Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Aufgabe 10.5 Hier und in den folgenden ähnlichen Aufgaben sind jeweils die Lösungen des angegebenen Gleichungssystems zu bestimmen.

a) $\begin{cases} 7x - 10y = -36 & (G_1) \\ -10x = -20 & (G_2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x - y = -7 & (G_1) \\ -6x - 2y = -14 & (G_2) \end{cases}$

c) $\begin{cases} -10x + 6y = -70 & (G_1) \\ -2x = -20 & (G_2) \end{cases}$

d) $\begin{cases} -6x = 30 & (G_1) \\ -5x + 10y = 25 & (G_2) \end{cases}$

Aufgabe 10.6

a) $\begin{cases} -10x - 4y - 5z = -85 & (G_1) \\ 3x - 5y + 9z = -74 & (G_2) \\ 7y + 9z = 25 & (G_3) \end{cases}$

b) $\begin{cases} -8x - y + 6z = -58 & (G_1) \\ 3x + 10y - 2z = 99 & (G_2) \\ -x - 2y - 2z = -25 & (G_3) \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x - 8y - 9z = 6 & (G_1) \\ -3y + 9z = 54 & (G_2) \\ 7x + 7y = -21 & (G_3) \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2y - 8z = -48 & (G_1) \\ 8x + 6y + z = 69 & (G_2) \\ x + 2y + 10z = 63 & (G_3) \end{cases}$

Aufgabe 10.7

a) $\begin{cases} -5a - 2b + 6c - 10d = 10 & (G_1) \\ 10a + 10b - 3c + 3d = 50 & (G_2) \\ -c - 9d = 50 & (G_3) \\ 8a - 4b + 2d = -30 & (G_4) \end{cases}$

b) $\begin{cases} -b + 10c + 7d = -130 & (G_1) \\ -7a - 7b - 7c - 8d = 10 & (G_2) \\ 10a + 3b + 3d = 50 & (G_3) \\ -9a - 9b - 10c + 4d = -125 & (G_4) \end{cases}$

Aufgabe 10.8

a) $\begin{cases} -a - b + 6c + 10d - 6e = -55 & (G_1) \\ 3b - 5c + 8d + 10e = 81 & (G_2) \\ -2a - b + 8c + 4d + 10e = -6 & (G_3) \\ -4a + 7b - 7c - 7d + 7e = 10 & (G_4) \\ 10a + 10b + 9c + 4d - 2e = -173 & (G_5) \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6a + 5b - 3c - 3d + 3e = 12 & (G_1) \\ 8a - 3b - 7c + 8d + 5e = -44 & (G_2) \\ -8a - 5b - c + 3d - e = 16 & (G_3) \\ -5a - 2b + 8c - 2e = -34 & (G_4) \\ -8a - 4c - 7d - 9e = 124 & (G_5) \end{cases}$

Aufgabe 10.9

a) $\begin{cases} \frac{4}{x+y} = 8 \\ \frac{\frac{2}{13}}{x} = -\frac{\frac{1}{3}}{y} \end{cases}$

b) $\begin{cases} xy = -1 \\ 2x + \frac{1}{y} = \frac{23}{42} \end{cases}$

c) Lösen Sie nach x und y auf, ohne Diskussion der Spezialfälle:
$\begin{cases} ax + y = a + 2 \\ a^2x - y = -1 \end{cases}$

d) Lösen Sie nach x und y auf, ohne Diskussion der Spezialfälle:
$\begin{cases} (a-1)x + (a+1)y = \frac{2}{a+1} \\ (a+1)x + (a+1)y = \frac{2a}{a^2-1} \end{cases}$

Aufgabe 10.10 Folgende Aufgaben sind aus einer alten Ausgabe von Algebra 1 S. 181-186

Hinweis: Notieren Sie zuerst immer Ihre Unbekannten, mit **Angabe der Masseinheit**. Bei den Gleichungen, notieren Sie sich jeweils, was Sie in welcher Masseinheit ausrechnen.

