu Aufgabe 20 ex-geometrische-oerter-parabel2

Zuerst wird die Symmetrieachse a der Parabel konstruiert. Es gilt: $B \in a$. Danach wird ein Punkt $Q \in p$ gewählt und die Bedingung $\overline{Q\ell} = \overline{QB}$ genutzt.



1.	Wähle G_1 auf p	$\to G_1$
2.	Parallele zu ℓ durch G_1	$\to g$
3.	$g \cap p$	$\to G_2$
4.	$m_{G_1G_2}$	$\to$ 1.g.O.f.B
5.	$k(G_2, \overline{G_2\ell})$	$\to$ 2.g.O.f.B
6.	$m_{G_1G_2} \cap \ell$	$\to A$
7.	M_{AB}	$\to$ Scheitel S

Lösung zu Aufgabe 21 ex-geometrische-oerter-ellipse2

Seien A, B die Schnittpunkte $e \cap g$, und C, D die Schnittpunkte $e \cap h$ und $M = g \cap h$.

Seien B_1 und B_2 die unbekannten Brennpunkte auf g, symmetrisch zu $M = g \cap h$, d.h.

$$\overline{AB_1} = \overline{BB_2}.$$

Für jeden Punkt $P \in e$ gilt:

$$\overline{B_1P} + \overline{B_2P} = s \quad \text{(konstante Abstandssumme)}$$

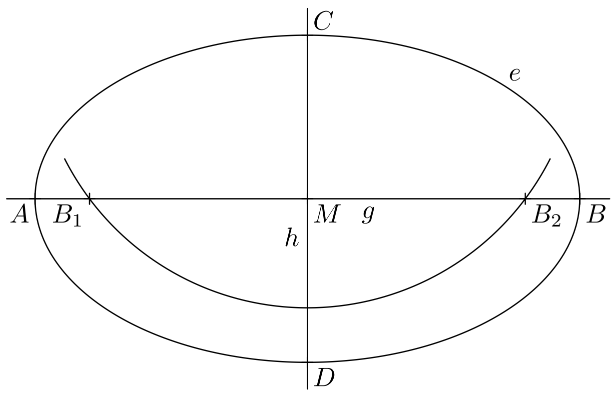
Insbesondere gilt dies für den Punkt A, also

$$s = \overline{AB_1} + \overline{AB_2} = \overline{AB_1} + \overline{AB_1} + \overline{B_1B_2} = \overline{AB_1} + \overline{B_2B} + \overline{B_1B_2} = \overline{AB}$$

Damit ist die Abstandssumme s bekannt. Aus Symmetriegründen gilt $\overline{CB_1} = \overline{CB_2}$ und damit $\overline{CB_1} = \frac{1}{2}s = \overline{AM}$.

Damit ist die Konstruktionsbeschreibung wie folgt:

1. $k(C, \overline{MA}) \cap g \quad \to B_1, B_2$



Lösung zu Aufgabe 22 ex-winkelsumme-dreieck
(zu ergänzen)

Lösung zu Aufgabe 23 ex-winkelsaetze-geraden1
a)

$\sphericalangle DAB = 88°$ (Ergänzungswinkel an Parallelen).
$\triangle ACD$ ist gleichschenklig damit ist $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ACD = (180° - \sphericalangle CDA)/2 = (180° - 92°)/2 = 44°$.
Damit ist $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DAB - \sphericalangle DAC = 88° - 44° = 44°$.
δABC ist gleichschenlig und damit $\alpha = (180° - \sphericalangle CAB)/2 = (180° - 44°)/2 = 136°/2 = 68°$.

Antwort: $\alpha = 68°$.

b)

$\delta = 180° - 82° = 98°$ (Ergänzungswinkel).
$\gamma = 180° - 40° = 140°$ (Ergänzungswinkel).
$\alpha = 180° - \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\gamma = 180° - 49° - 70° = 61°$. (Winkelsumme im $\triangle$).

Antwort: $\alpha = 61°$.

c)

$\sphericalangle BDC = 42°$ (Stufenwinkel).
$\sphericalangle ADB = 180° - 2 \cdot 42° = 96°$ (gleichschenkliges $\triangle ABD$ mit Basis $[AB]$).
$\sphericalangle ADC = \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC = 96° + 42° = 138°$.
$\sphericalangle ACD = \frac{1}{2} \cdot (180° - \sphericalangle ADC) = \frac{1}{2} \cdot (180° - 138°) = \frac{1}{2} 42° = 21°$. (gleichschenkliges $\triangle ACD$ mit Basis $[AC]$).
$\sphericalangle DFC = 180° - \sphericalangle FDC - \sphericalangle FCD = 180° - 42° - 21° = 117°$ (Winkelsumme im $\triangle DFC$).
$\alpha = 180° - \sphericalangle DFC = 180° - 117° = 63°$

Antwort: $\alpha = 63°$.

Alternative: $\alpha = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DCF$. Man denke sich eine dritte Parallele durch F und α als Summe zweier Stufenwinkel.

Lösung zu Aufgabe 24 ex-winkelsaetze-geraden2
Seien g, h zwei sich schneidende Geraden mit $\sphericalangle(g,h) = \alpha$. Sei $\beta = 180° - \alpha$ der Nebenwinkel von α. Damit gilt

$$\sphericalangle(w_{gh}^1, g) = \frac{\alpha}{2} \qquad \text{und} \qquad \sphericalangle(w_{gh}^2, g) = \frac{\beta}{2}$$

und damit

$$\sphericalangle(w_{gh}^1, w_{gh}^2) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$$

Es gilt $\alpha + \beta = 180°$ und damit $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90°$, was zu beweisen war.

Lösung zu Aufgabe 25 ex-winkelsaetze-geraden3
a) $\alpha = (180° - \gamma)/2 = 70°$.

b) $180° = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \alpha + 3\alpha = 5\alpha$ also $\alpha = 36°$.

c) $\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 40°$.

d) $180° = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \alpha + \alpha = 3\alpha$ also $\alpha = 60°$.

Lösung zu Aufgabe 26 ex-winkelsaetze-geraden4

Sei $I = w_\alpha \cap w_\beta$. Es gilt:

$$\sphericalangle AIB = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \quad \text{Innenwinkelsumme im } \triangle$$

Der gesuchte Winkel δ ist der Nebenwinkel von $\sphericalangle AIB$, also

$$\delta = 180° - (180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

Man hätte dies auch direkt aufschreiben können, da der Aussenwinkel in einem Dreieck immer die Summe der gegenüberliegenden Innenwinkel ist.

