Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Erkläre in eigenen Worten, wie die folgenden Ausdrücke definiert sind! (Wir nehmen an, dass a und t nicht-negative reelle Zahlen sind und dass n und m positive natürliche Zahlen sind.)

(a) $\sqrt[17]{a}$ ist diejenige nicht-negative reelle Zahl x mit $x^{17} = a$;
alternativ: , die «hoch 17» die Zahl a ergibt;
alternativ: , deren 17-te Potenz a ist.

(b) $t^{\frac{1}{13}}$ ist die nicht-negative reelle Zahl, deren 13-te Potenz t ist.

(c) $\sqrt[n]{5}$ ist die nicht-negative reelle Zahl, deren n-te Potenz 5 ist.

(d) $7^{\frac{1}{m}}$ ist die nicht-negative reelle Zahl, deren m-te Potenz 5 ist.

Schreibe die Zweierpotenzen (= Potenzen von 2) bis zum Exponent 10, die Dreierpotenzen bis zum Exponent 5 und die Fünferpotenzen bis zum Exponent 4 auf und lerne sie auswendig!

$2^0 = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 2^8 = 256, 512, 2^{10} = 1024$

$3^0 = 1, 3, 9, 27, 81, 3^5 = 243$

$5^0 = 1, 5, 25, 125, 5^4 = 625$

Ergänze in jedem freien Rechteck die korrekte, passende Zahl und begründe, warum du diese Zahl gewählt hast! (ohne Taschenrechner; in der letzten Teilaufgabe sind Variablen einzutragen)

(a) $\sqrt[4]{16} = \boxed{2}$, weil $\boxed{2}^4 = \boxed{16}$

(b) $\sqrt[3]{\boxed{125}} = 5$, weil $\boxed{5}^3 = \boxed{125}$

(c) $\sqrt{\boxed{36}} = \boxed{6}$, weil $6^2 = \boxed{36}$

(d) $\sqrt[8]{\boxed{256}} = \boxed{2}$, weil $\boxed{2}^8 = 256$

(e) $\sqrt[\boxed{7}]{\boxed{128}} = 2$, weil $\boxed{2}^{\boxed{7}} = 128$

(f) $\sqrt{\boxed{0.01}} = \boxed{0.1}$, weil $\boxed{0.1}^2 = 0.01$

(g) $\sqrt{\boxed{0.16}} = \boxed{0.4}$, weil $\boxed{0.4}^2 = 0.16$

(h) $\sqrt[\boxed{3}]{\boxed{0.001}} = \boxed{0.1}$, weil $\boxed{0.1}^3 = 0.001$

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{\boxed{a}}\sqrt{\boxed{b}}$, weil $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = \boxed{\sqrt{a}}^2\boxed{\sqrt{b}}^2 = \boxed{ab}$

Entscheide jeweils, ob die Behauptung wahr oder falsch ist und begründe deine Antwort! Ist die Behauptung falsch, so reicht die Angabe eines Gegenbeispiels!

(a) Für jede nicht-negative reelle Zahl a gilt $(\sqrt{a})^2 = a$. Korrekt, nach der Definition der Wurzel

(b) Für jede nicht-negative reelle Zahl a gilt $(\sqrt{a^2}) = a$. Korrekt, denn $a^2 = a^2$ und a^2 und a sind nicht-negativ.

(c) Für jede nicht-negative reelle Zahl a gilt $(\sqrt[3]{a^3}) = a$. Korrekt, denn $a^3 = a^3$.

(d) Für jede reelle Zahl a gilt $\sqrt{a^2} = a$. Falsch für alle $a < 0$, denn die linke Seite ist stets nicht-negativ. Gegenbeispiel $a = -1$. (Für alle $a \geq 0$ stimmt es.)

(e) Für jede reelle Zahl a gilt $\sqrt[3]{a^6} = a^2$. Korrekt, denn $(a^2)^3 = a^{2\cdot 3} = a^6$. Beachte, dass a^6 und a^2 stets nicht-negativ sind!