Die Gleichungen dürfen mit dem TR ausgerechnet werden.

a) *A108 S. 183*
Ein Goldschmied besitzt zwei Sorten Gold. Legiert er 50 g der ersten Sorte mit 100 g der zweiten, so erhält er 14-karätiges Gold. Wenn er zu dieser Legierung noch 150 g der ersten Sorte hinzufügt, so wird die neue Legierung 16-karätig. Welchen Goldgehalt besitzt jede Sorte?
Hinweis: 24 Karat entspricht reinem Gold. Genauer meint 1 Karat einen Goldanteil von $\frac{1}{24} = \frac{100}{24}\% \approx 4.16\%$ *und* x *Karat einen Goldanteil von* $x \cdot \frac{1}{24} = x \cdot \frac{100}{24}\% \approx x \cdot 4.16\%$.

b) *A114 S. 184*
Herr Merz fährt in 48 min auf einer Autostrasse von A nach D und in 55 min zurück. Das Teilstück BC ist in beiden Richtungen nur mit 40 km/h befahrbar, auf dem Rest der Strecke fährt Herr Merz auf der Hin- bzw. der Rückfahrt eine mittlere Geschwindigkeit von 90 km/h bzw. 70 km/h. Wie lang sind AD und BC?

c) *A118 S. 184*
Von zwei Eisenbahnstationen, deren Entfernung d Meter beträgt, gehen gleichzeitig zwei Züge ab, jeder mit konstanter Geschwindigkeit. Wenn sie einander entgegenfahren, treffen sie sich nach a Minuten, wenn sie aber in derselben Richtung fahren (in Richtung einer weiteren, sehr weit entfernten Station) und der langsamere Zug vorausfährt, so holt der schnellere Zug den langsameren nach b Minuten ein. Wie viele Meter legt jeder Zug pro Minute zurück? Lösen Sie mit $a = 4, \quad b = 20, \quad d = 8600$.

d) Lösen Sie Aufgabe c) allgemein. *Das Resultat ist eine Formel, die a, b und d enthält.*

e) *122 S. 184*
Zwei Zuleitungen füllen zusammen ein Gefäss, wenn die erste 6 h lang geöffnet ist und die zweite 4 h lang. Verwechselt man die Öffnungzeiten, so läuft ein Sechstel des Gefässinhaltes über. Welchen Bruchteil des Gefässinhaltes liefert jede Leitung pro Stunde? In wie vielen Stunden wird das Gefäss durch jede Leitung einzeln gefüllt, in wie vielen durch beide zusammen?

Aufgabe 10.11 Gegeben sind 3 Punkte $A = (-2, -1)$, $B = (0, 2)$ und $C = (2, 1)$. Gesucht sind die Koeffizienten a, b, c einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ so, dass der Graph von f durch die drei Punkte A, B, C geht. Wenn Sie die Funktion bestimmt haben, skizzieren Sie deren Graphen.

Aufgabe 10.12 Es soll eine Notenskala bestimmt werden, so dass 0 Punkte die Note 1, 10 Punkte die Note 4 und 20 Punkte die Note 6 ergeben. Begründen Sie, warum diese Notenskala nicht eine lineare Funktion sein kann. Finden Sie die quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$, die ein solche Skala ergibt. Zeichnen Sie dann den Graphen dieser Funktion.