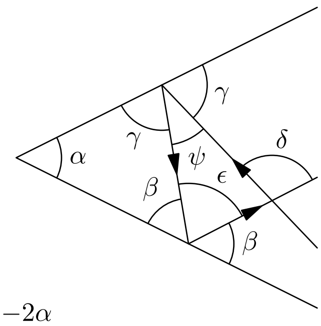
In jedem Dreieck gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$$

Und damit ist $\delta = \sphericalangle(w_\alpha, w_\beta) = 90° - \frac{\gamma}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 27 ex-winkelsaetze-geraden5

Für den Aussenwinkel δ gilt:



$$\delta = \varepsilon + \psi$$

Mit $\varepsilon = 180° - 2\beta$ und $\psi = 180° - 2\gamma$. Und damit

$$\delta = \varepsilon + \psi = 180° - 2\beta + 180° - 2\gamma = 360° - (2\beta + 2\gamma)$$

Es gilt

$$\alpha+\beta+\gamma = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 2\alpha+2\beta+2\gamma = 360° \quad \Leftrightarrow \quad 2\beta+2\gamma = 360°-2\alpha$$

Oben eingesetzt erhält man

$$\delta = 360° - (360° - 2\alpha) = 2\alpha$$

Lösung zu Aufgabe 28 ex-winkelsaetze-geraden6

a) Das Dreieck $\triangle MBC$ ist gleichschenklig, also ist $\sphericalangle MCB = \beta$.

Es gilt

$$\overline{CD} = \overline{CM} = \overline{MA} = \overline{MD}$$

und damit ist $\triangle MCD$ gleichseitig und alle Innenwinkel gleich 60°.

Somit gilt:

$$\sphericalangle MCD = \beta + \gamma = 60° \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 60° - \beta.$$

b) Wenn $\beta = \gamma$ sind dies Wechselwinkel (Scheitelwinkel zu Stufenwinkel) und damit $CD \parallel AB$. Eingesetzt in obige Gleichung:

$$\beta = 60° - \beta \quad \Leftrightarrow \quad 2\beta = 60° \quad \Leftrightarrow \quad \beta = 30°.$$

Lösung zu Aufgabe 29 ex-winkelsaetze-geraden7

Das Dreieck $\triangle MBC$ ist gleichschenklig und damit ist $\sphericalangle MCB = \beta$. Damit ist p die Mittelsenkrechte zu BC und Winkelhalbierende vom $\sphericalangle CMB$. Damit ist $M_{CD} = a \cap p$. Im Dreieck $\triangle CMM_{BC}$ gilt

$$\mu = 180° - 90° - \beta = 90° - \beta$$

Das Dreieck $\triangle MCD$ ist gleichschenklig mit Basis $[CD]$. Damit ist $\sphericalangle MDC = (180° - \mu)/2 = (180° - (90° - \beta))/2 = (90° + \beta)/2 = 45° + \frac{\beta}{2}$.

Im Dreieck $\triangle CM_{BC}D$ gilt:

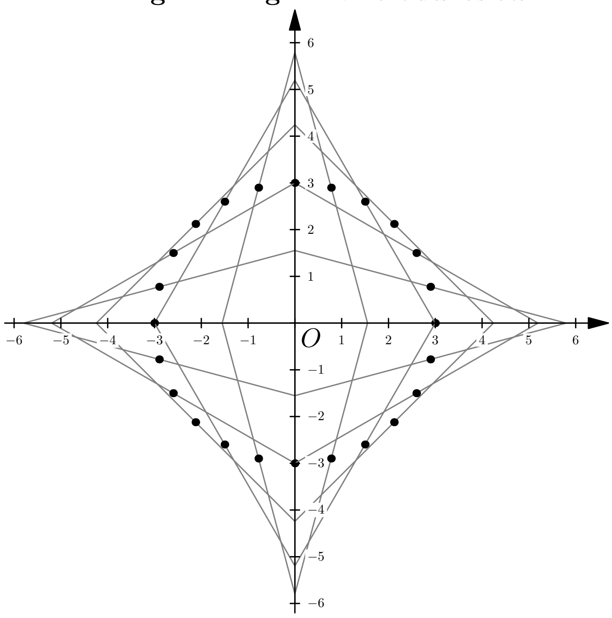
$$\gamma = 180° - 90° - \sphericalangle MDC = 90° - (45° + \frac{\beta}{2}) = 45° - \frac{\beta}{2}$$

Lösung zu Aufgabe 30 ex-kreiswinkelsaetze-selbst-entdecken

Lösung zu Aufgabe 31 ex-tangenten-an-kreis-durch-punkt

(zu ergänzen)