(f) Für jede reelle Zahl a gilt $(\sqrt[3]{a^3}) = a$. Falsch für alle $a < 0$, denn dann ist das Argument unter der Wurzel negativ und die Wurzel ist nicht einmal definiert. Gegenbeispiel $a = -1$ oder $a = -2$. (Für alle $a \geq 0$ stimmt es.)

(g) Die Zahlen 10 und -10 sind die Quadratwurzeln von 100.

Falsch, denn eine Wurzel ist per Definition nie negativ: Die Quadratwurzel von 100 ist 10, d.h. $\sqrt{100} = 10$.

(h) Für alle nicht-negativen Zahlen a und b gilt $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$.

Korrekt, denn $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (und dies ist als Quadrat stets grösser-gleich Null, ebenso $a + b \geq 0$).

(i) Für alle nicht-negativen Zahlen a und b gilt $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = a - b$.

Falsch, denn im Fall $a < b$ ist die rechte Seite negativ. Gegenbeispiele: $a = 0$ und $b = 1$ oder $a = 1$ und $b = 10000$.
Unter der Zusatzvoraussetzung $a \geq b$ stimmt es aber wegen $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (und $a - b \geq 0$).
Beachte, dass $a^2 - 2ab + b^2$ als Quadrat grösser-gleich Null und die Wurzel somit definiert ist (auch wenn $a < b$).

Als Ersatz für Aufgabe 13.3: Fülle die Lücken und begründe deine Eintragungen!

(a) $\sqrt[5]{\boxed{32}} = 2$, weil $\boxed{2}^{\boxed{5}} = \boxed{32}$

(b) $\sqrt[5]{\boxed{3}^{\boxed{2}}} = \left(\sqrt[5]{3}\right)^2$, weil $\left(\left(\sqrt[5]{3}\right)^2\right)^{\boxed{5}} = \left(\sqrt[5]{3}\right)^{\boxed{2}\cdot\boxed{5}} = \left(\left(\sqrt[5]{3}\right)^{\boxed{5}}\right)^2 = \boxed{3}^2$

(c) $\sqrt[3]{\boxed{a}^{\boxed{2}}} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^2$, weil $\left(\left(\sqrt[3]{a}\right)^2\right)^{\boxed{3}} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^{\boxed{2}\cdot\boxed{3}} = \left(\left(\sqrt[3]{a}\right)^{\boxed{3}}\right)^2 = \boxed{a}^{\boxed{2}}$

(d) $\sqrt[n]{\boxed{a}^{\boxed{m}}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$, weil $\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right)^{\boxed{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{\boxed{m}\cdot\boxed{n}} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^{\boxed{n}}\right)^m = \boxed{a}^{\boxed{m}}$

(e) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 \neq \left(\sqrt[2]{5}\right)^3$, weil sonst beim Potenzieren mit $2 \cdot 3 = 6$ dasselbe herauskommen müsste. Aber $\left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right)^6 = \left(\sqrt[3]{5}\right)^{\boxed{12}} = \left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^{\boxed{3}}\right)^4 = \boxed{5}^{\boxed{4}}$ und $\left(\left(\sqrt[2]{5}\right)^3\right)^6 = \left(\sqrt[2]{5}\right)^{\boxed{18}} = \left(\left(\sqrt[2]{5}\right)^{\boxed{2}}\right)^9 = \boxed{5}^{\boxed{9}}$ sind verschieden.

Als Ersatz für Aufgabe 13.4:

(a) $\sqrt[15]{7^9} = \sqrt[5]{7^3}$, da $\boxed{\sqrt[5]{7^3}}^{15} = \left(\boxed{\sqrt[5]{7^3}}^5\right)^{\boxed{3}} = \left(7^{\boxed{3}}\right)^3 = \boxed{7}^{\boxed{9}}$

(b) $\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}$, da $\boxed{\sqrt[n]{a^m}}^{n\cdot k} = \left(\boxed{\sqrt[n]{a^m}}^n\right)^{\boxed{k}} = \left(a^{\boxed{m}}\right)^k = \boxed{a}^{\boxed{m}\cdot\boxed{k}}$