10.4 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 10.4 ex-lineare-gleichungssysteme-2var-einstieg

a) y eliminieren: $(G_1)+(G_2)$: $\quad -12x=-24 \quad \Leftrightarrow \quad x=2$.
Eingesetzt in (G_1) : $\quad -6+8y=26 \quad \Leftrightarrow \quad 8y=32 \quad \Leftrightarrow \quad y=4$.
Ein anderer Lösungsweg besteht darin, eine Gleichung nach einer Variablen aufzulösen, z.B. (G_1) nach x auflösen: $x=\frac{1}{3}(8y-26)$. Eingesetzt in (G_2):
$-9\cdot\frac{1}{3}(8y-26)-8y=-50 \quad \Leftrightarrow \quad -24y+78-8y=-50 \quad \Leftrightarrow \quad -32y=-128 \quad \Leftrightarrow \quad y=4$
Und damit $x=\frac{1}{3}(32-26)=2$.

b) y eliminieren: $(G_1)+10(G_2)$: $\quad -x-60x=-61+610 \quad \Leftrightarrow \quad -61x=-61(1-10) \quad \Leftrightarrow \quad x=-9$
Eingesetzt in (G_2): $-6\cdot(-9)-y=61 \quad \Leftrightarrow \quad 54=61+y \quad \Leftrightarrow \quad y=-7$
Ein anderer Lösungsweg besteht darin, z.B. (G_2) nach y aufzulösen und in (G_1) einzusetzen:
(G_2) : $\quad y=-6x-61$, eingesetzt in (G_1):
$-x+10(-6x-61)=-61 \quad \Leftrightarrow \quad -61x-610=-61 \quad \Leftrightarrow \quad -x-10=-1 \quad \Leftrightarrow \quad x=-9$
Und damit $y=y=-6\cdot(-9)-61=54-61=-7$.

Lösung zu Aufgabe 10.5 ex-lineare-gleichungssysteme-2var

a) $x=2, \quad y=5$

b) Elimination von x: $2(G_1)-(G_2)$: $\quad 0=0$. D.h. man kann $y\in\mathbb{R}$ beliebig wählen. x ergibt sich aus dieser Wahl wenn man z.B. (G_1) nach x auflöst: $x=\frac{7-y}{3}$.

c) $x=10, \quad y=5$

d) $x=-5, \quad y=0$

Lösung zu Aufgabe 10.6 ex-lineare-gleichungssysteme-3var

a) x=7, y=10, z=-5

b) x=7, y=8, z=1

c) x=3, y=-6, z=4

d) x=5, y=4, z=5

Lösung zu Aufgabe 10.7 ex-lineare-gleichungssysteme-4var

a) a=0, b=5, c=-5, d=-5

b) a=5, b=10, c=-5, d=-10

Lösung zu Aufgabe 10.8 ex-lineare-gleichungssysteme-5var

a) a=1, b=-10, c=-9, d=2, e=5

b) a=-4, b=3, c=-7, d=-4, e=-4

Lösung zu Aufgabe 10.9 ex-lineare-gleichungssysteme-mit-umformungen-und-bruechen

a) $\begin{cases} \frac{4}{x+y} &= 8 \quad | \cdot (x+y) \quad ⚠\ (x+y) \neq 0 \\ \frac{\frac{2}{13}}{x} &= -\frac{\frac{1}{3}}{y} \quad | \cdot xy \quad ⚠\ x \neq 0 \text{ und } y \neq 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 4 &= 8(x+y) \quad |:4 \\ \frac{2}{13}\cdot y &= -\frac{1}{3}\cdot x \quad |\cdot 39 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} 1 &= 2x+2y \quad (G_1) \\ 6y &= -13x \quad (G_2) \end{cases}$

(G_1) nach y aufgelöst: $y = -\frac{13}{6}x$ (G_1'). Eingesetzt in (G_1):

$$\begin{aligned} 1 &= 2x + 2\cdot\left(-\frac{13}{6}x\right) \\ 1 &= \frac{6}{3}x - \frac{13}{3}x \\ 1 &= -\frac{7}{3}x && \Big|: -\frac{7}{3} \\ -\frac{3}{7} &= x \end{aligned}$$

Eingesetzt in (G_1'): $y = -\frac{13}{6}\cdot\left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{13}{14}$.
Lösung: $x = -\frac{3}{7}$, $y = \frac{13}{14}$.