Lösung zu Aufgabe 32 ex-thaleskreis-leiter

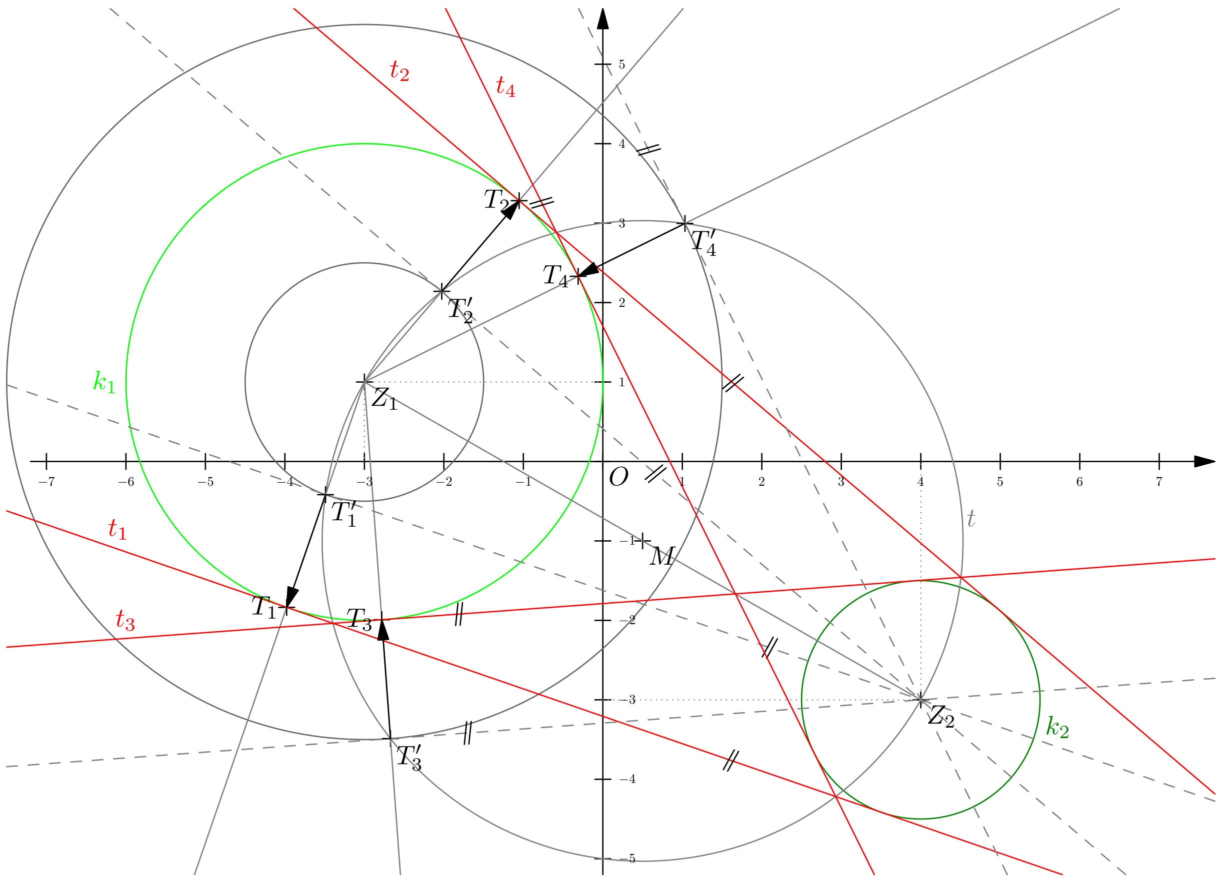


M_{AB} ist der Mittelpunkt der Stecke $[AB]$, über der der Nullpunkt des Koordinatensystem einen rechten Winkel bildet. D.h. O liegt auf dem Thales-Kreis über $[AB]$, d.h. $\overline{OM} = \overline{AM_{AB}} = 3$.

Damit ist bewiesen, dass alle Punkte M_{AB} auf dem Kreis $k(O, 3)$ liegen.

Lösung zu Aufgabe 33 ex-tangenten-an-zwei-kreise

1. Thaleskreis über $[Z_1Z_2]$ $\rightarrow t$
2. $k(Z_1, r_1 - r_2) \cap t$ $\rightarrow T_1', T_2'$
3. $[Z_1T_{1,2}' \cap k_1$ $\rightarrow T_{1,2}$
4. $k(Z_1, r_1 + r_2) \cap t$ $\rightarrow T_3', T_4'$
5. $[Z_1T_{3,4}' \cap k_1$ $\rightarrow T_{3,4}$
6. Paralellen zu $Z_2T_{1,2,3,4}'$ durch $T_{1,2,3,4}$ $\rightarrow t_{1,2,3,4}$

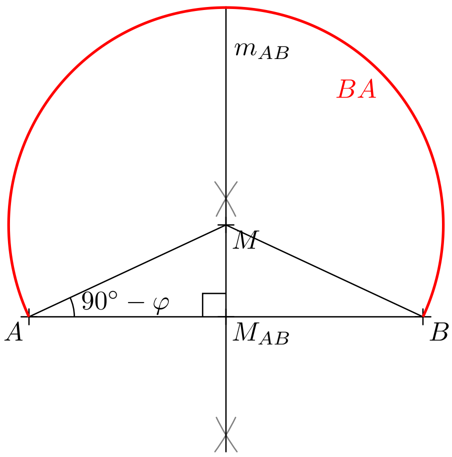


Lösung zu Aufgabe 34 ex-thaleskreis-hoehenfusspunkte

H_a und H_b sind Scheitel von rechten Winkeln über der Strecke $[AB]$, also liegen beide auf dem Thaleskreis über $[AB]$. Somit gilt $\overline{M_{AB}H_a} = \overline{M_{AB}H_b} = \overline{M_{AB}A}$, was zu beweisen war.

Lösung zu Aufgabe 35 ex-geom-ort-ortsbogen0

(a) Konstruiere die Mittelsenkrechte m_{AB}.
Trage den Winkel $90° - \varphi = 25°$ vom Strahl $[AB$ in mathematisch positiver Richtung ab (der Scheitel des abgetragenene Winkels soll der Startpunkt A des Strahls sein). Der «neue» Strahl schneidet m_{AB} in einem Punkt, den wir M nennen.
Wir behaupten, dass dies der gesuchte Punkt ist: Wegen $M \in m_{AB}$ gilt sicherlich $\overline{MA} = \overline{MB}$. Insbesondere ist das Dreieck ABM gleichschenklig. Also gilt $\sphericalangle MBA = \sphericalangle BAM = 90° - \varphi$.

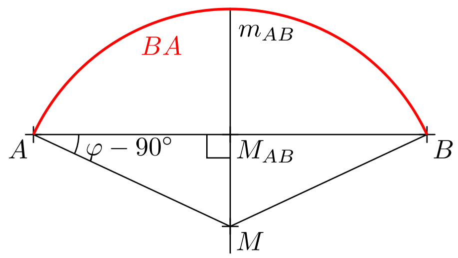


Per Winkelsumme im Dreieck ABM erhalten wir

$$\sphericalangle AMB = 180° - \sphericalangle MBA - \sphericalangle BAM = 180° - (90° - \varphi) - (90° - \varphi) = 2\varphi$$

wie gewünscht. (Wer mag, kann auch mit dem rechtwinkligen Dreieck $AM_{AB}M$ argumentieren.)
Der gesuchte 65°-Ortsbogen ist nun der rote Kreisbogen in der Zeichnung (statt des rot geschriebenen BA sollte dort $\overset{\frown}{BA}$ stehen).

(b) Die Konstruktion geht analog, jedoch beachte man, dass das Abtragen des Winkels $90° - \varphi = 90° - 115° = -25°$ in mathematisch positivem Drehsinn nun dem Abtragen des Winkels $\varphi - 90° = 25°$ in mathematisch negativem Drehsinn bedeutet.



Per Winkelsumme im Dreieck ABM erhalten wir

$$\sphericalangle BMA = 180° - \underbrace{\sphericalangle MAB}_{\varphi-90°} - \underbrace{\sphericalangle ABM}_{\varphi-90°} = 180° - (\varphi - 90°) - (\varphi - 90°) = 360° - 2\varphi.$$

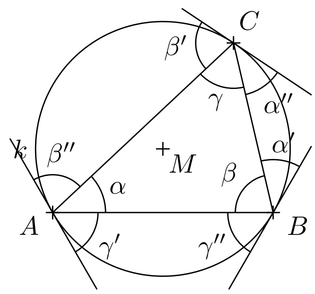
Wie gewünscht gilt somit

$$\sphericalangle AMB = 360° - \sphericalangle BMA = 360° - (360° - 2\varphi) = 2\varphi.$$

Der gesuchte 155°-Ortsbogen ist nun der rote Kreisbogen in der Zeichnung (statt des rot geschriebenen BA sollte dort $\overset{\frown}{BA}$ stehen).