b) $\begin{cases} xy &= -1 \quad (G_1) \\ 2x + \frac{1}{y} &= \frac{23}{42} \quad (G_2) \quad ⚠\ y \neq 0 \end{cases}$ (G_1) nach y aufgelöst: $y = -\frac{1}{x}$ (G_1'). Eingesetzt in (G_2):

$2x + \frac{1}{-\frac{1}{x}} = \frac{23}{42} \quad \Leftrightarrow \quad 2x - x = \frac{23}{42} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{23}{42}$

In (G_1') eingesetzt: $y = -\frac{1}{\frac{23}{42}} = -\frac{42}{23}$.
Lösung: $x = \frac{23}{42}4$, $y = -\frac{42}{23}$.

c) $\begin{cases} ax + y &= a+2 \quad (G_1) \\ a^2x - y &= -1 \quad (G_2) \end{cases}$ y elminieren: $(G_1)+(G_2)$: $ax + a^2x = a+2-1 \quad \Leftrightarrow$

$x(a+a^2) = a+1 \quad |:(a+a^2) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{a+1}{a+a^2} = \frac{a+1}{a(a+1)} = \frac{1}{a}$

Eingesetzt in (G_1): $a\cdot\frac{1}{a} + y = a+2 \quad \Leftrightarrow \quad y = a+1$
Lösung: $x = \frac{1}{a}$, $y = a+1$.

d) $\begin{cases} (a-1)x + (a+1)y &= \frac{2}{a+1} \quad (G_1) \\ (a+1)x + (a+1)y &= \frac{2a}{a^2-1} \quad (G_1) \end{cases}$ y eliminieren: $(G_1)-(G_2)$:

$$\begin{aligned} (a-1)x - (a+1)x &= \frac{2}{a+1} - \frac{2a}{a^2-1} \\ x((a-1)-(a+1)) &= \frac{2}{a+1} - \frac{2a}{(a+1)(a-1)} \\ x(a-1-a-1) &= \frac{2(a-1)}{(a+1)(a-1)} - \frac{2a}{(a+1)(a-1)} \\ x\cdot(-2) &= \frac{2(a-1)-2a}{(a+1)(a-1)} && |:(-2) \\ x &= \frac{1}{(a+1)(a-1)} \end{aligned}$$

Eingesetzt in (G_1): $(a-1)\cdot\frac{1}{(a+1)(a-1)} + (a+1)y = \frac{2}{a+1} \quad \Leftrightarrow \quad (a+1)y = \frac{2}{a+1} - \frac{1}{a+1} \quad |:(a+1)$
$y = \frac{1}{(a+1)^2}$.
Lösung: $x = \frac{1}{a^2-1}$, $y = \frac{1}{(a+1)^2}$.

Lösung zu Aufgabe 10.10 ex-textaufgaben

a) Festlegen der Unbekannten (inkl. Masseinheit!):
Goldgehalt Sorte 1: x [karat], Goldgehalt Sorte 2: y [karat].
Vergleichen wird jeweils die **Masse in Gramm** an reinem Gold:

$$\begin{cases} 50 \cdot \frac{x}{24} + 100 \cdot \frac{y}{24} &= \frac{14}{24} \cdot 150 \quad \text{Mischung 1} \\ (50+150) \cdot \frac{x}{24} + 100 \cdot \frac{y}{24} &= \frac{16}{24} \cdot 300 \quad \text{Mischung 2} \end{cases}$$

Lösung: $x = 18$, $y = 12$.
Antwort: Die erste Sorte ist 18-karätig, die zweite ist 12-karätig.

b) Festlegen der Unbekannten (inkl. Masseinheit!):
Strecke AD: x [km], Strecke BC: y [km]
Berechnet wird jeweils die benötigte **Zeit in Stunden** , also Strecke geteilt durch Geschwindigkeit:

$$\begin{cases} \frac{x-y}{90} + \frac{y}{40} &= \frac{48}{60} \quad \text{Hinweg} \\ \frac{x-y}{70} + \frac{y}{40} &= \frac{55}{60} \quad \text{Rückweg} \end{cases}$$

Lösung: $x = \frac{629}{12}$, $y = \frac{47}{3}$
Antwort: Die ganze Strecke ist ungefähr 52.4 km lang, das Teilstück etwa 15.7 km.

c) Festlegen der Unbekannten (inkl. Masseinheit!):
Geschwindigkeit Zug 1: x [m/min], Geschwindigkeit Zug 2: y [m/min].
Variante 1: Man betrachtet die Strecken, die die Züge zurücklegen. Im ersten Fall legen Sie zusammen die Distanz d der Bahnhöfe zurück. Im zweiten Falle beträgt die Differenz der Strecken die Distanz d der Bahnhöfe:

$$\begin{cases} 4x + 4y &= 8600 \quad \text{Summe der Strecken [m]} \\ 20x - 20y &= 8600 \quad \text{Differenz der Strecken [m]} \end{cases}$$

Variante 2: Man kann die Situation relativ zu einem der beiden Züge zu betrachten. D.h. dessen Geschwindigkeit ist dann Null, die eigene Geschwindigkeit wird zur Geschwindigkeit des anderen Zuges addiert (bzw. davon subtrahiert).
Verglichen wird die benötigte **Zeit in min** (Strecke durch relative Geschwindigkeit):

$$\begin{cases} \frac{8600}{x+y} &= 4 \quad \text{Entgegengesetzte Richtung} \\ \frac{8600}{x-y} &= 20 \quad \text{Gleiche Richtung} \end{cases}$$

Lösung: $x = 1290$, $y = 860$
Antwort: Der erste Zug legt 1290 m/min zurück, der zweite 860 m/min.

d) Variante 1:

$$\begin{cases} ax + ay &= d \quad \text{Entgegengesetzte Richtung} \\ bx - by &= d \quad \text{Gleiche Richtung} \end{cases}$$

Variante 2:

$$\begin{cases} \frac{d}{x+y} &= a \quad \text{Entgegengesetzte Richtung} \\ \frac{d}{x-y} &= b \quad \text{Gleiche Richtung} \end{cases}$$

Lösung: $x = \frac{d(a+b)}{2ab}$, $y = \frac{d(b-a)}{2ab}$

e) Festlegen der Unbekannten (inkl. Masseinheit!):
Fülleistung Zuleitung 1: x [Gefässe pro Stunde], Fülleistung Zuleitung 2: y [Gefässe pro Stunde]
Berechnet werden die Füllmengen (Leistung mal Zeit):

$$\begin{cases} 6x+4y &= 1 & \text{korrekte Einstellung} \\ 4x+6y &= \frac{7}{6} & \text{falsche Einstellung} \end{cases}$$

Lösung: $x=\frac{1}{15}$, $y=\frac{3}{20}$.
Antwort: Die erste Zuleitung liefert $\frac{1}{15}$ des Gefässinhaltes, die zweite liefert $\frac{3}{20}$ des Inhaltes pro Stunde.
Die erste Zuleitung benötigt $\frac{1}{\frac{1}{15}}=15$ h, die zweite $\frac{1}{\frac{3}{20}}=\frac{20}{3}=6$ h 40 min um das Gefäss alleine zu füllen.
Zusammen leisten die Zuleitungen $\frac{1}{15}+\frac{3}{20}=\frac{13}{60}$ Gefässe pro Stunde. Also eine Füllzeit von $\frac{1}{\frac{13}{60}}=\frac{60}{13}\approx 4.62$ h, bzw. 4 h 37 min.