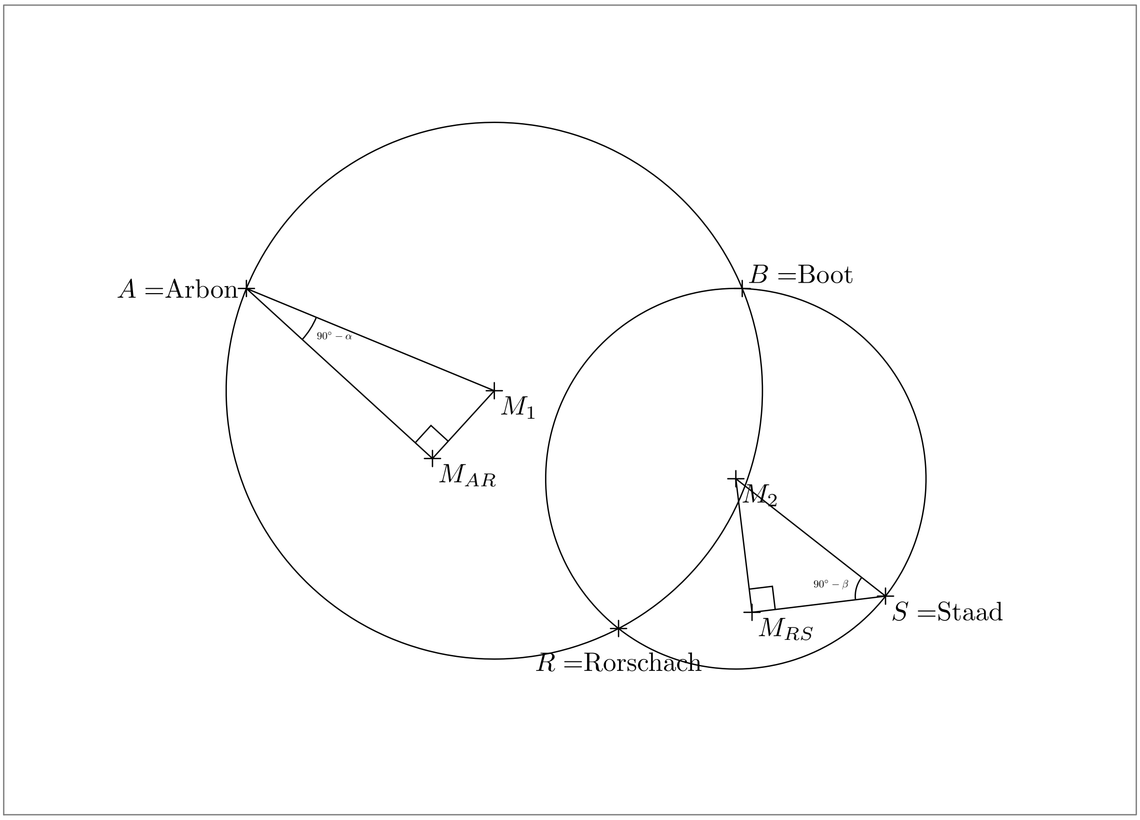
Lösung zu Aufgabe 36 ex-sehne-winkelsaetze-faerbe-gleiche-winkel

Für die Sehne $[BC]$ sagen Sehne-Tangente-Winkel-Satz und Peripheriewinkelsatz, dass $\alpha'' = \alpha' = \alpha$. Analog gelten $\beta = \beta' = \beta''$ und $\gamma = \gamma' = \gamma''$.



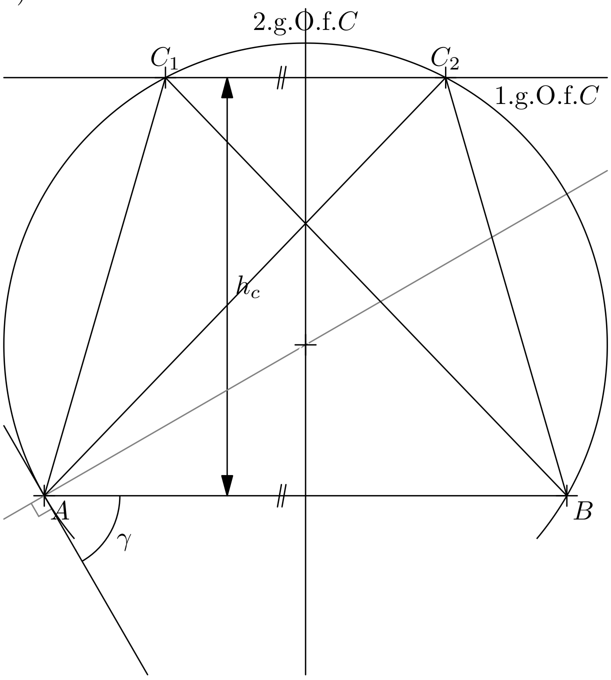
Lösung zu Aufgabe 37 ex-navigation

Da sich der Bodensee grob gesagt «oberhalb» des Streckenzugs Arbon-Rorschach-Staad befindet, muss sich auch das Boot in diesem Bereich befinden. Da sowohl α als auch β kleiner als 90° sind, befinden sich auch die Mittelpunkte der Kreise, auf denen die gesuchten Ortsbögen liegen, oberhalb der Verbindungsstrecken Arbon-Rorschach bzw. Rorschach-Staad. Nun gilt es, diese Ortsbögen zu konstruieren. Das Boot muss sich auf einem ihrer Schnittpunkte befinden, wobei der Schnittpunkt Rorschach wohl nicht der gesuchte ist.



Lösung zu Aufgabe 38 ex-geom-ort-ortsbogen1

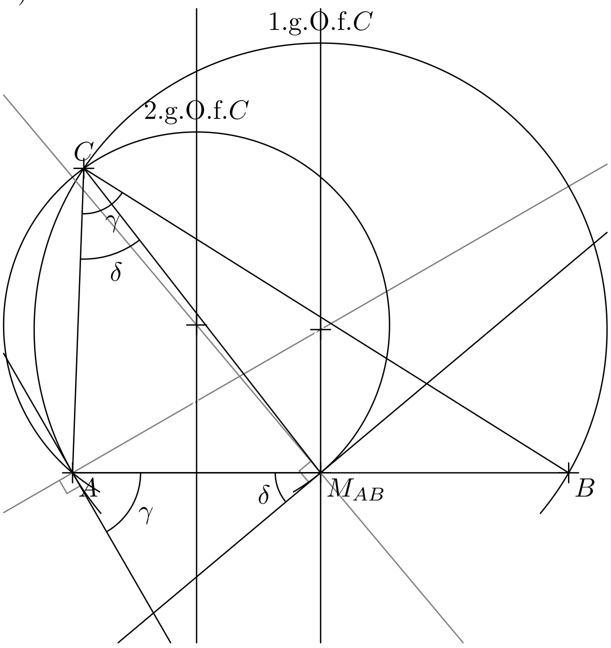
a)



1. $\parallel$ zu AB im Abstand h_c $\rightarrow$ 1.g.O.f.C
2. Ortsbogen zu γ über $[AB]$ $\rightarrow$ 2.g.O.f.C

Es gibt 2 Lösungen (die 2 an AB gespiegelten Lösungen mit anderem Umlaufsinn nicht mitgezählt).

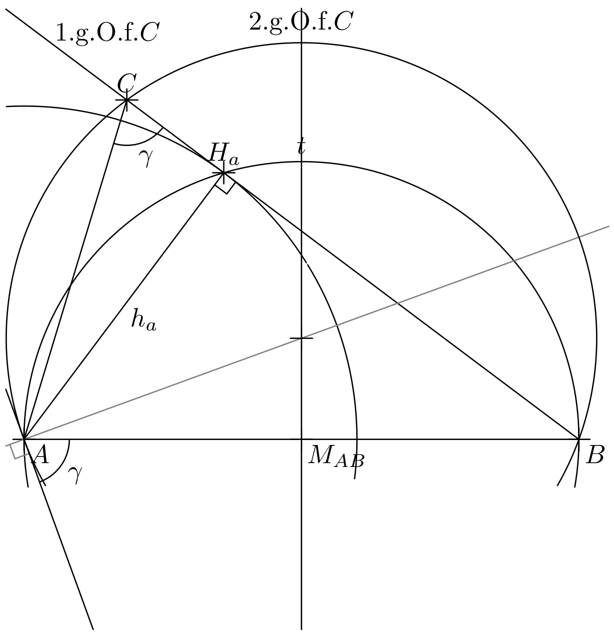
b)



1. Ortsbogen zu γ über $[AB]$ $\rightarrow$ 1.g.O.f.C
2. Ortsbogen zu δ über $[AM_{AB}]$ $\rightarrow$ 2.g.O.f.C

Es gibt 1 Lösung (die an AB gespiegelte Lösung mit anderem Umlaufsinn nicht mitgezählt).

c)



Zuerst wird der Höhenfusspunkt H_a konstruiert, womit man die Lage der Seite a erhält.

1. Thaleskreis über $[AB]$ $\to t$
2. $t \cap k(A, h_a)$ $\to H_a$
3. BH_a $\to$ 1.g.O.f.C
4. Ortsbogen zu γ über $[AB]$ $\to$ 2.g.O.f.C

Es gibt 1 Lösung (die an AB gespiegelte Lösung mit anderem Umlaufsinn nicht mitgezählt).

Lösung zu Aufgabe 39 ex-sehnenviereck

(a) Der Zentriwinkel zu α ist 2α, der Zentriwinkel zu γ ist 2γ. Diese beiden Zentriwinkel ergänzen sich zu $360°$. Also gilt $360° = 2\alpha + 2\gamma$. Division durch 2 liefert $180° = \alpha + \gamma$. Analog für $\beta + \delta$.
Man kann auch mit den Sehne-Tangenten-Winkeln argumentieren (vgl. Teilaufgabe (b) von Aufgabe 45). Auch geht es mit dem Peripheriewinkelsatz wie in der Lösung von Teilaufgabe (a) von Aufgabe 45.

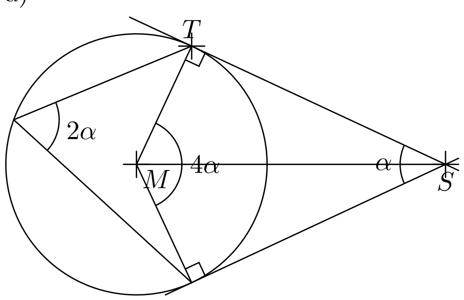
(b) Sei k der Umkreis des Dreiecks ABC. Der Winkel β ist ein Peripheriewinkel über dem Kreisbogen $\overset{\frown}{CA}$ mit Zentriwinkel 2β. Der Kreisbogen $\overset{\frown}{AC}$ hat den Zentriwinkel $360° - 2\beta$ und somit ist der Kreisbogen $\overset{\frown}{CA}$ der $(180° - \beta)$-Ortsbogen über $[AC]$. Wegen $\delta = 180° - \beta$ muss D auf diesem Ortsbogen, also auf dem $\overset{\frown}{CA}$, liegen. Also ist $ABCD$ ein Sehnenviereck.

Lösung zu Aufgabe 40 ex-ortsbogen-aufgabe-beweisen

Sei t die gemeinsame Tangente an k_1 und k_2 im Punkt B. Der Winkel $\alpha = \sphericalangle(t, g)$ ist ein Sehnen-Tangenten-Winkel für beide Kreise über den Sehnen $[BT_1]$ und $[BT_2]$. Der andere Sehnen-Tangenten-Winkel $\sphericalangle(t_1, g)$ bzw. $\sphericalangle(t_2, g)$ ist gleich gross wie α. Damit haben wir in den Punkte T_1 und T_2 Wechselwinkel an der Geraden g und damit sind $t_1 \parallel t_2$.

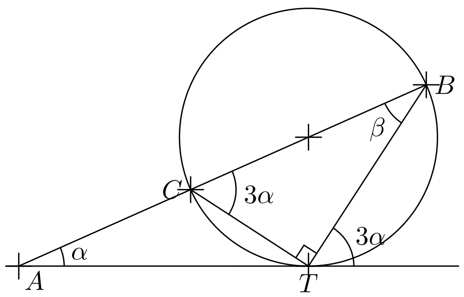
Lösung zu Aufgabe 41 ex-ortsbogen-winkel-berechnen-formell

a)



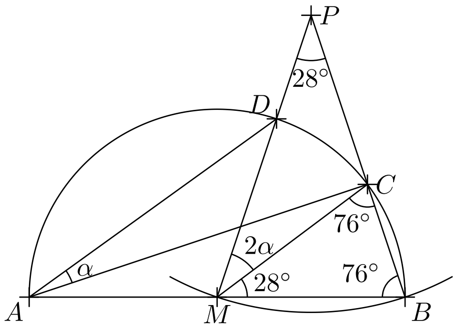
Der Zentriwinkel ist doppelt so gross wie der entsprechende Peripheriewinkel. MS halbiert die Winkel 4α und α.
Im $\triangle MST$ gilt: $180° = 90° + 2\alpha + \frac{1}{2}\alpha$, also $\frac{5}{2}\alpha = 90°$ und damit $\alpha = \frac{2}{5} \cdot 90° = 36°$.

b)



$\sphericalangle TCB = 3\alpha$ (Peripheriew. zum Sehnen-Tangenten-W.in T.)
$\sphericalangle CTB = 90°$ (Thaleskreis über $[BC]$).
$\sphericalangle CBT = \beta = 180° - 3\alpha - 90° = 90° - 3\alpha$
$\sphericalangle ATB = 180° - 3\alpha$ (Nebenwinkel).
Im $\triangle ATB$ gilt: $180° = \alpha + (180° - 3\alpha) + (90° - 3\alpha) = 270° - 5\alpha$
Nach α aufgelöst erhält man $\alpha = 18°$.

c)



$\sphericalangle PMC = 2\alpha$ (Zentriwinkel zum Peripheriewinkel α)
$\triangle PMB$ ist gleichschenklig mit Basis $[MB]$ und Basiswinkeln $(180° - 28°)/2 = 76°$.
$\triangle MBC$ ist gleichschenklig mit Basis $[BC]$ und damit ist der Winkel an der Spitze $\sphericalangle BMC = 28°$.
Somit gilt $\sphericalangle PMB = 76° = 2\alpha + 28°$. Also $2\alpha = 76° - 28° = 48°$ und damit $\alpha = 24°$.

Lösung zu Aufgabe 42 ex-ortsbogen-aufgabe-beweisen2

Hinweis: Dieser Beweis geht davon aus, dass $[AB]$ innerhalb des Dreiecks $\triangle BDC$ liegt. (Die anderen Fälle gehen hoffentlich analog.)

Sei g' eine weitere Gerade wie g mit Schnittpunkten C' und D'.

Die Winkel $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCB$ und $\sphericalangle AC'B = \sphericalangle D'C'B$ sind als Peripheriewinkel über $[AB]$ gleich gross. Ebenso sind die $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BDC$ und $\sphericalangle BD'A = \sphericalangle BD'C'$ als Peripheriewinkel über $[BA]$ gleich gross. Daraus folgt (Winkelsumme im Dreieck), dass auch die beiden Winkel $\sphericalangle CBD$ und $\sphericalangle C'BD'$ gleich gross sind.

Lösung zu Aufgabe 43 ex-ortsbogen-aufgabe-beweisen3-geogebra

Annahme: $[AC]$ und $[BD]$ sind die Diagonalen (andernfalls sind C und D zu vertauschen).

Der Winkel $\sphericalangle CAD$ bzw. $\sphericalangle ADB$ ist ein Peripheriewinkel über der Sehne $[DC]$ bzw. $[AB]$. Diese Winkel sind immer gleich gross, auch wenn die Sehne $[CD]$ auf k wandert. Diese Winkel sind Innenwinkel im $\triangle AXD$. Somit ist der Winkel $\sphericalangle DXA$ auch immer gleich gross, und dasselbe gilt für seinen Ergänzungswinkel $\sphericalangle AXB$. Damit liegen alle möglichen Punkte X auf einem Ortsbogen über $[AB]$.

Lösung zu Aufgabe 44 ex-ortsbogen-winkel-berechnen-formell2

Fall $\beta > \gamma$: Sei $T = t \cap a$.

$\sphericalangle TAB = \gamma$ (Sehnen-Tangenten-Winkel zum Peripheriewinkel γ).

β ist Aussenwinkel im $\triangle ATB$ und damit $\beta = \gamma + \delta$ und somit $\delta = \beta - \gamma$.

Wegen $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ kann man den gesuchten Winkel alternativ auch in Abhängigkeit von α und β oder in Abhängigkeit von α und γ angeben.

Fall $\gamma = \beta$: Es gibt keinen Schnittpunkt und der Winkel zwischen den dann parallelen Geraden ist nicht definiert (man könnte definieren, dass der Winkel zwischen parallelen Geraden $0°$ ist).

Fall $\gamma > \beta$: Dann gilt $\delta = \gamma - \beta$ mit ähnlicher Herleitung.

Lösung zu Aufgabe 45 ex-ortsbogen-winkel-berechnen-formell3

a) Sei $X = AD \cap CE$ der Diagonalenschnittpunkt.

Es gilt: $\sphericalangle DEC = \beta$ (Peripheriewinkel über $[CD]$) und $\sphericalangle AEC = 90° - \alpha$ (Innenwinkelsumme im $\triangle AEX$). Und damit:

$\varepsilon = 90° - \alpha + \beta$

Analog erhält man $\gamma = 90° - \beta + \alpha$.

Im $\triangle EDC$ ist der Winkel bei E gleich gross wie β und der Winkel bei C gleich gross wie α (Periepheriewinkel über gleichen Sehnen). Damit ist

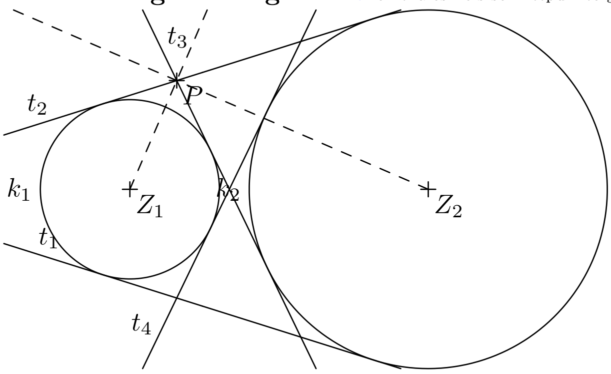
$\delta = 180° - \alpha - \beta$. (Dies folgt auch aus der Aufgabe über Sehnenvierecke.)

b) Der Winkel $\sphericalangle DZC = 2\beta$ ist Zentriwinkel zum Peripheriewinkel β über der Sehne $[DC]$ im kleinen Kreis. Dieser Winkel ist aber auch Peripheriewinkel über $[DC]$ im grossen Kreis. Peripheriewinkel auf gegenüberliegenden Seiten der Kreissehne ergänzen sich zu 180° (die entsprechenden Sehnen-Tangenten-Winkel sind Nebenwinkel; das folgt auch aus der Aufgabe über Sehnenvierecke). Also gilt folgende Beziehung zwischen α und β:

$$2\beta = 180° - \alpha$$

Hinweis: Die obige Beziehung kann natürlich auch umgeformt und nach α oder β aufgelöst werden.

Lösung zu Aufgabe 46 ex-thaleskreis-schnittpunkte-gemeinsamer-tangenten



Der Beweis wird hier exemplarisch für den Punkt $P = t_2 \cap t_3$ geführt. Da t_2 und t_3 Tangenten an k_1 sind, halbiert Z_1P den Winkel $\sphericalangle(t_2, t_3)$. Analog teilt auch Z_2P den Winkel $\sphericalangle(t_2, t_3)$. D.h. Z_1P und Z_2P sind ein Winkelhalbierendenpaar und somit rechtwinklig aufeinander, was beweist, dass P auf dem Thaleskreis über $[Z_1Z_2]$ liegt.

Lösung zu Aufgabe 47 ex-ortsbogen-aufgabe-beweisen4

Sei $X = w_\gamma \cap u$, der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_γ mit dem Umkreis. Zu zeigen ist also, dass $X \in m_{AB}$.

Wegen $X \in w_\gamma$ gilt $\sphericalangle ACX = \sphericalangle XCB = \frac{1}{2}\gamma$. Da beide Winkel Peripheriewinkel im Umkreis sind, müssen die entsprechenden Sehnen $[AX]$ und $[BX]$ gleich lang sein (das braucht ja wohl noch ein Argument, siehe unten), d.h. $X \in m_{AB}$, was zu beweisen war.

Zu beweisen ist noch folgendes (Formulierung zu verbessern): Gegeben ist ein Kreis k und ein beliebiger Winkel γ. Ist ABC ein beliebiges Dreieck mit A, B, $C \in k$ (d.h. k ist der Umkreis des Dreiecks) und Winkel γ bei C, so ist die Länge c für all solche Dreiecke konstant. Man kann den Punkt C so verschieben, dass die Seite a ein Durchmesser ist. Dann ist klar, wie man c aus γ konstruiert (Thaleskreis). Also ist c durch γ und den Kreisdurchmesser festgelegt.

Lösung zu Aufgabe 48 ex-hoehenfusspunkte-billard-rademacher-toeplitz

(zu ergänzen)

Lösung zu Aufgabe 49 ex-geom-ort-winkelhalbierende

Ein Kreis, der zwei Geraden berührt, muss sein Zentrum Z auf der Winkelhalbierenden haben. Die Konstruktion des Kreiszentrums und des Kreises ist wie folgt:

1.	c	$\to$ 1.g.O.f.Z
2.	w_γ	$\to$ 2.g.O.f.Z
3.	$c \cap w_\gamma$	$\to Z$
4.	Lot/Senkrechte zu b durch Z	$\to g$
5.	$g \cap b$	$\to$ Berührungspunkt P
6.	$k(Z, \overline{ZP})$	$\to$ 1. Lösung

Lösung zu Aufgabe 50 ex-geometrische-oerter5

a)

1.	w_{gh}^1, w_{gh}^2	$\to$ 1.g.O.f.Z
2.	Parallelenpaar zu g im Abstand 1	$\to$ 2.g.O.f.Z

Es gibt 4 Lösungen.

b)

1.	Kreise $k(M_1, 3 \pm 1)$	$\to$ 1.g.O.f.Z
2.	Kreise $k(M_1, 2.5 \pm 1)$	$\to$ 2.g.O.f.Z

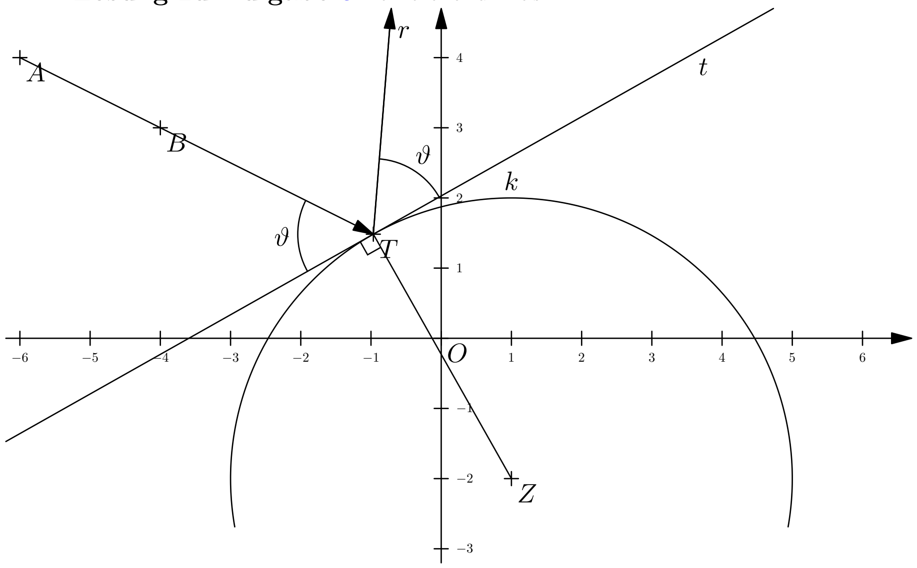
Es kann bis zu 8 Lösungen geben. Im konkreten Fall gibt es 6 Lösungen.

c)

1.	Kreise $k(M, 3 \pm 1)$	$\to$ 1.g.O.f.Z
2.	Parallelenpaar zu g im Abstand 1	$\to$ 2.g.O.f.Z

Es kann bis zu 8 Lösungen geben. Im konkreten Fall gibt es 7 Lösungen.

Lösung zu Aufgabe 51 ex-reflexion-an-kreis



1.	$g \cap k$	$\rightarrow T$
2.	Senkrechte zu ZT durch T	$\rightarrow$ Tangente t
3.	$\vartheta = \sphericalangle(g, t)$	$\rightarrow$ Einfallswinkel θ (theta)
4.	ϑ an t bei T abtragen	$\rightarrow$ Lösung r

Lösung zu Aufgabe 52 ex-geom-ort-kegelschnitte1

a) Es gilt $\overline{B_1P_1} + \overline{P_1B_2} = d$ also $\overline{P_1B_2} = d - \overline{B_1P_1}$. Analog dazu gilt $\overline{P_2B_2} = d - \overline{B_1P_2}$.

1.	$k(P_1, d - \overline{B_1P_1})$	$\rightarrow k_1$, 1.g.O.f.B_2
2.	$k(P_2, d - \overline{B_1P_2})$	$\rightarrow k_2$, 2.g.O.f.B_2
3.	$k_1 \cap k_2$	$\rightarrow$ 2 Lösungen

b)

$$\overline{B_1P_1} + \overline{P_1B_2} = \overline{B_1P_2} + \overline{P_2B_2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{P_1B_2} - \overline{P_2B_2} = \overline{B_1P_2} - \overline{B_1P_1}$$

Die rechte Seite ist konstant, die linke Seite die Differenz der Abstände von B_2 zu zwei gegebenen Punkten P_1 und P_2. Alle Punkte B_2 liegen also auf einem Hypbel-Ast mit Brennpunkten P_1 und P_2 und Abstandsunterschied $\overline{B_1P_2} - \overline{B_1P_1}$.

Lösung zu Aufgabe 53 ex-geom-ort-kegelschnitte2

a) Der 1.g.O.f.Z_3 ist ein konzentrisches Kreispaar $k_{1,1} = k(Z_1, r_1 + r_3)$ und $k_{1,2} = k(Z_1, r_1 - r_3)$, wobei letzterer nur existiert, wenn $r_1 > r_3$.

Der 2.g.O.f.Z_3 ist ein konzentrisches Kreispaar $k_{2,1} = k(Z_2, r_2 + r_3)$ und $k_{2,2} = k(Z_2, r_2 - r_3)$, wobei letzterer nur existiert, wenn $r_2 > r_3$.

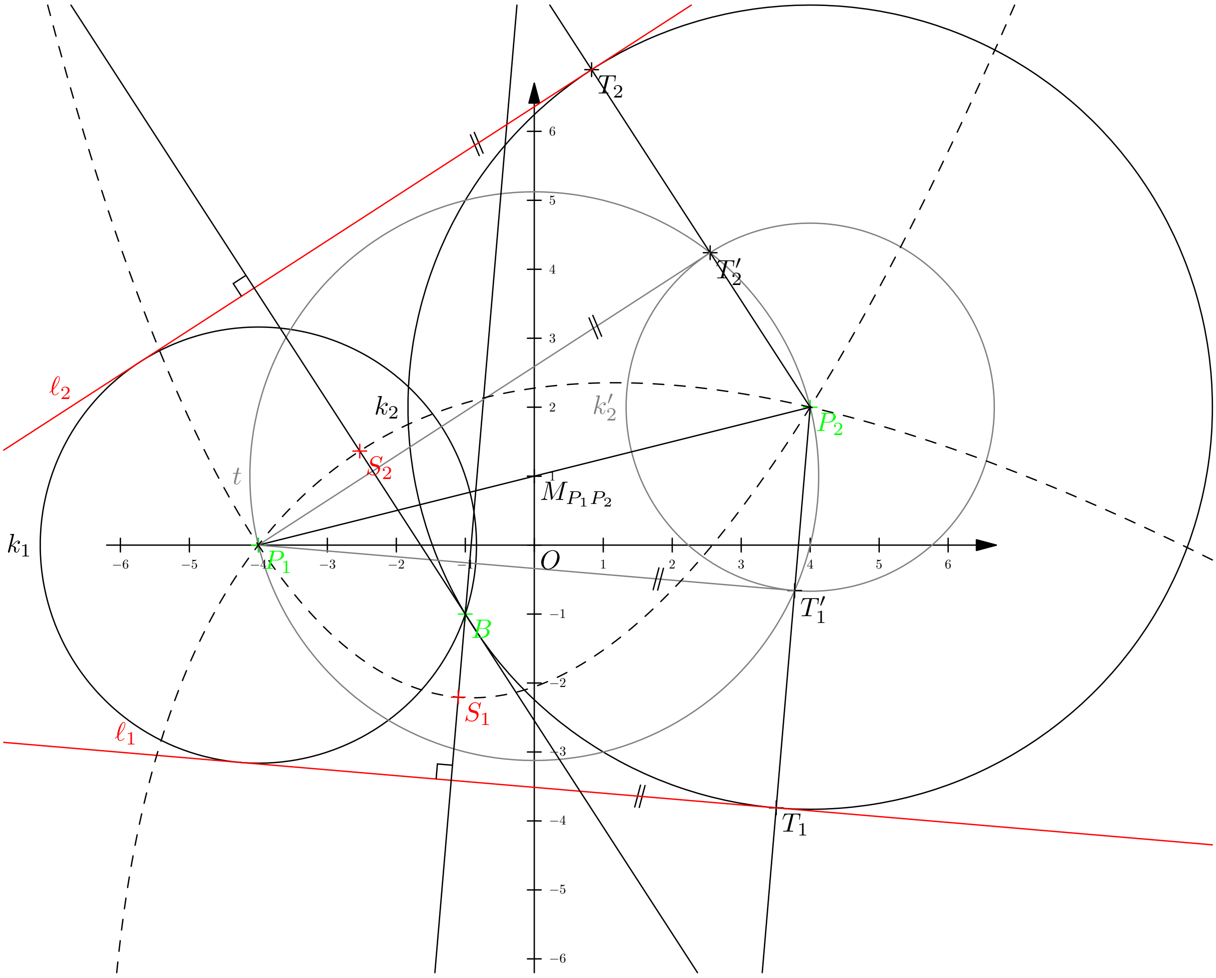
Die Schnittpunkte dieser beiden geometrischen Örter ergeben die möglichen Kreiszentren. Es kann zwischen 0 und 8 Lösungen geben (jeder Kreis kann mit den anderen beiden zwischen 0 und 4 Schnittpunkte bilden).

b) Die Kreise k_1 und k_2 schneiden sich nicht und liegen nicht ineinander. Der kleinste Kreis liegt also genau zwischen den beiden Kreisen. Das Kreiszentrum liegt also auf Z_1Z_2 und zwar genau in der Mitte zwischen den Schnittpunkten der Kreise mit $[Z_1Z_2]$.

c) Es gilt $\overline{Z_3Z_1} = r_3 + r_1$ und $\overline{Z_3Z_2} = r_3 + r_2$. Man kennt zwar r_3 nicht, aber für die Differenz gilt: $\overline{Z_3Z_1} - \overline{Z_3Z_2} = (r_3 + r_1) - (r_3 + r_2) = r_1 - r_2$. Damit ist die Abstandsdifferenz zu zwei Punkten konstant, die Punkte Z_3 liegen also auf einem Hyperbelast mit Brennpunkten Z_1, Z_2 und Abstandsdifferenz $r_1 - r_2$.

Lösung zu Aufgabe 54 ex-geom-ort-kegelschnitte3

Es gilt $\overline{P_1B} = P\ell$ und damit muss ℓ den Kreis $k(P_1, \overline{P_1B})$ berühren. Analog dazu für P_2. Die Leitlinien sind also gemeinsame Tangenten an diese beiden Kreise. Da sich die Kreise schneiden (in B), gibt es nur zwei solche Tangenten und damit 2 Lösungen.



1.	$k(P_1, \overline{P_1B}$	$\to k_1$
2.	$k(P_2, \overline{P_2B}$	$\to k_2$
3.	$k(P_2, \overline{P_2B} - \overline{P_1B}$	$\to k_2'$
4.	Thaleskreis über $[P_1P_2]$	$\to t$
5.	$t \cap k_2'$	$\to T_1'$, T_2'
6.	$[P_2T_1' \cap k_2$	$\to T_1$
7.	$[P_2T_2' \cap k_2$	$\to T_2$
8.	$\parallel$ zu P_1T_1' durch T_1	$\to \ell_1$
9.	$\parallel$ zu P_1T_2' durch T_2	$\to \ell_2$
10.	$M_{B\ell_1}$	$\to S_1$
11.	$M_{B\ell_2}$	$\to S_2$

Lösung zu Aufgabe 55 ex-geom-ort-kegelschnitte4

Seien B_1 und B_2 die gemeinsamen Brennpunkte und P ein Schnittpunkt der beiden Kurven.
Aus der Reflexionseigenschaft (Winkel α) in der Ellipse folgt, dass die Tangente an die Ellipse in P die äussere Winkelhalbierende vom $\sphericalangle B_1PB_2$ ist.
Analog bei der Hyperbel (Winkel β) folgt, dass die Tangente an die Hyperpel in P die äussere Winkelhalbierende vom $\sphericalangle B_2PX$ ist.
Da die Geraden B_1P und PX identisch sind, bilden die Tangenten das Winkelhalbierendenpaar zu den Geraden B_1P und B_2P und stehen somit senkrecht aufeinander, was zu beweisen war.