Lösung zu Aufgabe 10.11 ex-parabel-durch-punkte

Setzt man die x-Koordinate eines Punktes in f ein, muss dessen y-Koordinate herauskommen. Wir haben also folgendes Gleichungssystem für a, b und c:

$$\begin{cases} f(-2) &= -1 & \text{Punkt } A \\ f(0) &= 2 & \text{Punkt } B \\ f(2) &= 1 & \text{Punkt } C \end{cases} \qquad \begin{cases} 4a-2b+c &= -1 & (G_1) \\ c &= 2 & (G_2) \\ 4a+2b+c &= 1 & (G_3) \end{cases}$$

(G_2) ist schon nach c aufgelöst, also einsetzen in (G_1) und (G_3):

$$\begin{cases} 4a-2b+2 &= -1 & (G_1') \\ 4a+2b+2 &= 1 & (G_3') \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4a-2b &= -3 & (G_1') \\ 4a+2b &= -1 & (G_3') \end{cases}$$

Die Unbekannte b wird eliminiert: $(G_1')+(G_3')$:

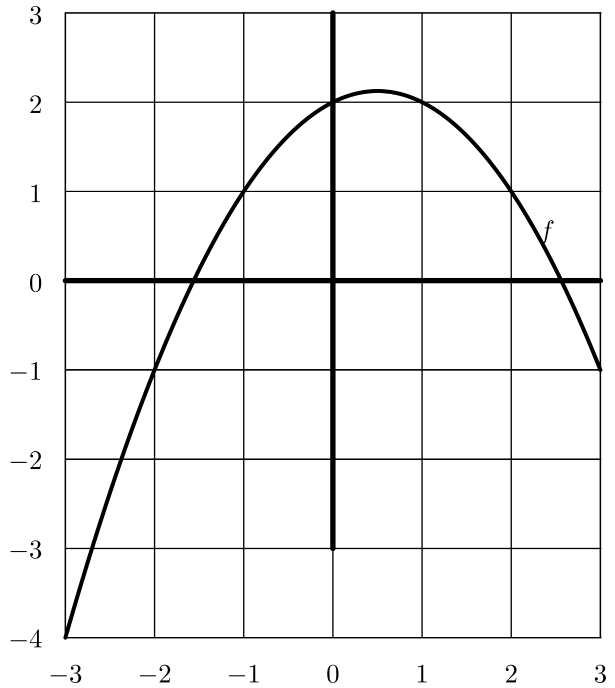
$$8a=-4 \quad \Leftrightarrow \quad a=-\frac{1}{2}$$

Eingesetzt in (G_1'):

$$-2-2b=-3 \quad \Leftrightarrow \quad b=\frac{1}{2}$$

Und damit ist die gesuchte Funktion $f(x)=-\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{2}\cdot x+2$.

Der Graph ist wie folgt:



Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Lösung zu Aufgabe 10.12 ex-quadratische-notenskala

Die Punkte (0,1), (10,4), und (20,6) liegen nicht auf einer Geraden. Dies kann man belegen, indem man z.B. die Steigung der zwischen den Punkten berechnet: $\frac{3}{10} \neq \frac{2}{10}$.

Wir kennen wieder für drei Argumente (0, 10 und 20) die Funktionswerte (1, 4 und 6). Wir erhalten also folgendes System:

$$\left\{\begin{array}{rll} f(0) & = 1 & \text{Punkt } (0,1) \\ f(10) & = 4 & \text{Punkt } (10,4) \\ f(20) & = 6 & \text{Punkt } (20,4) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rll} c & = 1 & (G_1) \\ 100a + 10b + c & = 4 & (G_2) \\ 400a + 20b + c & = 6 & (G_3) \end{array}\right.$$

(G_1) ist bereits nach c aufgelöst. Eingesetzt in (G_2), (G_3):

$$\left\{\begin{array}{rll} 100a + 10b & = 3 & (G_2') \\ 400a + 20b & = 5 & (G_3') \end{array}\right.$$

b eliminieren: $2(G_2') - (G_3')$: $\quad -200a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{1}{200}$. Eingesetzt in (G_2'):

$$-\frac{1}{2} + 10b = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 10b = \frac{7}{2} \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{7}{20}$$

Und damit ist die Notenfunktion $f(x) = -\frac{1}{200}x^2 + \frac{7}{20}x + 1$. Der Graph sieht wie folgt aus: