



10 Gleichungssysteme

Bis jetzt haben wir jeweils Gleichungen mit einer Variablen angetroffen und gelöst. D.h. es war eine Zahl gesucht und man kannte für die Zahl eine Bedingung, die in Form einer Gleichung formuliert wurde.

Sind mehrere Unbekannte gesucht, sind oft ebenso viele Bedingungen gegeben. Als Beispiel betrachten wir folgende Aufgabe:

* Aufgabe 10.1

Für welche Werte von x und y sind die beiden folgenden Gleichungen **gleichzeitig** erfüllt?

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 & (G_1) \\ -x + 7y = 25 & (G_2) \end{cases}$$

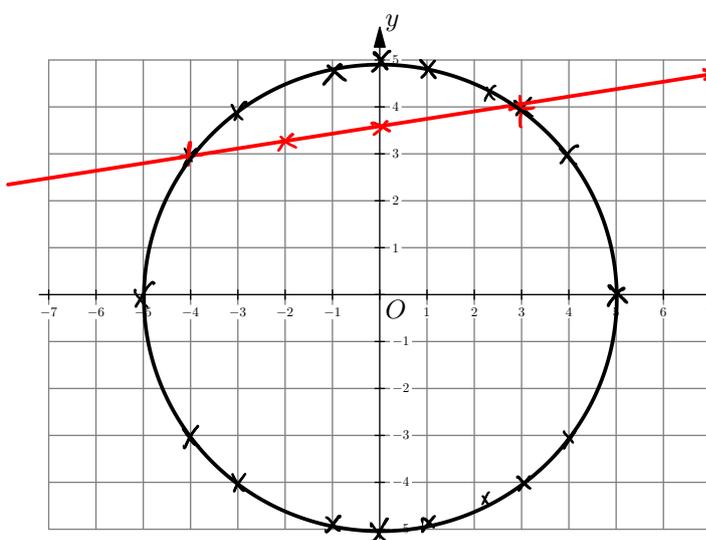
Die Gleichung (G_2) ist **linear**, weil nur reelle Vielfache der Variablen und Konstanten (= reelle Zahlen) als Summanden vorkommen. (Mit anderen Worten, beide Seiten der Gleichung sind Polynome vom Grad 1 oder kleiner.)

Die Gleichung (G_1) ist **nicht-linear**, weil die Variablen quadriert vorkommen (Polynom vom Grad 2); ausserdem kann die Gleichung auch nicht so umgeformt werden, dass sie linear wird.

Sobald man mehrere Gleichungen in mehreren Variablen betrachtet, spricht man von einem **Gleichungssystem**. Eine **Lösung eines Gleichungssystems** ist eine Zuordnung von reellen Zahlen zu allen Variablen so, dass alle Gleichungen zu wahren Aussagen werden.

Versuchen Sie jetzt mit folgender Anleitung die Lösungen für das Gleichungssystem zu bestimmen:

- Finden Sie jeweils 10 Wertepaare (x, y) , die Lösungen der Gleichungen (G_1) bzw. (G_2) sind und zeichnen Sie diese Punkte mit zwei verschiedenen Farben ins folgende Koordinatensystem ein. Wählen Sie Wertepaare, die möglichst einfach zu berechnen sind.



Lösungen von (G_1) :

$x = 4$ und $y = 3$ kurz: $(x, y) = (4, 3)$

$(x, y) = (0, 5), (x, y) = (5, 0), (x, y) = (3, 4)$

$(-4, -3), (-3, -4), (\pm 4, \pm 3), (\pm 3, \pm 4), (-5, 0), (0, -5)$

$(x, y) = (1, \sqrt{24}), (2, 2, \sqrt{25 - 2 \cdot 2^2})$

Lösungen von G_2 :

$(3, 4), (0, \frac{25}{7})$

Ist $(3, -4)$ Lösung? $-3 + 7 \cdot (-4) \stackrel{-31}{=} \stackrel{?}{=} 25$ nein.

$(x, y) = (-4, 3), (7, \frac{32}{7}), (-2, \frac{28}{7})$

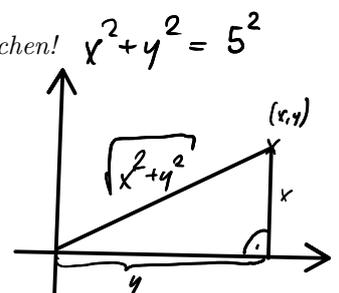
- Würde man alle möglichen Wertepaare für (G_2) einzeichnen, was würde man erhalten und warum?

Gerade, denn (G_2) kann zu $y = \frac{1}{7}x + \frac{25}{7}$ umgeformt werden und dies kann als lineare Funktion $y = f(x) = \frac{1}{7}x + \frac{25}{7}$ interpretiert werden. Die Lösungsmenge von (G_2) ist eine Gerade.

- Beantworten Sie die gleiche Frage für (G_1) ! Hinweis: Denken Sie an einen alten Griechen!

Kreis. Ist (x, y) ein Punkt, so ist $x^2 + y^2$ das Quadrat seines Abstands zum Nullpunkt.

Dann ist (x, y) genau dann eine Lösung von (G_1) , wenn sein Abstand vom Ursprung 5 beträgt.



Dann ist Lösungsmenge von (G_1) ein Kreis.



- Lesen Sie die ungefähren Schnittpunkte ab und beweisen Sie rechnerisch, dass Ihre «Schätzung» exakt ist.

☞ Ablesen: $(-4,3)$ $(3,4)$ Test, dass Lösungen des Gleichungssystems durch Einsetzen

10.1 Lösungsmethoden

Gleichungssysteme grafisch zu lösen ist in den meisten Fällen unpraktikabel, ungenau und zu aufwändig. Darum sind wir an exakten rechnerischen Methoden interessiert.

Es gibt verschiedene Lösungsmethoden für Gleichungssysteme. Einige funktionieren allgemein, andere nur bei *linearen Gleichungssystemen* (= Gleichungssysteme, in denen alle Gleichungen linear sind).

10.1.1 Allgemeine Lösungsmethode: Auflösen und Einsetzen

Die Methode «Auflösen und Einsetzen» funktioniert wie:

- Eine Gleichung nach einer Variablen auflösen (sofern möglich). *Am besten wird die «einfachste» Gleichung nach der «einfachsten» Variablen aufgelöst.*
- Das Resultat in alle anderen Gleichungen einsetzen (und damit eine Variable eliminieren).
- Das so erhaltene, neue Gleichungssystem hat eine Variable und eine Gleichung weniger. Man löst es mit demselben Verfahren etc.
- Am Schluss die Lösungen «rückwärts» einsetzen.

Bei nicht-linearen Gleichungssystemen ist dies oft die einzige Methode. Bei linearen Gleichungssystemen werden wir noch weitere Methoden kennenlernen, die oft mit weniger Aufwand verbunden sind.

* Aufgabe 10.2

Lösen Sie das Gleichungssystem aus Aufgabe 10.1 mit der Methode «Auflösen und Einsetzen» wie folgt:

- Lösen Sie (G_2) nach x auf («einfachere» Gleichung, schon fast nach x aufgelöst). Die Lösung für x ist ein Ausdruck mit y .

☞ $x = 7y - 25$

- Ersetzen Sie x in (G_1) durch diesen Ausdruck.

☞ $(7y - 25)^2 + y^2 = 25$ (eine Gleichung alias Gleichungssystem mit einer Gleichung)

- Quadrieren Sie aus und formen Sie die entstehende Gleichung so um, dass die rechte Seite zu Null wird.

Dividieren Sie dann durch den ggT. ☞

$$49y^2 - 350y + 625 + y^2 = 25 \quad | -25$$

$$50y^2 - 350y + 600 = 0 \quad | :50$$

$$y^2 - 7y + 12 = 0$$

- Faktorisieren Sie die linke Seite und lesen die Lösungen für y ab. ☞

$$(y - 3)(y - 4) = 0 \Leftrightarrow y - 3 = 0 \text{ oder } y - 4 = 0$$

Die Lösungen sind $y = 3$ und $y = 4$.



$$x = 7y - 25$$

- Setzen Sie die gefundenen Werte für y in den Ausdruck für x ein, um die zugehörigen Werte für x zu erhalten.

Für $y = 3$ erhalten wir $x = 7 \cdot 3 - 25 = -4$.

Für $y = 4$ —||— $x = 7 \cdot 4 - 25 = 3$.

Die Lösungen des Gleichungssystems sind $(x,y) = (-4, 3)$

Im Folgenden betrachten wir fast ausschliesslich lineare Gleichungssysteme. und $(x,y) = (3, 4)$.

✳ Aufgabe 10.3

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem rechnerisch mit der obigen Methode:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 & (G_1) \\ x + 3y + 2z = 5 & (G_2) \\ -2x + 4y + 4z = 2 & (G_3) \end{cases}$$

- (G_2) nach x auflösen: $x = 5 - 3y - 2z$ (G_2')

Diesen Ausdruck für x in (G_1) und (G_3) einsetzen:

$$\begin{cases} 2 \cdot (5 - 3y - 2z) + y - z = 0 \\ -2(5 - 3y - 2z) + 4y + 4z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y - 5z = -10 & (G_1') \\ 10y + 8z = 12 & (G_3') \end{cases}$$

- (G_3') nach y auflösen: $y = \frac{1}{10}(12 - 8z) = \frac{6 - 4z}{5}$ (G_3'')

Diesen Ausdruck für y in (G_1') einsetzen:

$$-5 \cdot \frac{6 - 4z}{5} - 5z = -10 \Leftrightarrow -(6 - 4z) - 5z = -10 \Leftrightarrow -z = -4 \Leftrightarrow z = 4$$

Also muss $z = 4$ gelten.

Einsetzen in (G_3'') : $y = \frac{6 - 4 \cdot 4}{5} = -2$

Einsetzen in (G_2') : $x = 5 - 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 4 = 3$

Fazit: Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung, $(x,y,z) = (3, -2, 4)$

Aus der Lösung dieser Aufgabe ist für lineare Gleichungssysteme Folgendes ersichtlich: Im Allgemeinen braucht es genau so viele Gleichungen wie Variablen, damit das System genau eine Lösung hat.

In jedem Schritt wird nämlich eine Variable eliminiert und man erhält ein lineares System mit einer Gleichung weniger.

In Spezialfällen kann es aber trotzdem keine oder unendlich viele Lösungen geben, siehe Abschnitt 10.3.

Merke

Der TR kann Gleichungssysteme lösen. Dazu werden die Gleichungen mit **and** verknüpft und die Liste der Variablen zwischen $\{ \}$ geschrieben. Beispiel:

```
solve(x+y=60 and x-y=40, {x,y})
```

HA.

10.1.2 Lösungsmethode: Variablen eliminieren durch Linearkombinationen von Gleichungen

Die in diesem Abschnitt erklärte Lösungsmethode ist unsere Standardmethode für lineare Gleichungssysteme. Sie beruht auf der folgenden Beobachtung:

Addiert (bzw. subtrahiert) man zwei Gleichungen (oder Vielfache davon) eines linearen Gleichungssystems (voneinander), so erhält man eine neue lineare Gleichung, die von jeder Lösung der beiden Gleichungen erfüllt wird.



Unsere Lösungsmethode geht (grob) wie folgt:

- Führe solche Additionen (bzw. Subtraktionen) zweier Gleichungen mehrfach durch. Das Ziel dabei ist, eine bestimmte Variable zu eliminieren und die Anzahl der Gleichungen um eins zu reduzieren.
- Man erhält so ein neues Gleichungssystem (mit einer Variablen und einer Gleichung weniger), auf das man dasselbe Verfahren anwendet etc.
- Wenn man bei einem aus einer Gleichung bestehenden System angekommen ist, kann man seine Lösung(en) unmittelbar ablesen und erhält durch Rückwärts-Einsetzen die Lösung(en) des ursprünglichen Gleichungssystems.

Beispiel:
$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 & (G_1) \\ x + 3y + 2z = 5 & (G_2) \\ -2x + 4y + 4z = 2 & (G_3) \end{cases}$$

- 1. Ziel: x eliminieren.

$$(G_1) + (G_3): \quad 5y + 3z = 2 \quad (H_1)$$

$$2 \cdot (G_2) + (G_3): \quad 10y + 8z = 12 \quad (H_2)$$

LGS
lineares Gleichungssystem
aus 2 Gleichungen und 2 Variablen

- 2. Ziel: y eliminieren.

$$2 \cdot (H_1) - (H_2): \quad -2z = -8$$

lineare
eine Gleichung
in einer Variablen = LGS mit einer
Gleichung und
einer Variable

Es hat als Lösung $z = 4$

Rückwärts einsetzen und auflösen

- Setze $z = 4$ in (H_2) ein und löse nach y auf:

$$10y + 8 \cdot 4 = 12 \Leftrightarrow y = -2$$

- Setze $z = 4$ und $y = -2$ in (G_2) ein und löse nach x auf:

$$x + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = 5 \Leftrightarrow x = 3$$

Achtung: Die einzige Lösung ist $(x, y, z) = (3, -2, 4)$.

- Jede mögliche Menge von n Gleichungen eines jeden „neuen“ Gleichungssystems muss aus mindestens $n + 1$ Gleichungen des „alten“ Gleichungssystems entstanden sein. (Ansonsten kriegt man redundante Gleichungen und gewinnt neue Lösungen.)
- Gleichungen, die die zu eliminierende Variable gar nicht enthalten, werden stets unverändert vom alten in das neue Gleichungssystem übernommen.

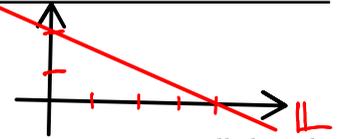
✘ **Aufgabe 10.4** Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme.

a)
$$\begin{cases} -3x + 8y = 26 & (G_1) \\ -9x - 8y = -50 & (G_2) \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} -x + 10y = -61 & (G_1) \\ -6x - y = 61 & (G_2) \end{cases}$$



10.2 Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen



Hat ein Gleichungssystem weniger Gleichungen als Variablen, so hat dieses System meistens unendlich viele Lösungen. Das kann aber auch passieren, wenn es «genug» Gleichungen hat, aber eine der Gleichungen aus den anderen folgt.

Man sagt, dass das Gleichungssystem *unterbestimmt* ist. \leftrightarrow es gibt unendlich viele Lösungen

Beispiel: Bestimmen Sie alle möglichen Lösungen von folgendem unterbestimmtem «Gleichungssystem» (zwei Variablen = Unbekannte, aber nur eine Gleichung). Finden Sie eine geometrische Interpretation aller möglichen Lösungen:

$$x + 2y = 4 \quad (G_1)$$

Nach y auflösen: $y = -\frac{1}{2}x + 2$. Der Wert von x ist frei wählbar, y ergibt sich daraus.

Die Lösungen sind also alle Punkte des Graphen der linearen Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

$$\mathbb{L} = \text{graph}(f) = \left\{ \left(x, -\frac{1}{2}x + 2 \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

Löst man ein unterbestimmtes Gleichungssystem durch Auflösen und Einsetzen, erhält man am Schluss eine Gleichung mit mehr als einer Variablen. Nach einer kann aufgelöst werden, alle restlichen können frei gewählt werden (im Definitionsbereich des entsprechenden Ausdrucks). Geometrisch ergibt sich dann eine ein- oder mehrdimensionale Punktmenge. D.h. Geraden und Ebenen etc. im Falle von linearen Gleichungssystemen, bzw. Kurven und Flächen etc. im Falle von nicht-linearen Gleichungen:

Anzahl Variablen	Anzahl Gleichungen	Zu erwartende Lösungsmenge
2	1	Gerade (bzw. Kurve) in der Ebene
3	1	Ebene (bzw. Fläche) im Raum
3	2	Gerade (bzw. Kurve) im Raum
4	2	Ebene (bzw. Fläche) im 4-dimensionalen Raum
4	3	Gerade (bzw. Kurve) im 4-dimensionalen Raum

$x^2 + y^2 = 25$ Lösungsmenge Kreis
 $x + y + z = 1$ (Vektorgerade)
 Lösungsmenge ist die Ebene durch die drei Punkte $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$

$x + y + z = 1$
 $0x + 0y + z = 0$

10.3 Zu erwartende Lösungsmengen

«Normalerweise» hat eine lineares Gleichungssystem mit gleich vielen Variablen wie Gleichungen genau eine Lösung. Wie schon bei einfachen linearen Gleichungen kann es aber durchaus vorkommen, dass auch Gleichungssysteme dieser Art keine oder unendlich viele Lösungen haben.

Beispiel 1: $\begin{cases} 4x - 3y = 2 & (G_1) \\ -8x + 6y = 1 & (G_2) \end{cases}$

Beispiel 2: $\begin{cases} -4x - 10y = 8 & (G_1) \\ 6x + 15y = -12 & (G_2) \end{cases}$

$2(G_1) + (G_2): 0 = 5$
 Das System hat keine Lösung
 $\mathbb{L} = \emptyset$

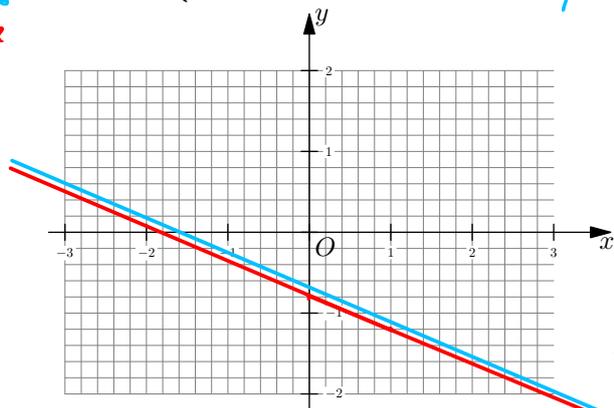
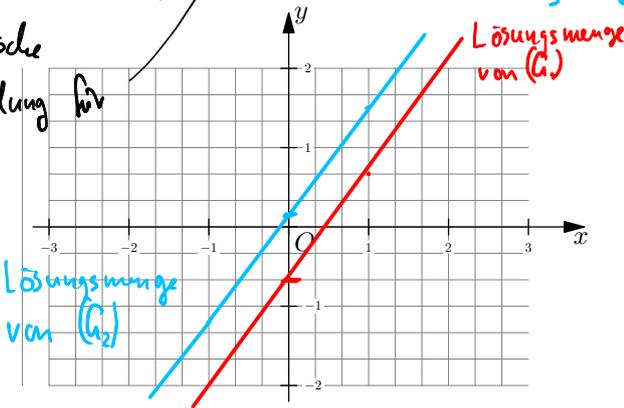
$3(G_1) + 2(G_2): 0x + 0y = 0$
 x kann beliebig gewählt werden, y ergibt sich etwa aus $(G_1): y = -0.4x - 0.8$

Zeichnen Sie für beide Beispiele jeweils die beiden Lösungsmengen von (G_1) und (G_2) in einem Koordinatensystem:

Beispiel 1 $\begin{cases} 4x - 3y = 2 & (G_1) \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} \\ -8x + 6y = 1 & (G_2) \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{6} \end{cases}$

Beispiel 2 $\begin{cases} -4x - 10y = 8 & (G_1) \Leftrightarrow y = -0.4x - 0.8 \\ 6x + 15y = -12 & (G_2) \Leftrightarrow y = -0.4x - 0.8 \end{cases}$

geometrische Begründung für



$$\mathbb{L} = (\text{rote Gerade}) \cap (\text{blaue Gerade}) = \emptyset$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(x, -0.4x - 0.8 \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$



10.3.1 2 Variablen, 2 lineare Gleichungen

Die Lösungen einer einzelnen linearen Gleichung mit zwei Variablen entsprechen normalerweise den Koordinaten aller Punkte auf einer Geraden. Die Gerade kann sogar vertikal sein, z.B. $x + 0y = 4$.

(Der Spezialfall, wo gar keine Variable vorkommt, interessiert uns wenig: Er führt entweder auf eine nicht lösbare Gleichung (z.B. $0x + 0y = 1$) oder auf eine stets wahre Gleichung $0x + 0y = 0$. Im ersten Fall hat das System keine Lösung, im zweiten Fall sind alle Punkte (x, y) der Ebene Lösungen.)

Die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit 2 Variablen und 2 Gleichungen entspricht im Normalfall den Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Geraden, die man aus den beiden beteiligten Gleichungen erhält. Es gibt somit 3 Fälle:

- Fall 1: ☞ Die beiden Geraden schneiden sich: Es gibt genau eine Lösung (= Schnittpunkt)
 Fall 2: ☞ Die beiden Geraden sind parallel und verschieden: Es gibt keine Lösung. (Beispiel 1)
 Fall 3: ☞ Die beiden Geraden sind identisch: Alle Punkte auf der (Schnitt-)geraden sind Lösungen. (Beispiel 2)

10.3.2 3 Variablen, 3 Gleichungen

Wenn man wie oben von Spezialfällen absieht, entsprechen die Lösungen einer einzelnen Gleichung den Koordinaten der Punkte einer Ebene im Raum. (Warum und dass das so ist, werden wir später in der Vektorgeometrie untersuchen). Im Allgemeinen schneiden sich zwei Ebenen in einer Geraden (vgl. Rücken eines Schulhefts). Die Lösung der Gleichung entspricht also dem Schnittpunkt dreier Ebenen, falls es diesen gibt. Es ergeben sich folgende Fälle:

- Fall 1: Je zwei der drei Ebenen sind parallel zueinander oder gleich.
 - Falls zwei der drei Ebenen verschieden sind, gibt es keine Lösung.
 - Sonst sind alle drei Ebenen gleich und alle Punkte dieser Ebene sind Lösungen.
- Fall 2: Genau zwei der drei Ebenen sind parallel zueinander oder gleich. (Dann ist die dritte nicht parallel zu jeder dieser beiden.)
 - Falls diese beiden parallelen Ebenen verschieden sind, gibt es keine Lösung.
 - Sonst bilden sie eine Ebene, die die dritte in einer Geraden schneidet; die (Koordinaten der) Punkte dieser Geraden sind die Lösungen.
- Fall 3: Keine zwei der drei Ebenen sind parallel zueinander oder gleich. Dann schneiden sich je zwei der drei Ebenen in einer Geraden.

Wir betrachten eine beliebige der drei Ebenen. Sie enthält dann zwei Schnittgeraden (mit den anderen beiden Ebenen).

- Fall 3.1: Diese beiden Schnittgeraden sind parallel und verschieden: Es gibt keine Lösung. (Dies ist wohl die Toblerone-Situation)
- Fall 3.2: Diese beiden Schnittgeraden stimmen überein. Dann schneiden sich die drei Ebenen in dieser Geraden, und die (Koordinaten der) Punkte dieser Geraden sind die Lösungen.
- Fall 3.3: Diese beiden Schnittgeraden schneiden sich in einem Punkt. Dann ist dieser Punkt (oder seine Koordinaten) die einzige Lösung.

Textaufgabe: Vor 10 Jahren war Xaver dreimal so alt wie Yael.
In 10 Jahren wird Xaver doppelt so alt wie Yael sein.
Wie alt sind Xaver und Yael heute?

Lösung: (1) Festlegen der Unbekannten (= Variablen) inklusive Flusseinheit.

x : Alter von Xaver in Jahren heute.

y : Alter von Yael in Jahren heute.

(2) Information aus Text als Gleichung aufschreiben:

$$\begin{cases} x - 10 = 3(y - 10) & (A) \\ x + 10 = 2(y + 10) & (B) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 10 = 3y - 30 \\ x + 10 = 2y + 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = -20 & (C) \\ x - 2y = 10 & (D) \end{cases}$$

„Standardform“ für lineares Gleichungssystem, d.h. Variablen links, Zahlen rechts

$$(D) - (C): \quad \boxed{y = 30}$$

In (C) einsetzen: $x - 3 \cdot 30 = -20$

$$\Leftrightarrow x - 90 = -20$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = 70}$$

(3) Probe: Lösung in (A) und (B) einsetzen:

$$(A): \quad 70 - 10 \stackrel{?}{=} 3(30 - 10) \quad \checkmark$$

$$(B): \quad 70 + 10 \stackrel{?}{=} 2(30 + 10) \quad \checkmark$$

Zu 10.7. (a)

100 g 24-karatiges "Gold" besteht aus 100g Ringgold.

100 g 18-karatiges "Gold" — " — 75g Ringgold
und 25g Verunreinigung

100 g x-karatiges "Gold" — " — $\frac{x}{24} \cdot 100g$ Ringgold.



✂ **Aufgabe 10.5** Lösen Sie jeweils das angegebene lineare Gleichungssystem.

Führen Sie dann die Probe durch, ob die von Ihnen berechnete Lösung alle Gleichungen des Gleichungssystems erfüllt. Wenn nicht: Suchen Sie Ihren Fehler oder starten Sie einen neuen Lösungsversuch!

$$\text{a) } \begin{cases} -2x - 3y = -1 & (G_1) \\ 3x + 3y = -3 & (G_2) \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - 3y = -2 & (G_1) \\ -2x + 2y = -2 & (G_2) \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x - y = 1 & (G_1) \\ 5x - 2y = 1 & (G_2) \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + 2y = -1 & (G_1) \\ x + 5y = 5 & (G_2) \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 3x + y + 2z = 0 & (G_1) \\ 4x + 2y + 3z = -4 & (G_2) \\ 2x + 4y - z = -4 & (G_3) \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} -2x - 3y + 8z = 1 & (G_1) \\ -2x - y + 4z = 3 & (G_2) \\ 4x - 6y + 3z = 1 & (G_3) \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} -5x - 3y - 3z = 5 & (G_1) \\ -5x + 5y - z = -1 & (G_2) \\ 3x + y + z = -3 & (G_3) \end{cases}$$

$$\text{h) } \begin{cases} -x + y + 2z = 3 & (G_1) \\ x + z = -1 & (G_2) \\ -2x + 4y - 4z = -4 & (G_3) \end{cases}$$

$$\text{i) } \begin{cases} -3a - 8b + 5c + d = -4 & (G_1) \\ a + 4b - 8c - 3d = -2 & (G_2) \\ -3a - 5b + c + d = -2 & (G_3) \\ a + 9b + 8c + 5d = -4 & (G_4) \end{cases}$$

$$\text{j) } \begin{cases} -2b + 2d = 2 & (G_1) \\ 2a + 2b + c = 1 & (G_2) \\ -4a + b - 2c - 8d = -1 & (G_3) \\ -2a + 2b + 2c - d = -2 & (G_4) \end{cases}$$

$$\text{k) } \begin{cases} a + 4b + 3c + d + 6e = -4 & (G_1) \\ 3a - 2b + 2c + 4e = 3 & (G_2) \\ 3a - 5b - 5c - 6d - 4e = -2 & (G_3) \\ -a - 2b - 5c + 3d - 9e = -1 & (G_4) \\ 2a - 3b + c + e = 2 & (G_5) \end{cases}$$

$$\text{l) } \begin{cases} -3a - 3b - c + d - 2e = 3 & (G_1) \\ -5a - 4b - c + d - e = -2 & (G_2) \\ 4a - 2b + 3c + 2d - e = 2 & (G_3) \\ 4a + 4b - 5c + 5d + e = -2 & (G_4) \\ 5a + 2c + 3d + e = -3 & (G_5) \end{cases}$$

✂ **Aufgabe 10.6**

$$\text{a) } \begin{cases} 10x + 8y = -13 & (G_1) \\ 15x + 12y = -18 & (G_2) \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} -12x - 3y = 30 & (G_1) \\ -16x - 4y = 40 & (G_2) \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + 5y - z = -8 & (G_1) \\ 15x - 10y - 20z = -26 & (G_2) \\ 9x - 6y - 12z = -15 & (G_3) \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 7x - 14y - 21z = 0 & (G_1) \\ 2x - 4y - 6z = 0 & (G_2) \\ 4x - 2y - z = 5 & (G_3) \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 28x - 28y + 7z = 0 & (G_1) \\ -20x + 20y - 5z = 0 & (G_2) \\ -8x + 8y - 2z = 0 & (G_3) \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 13x + 30y + 20z = -10 & (G_1) \\ 3x + y - 4z = 12 & (G_2) \\ x + 4y + 4z = -5 & (G_3) \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} 12x - 32y - 33z = -23 & (G_1) \\ -3x + y - 4z = 11 & (G_2) \\ 3x - 5y - 3z = -8 & (G_3) \end{cases}$$

✂ **Aufgabe 10.7**

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{4}{x+y} = 8 \\ \frac{\frac{2}{13}}{x} = -\frac{1}{y} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} xy = -1 \\ 2x + \frac{1}{y} = \frac{23}{42} \end{cases}$$

c) Lösen Sie nach x und y auf, ohne Diskussion der Spezialfälle:

$$\begin{cases} ax + y = a + 2 \\ a^2x - y = -1 \end{cases}$$

d) Lösen Sie nach x und y auf, ohne Diskussion der Spezialfälle:

$$\begin{cases} (a-1)x + (a+1)y = \frac{2}{a+1} \\ (a+1)x + (a+1)y = \frac{2a}{a^2-1} \end{cases}$$



✂ Aufgabe 10.8

Folgende Aufgaben sind aus einer alten Ausgabe von Algebra 1 S. 181-186

Hinweis: Notieren Sie zuerst immer Ihre Unbekannten, mit **Angabe der Masseinheit**. Bei den Gleichungen, notieren Sie sich jeweils, was Sie in welcher Masseinheit ausrechnen.

Die Gleichungen dürfen mit dem TR ausgerechnet werden.

a) *A108 S. 183*

Ein Goldschmied besitzt zwei Sorten Gold. Legiert er 50 g der ersten Sorte mit 100 g der zweiten, so erhält er 14-karätiges Gold. Wenn er zu dieser Legierung noch 150 g der ersten Sorte hinzufügt, so wird die neue Legierung 16-karätig. Welchen Goldgehalt besitzt jede Sorte?

Hinweis: 24 Karat entspricht reinem Gold. Genauer meint 1 Karat einen Goldanteil von $\frac{1}{24} = \frac{100}{24}\% \approx 4.16\%$ und x Karat einen Goldanteil von $x \cdot \frac{1}{24} = x \cdot \frac{100}{24}\% \approx x \cdot 4.16\%$.

b) *A114 S. 184*

Herr Merz fährt in 48 min auf einer Autostrasse von A nach D und in 55 min zurück. Das Teilstück BC ist in beiden Richtungen nur mit 40 km/h befahrbar, auf dem Rest der Strecke fährt Herr Merz auf der **Hin-** bzw. **der Rückfahrt** eine mittlere Geschwindigkeit von **90 km/h** bzw. **70 km/h**. Wie lang sind AD und BC ?

c) *A118 S. 184*

Von zwei Eisenbahnstationen, deren Entfernung d Meter beträgt, gehen gleichzeitig zwei Züge ab, jeder mit konstanter Geschwindigkeit. Wenn sie einander entgegenfahren, treffen sie sich nach a Minuten, wenn sie aber in derselben Richtung fahren (in Richtung einer weiteren, sehr weit entfernten Station) und der langsamere Zug vorausfährt, so holt der schnellere Zug den langsameren nach b Minuten ein. Wie viele Meter legt jeder Zug pro Minute zurück? Lösen Sie mit $a = 4$, $b = 20$, $d = 8600$.

d) Lösen Sie Aufgabe c) allgemein. *Das Resultat ist eine Formel, die a , b und d enthält.*

e) *122 S. 184*

Zwei Zuleitungen füllen zusammen ein Gefäss, wenn die erste 6 h lang geöffnet ist und die zweite 4 h lang. Verwechselt man die Öffnungszeiten, so läuft ein Sechstel des Gefässinhaltes über. Welchen Bruchteil des Gefässinhaltes liefert jede Leitung pro Stunde? In wie vielen Stunden wird das Gefäss durch jede Leitung einzeln gefüllt, in wie vielen durch beide zusammen?

✂ Aufgabe 10.9

Gegeben sind 3 Punkte $A = (-2, -1)$, $B = (0, 2)$ und $C = (2, 1)$. Gesucht sind die Koeffizienten a , b , c einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ so, dass der Graph von f durch die drei Punkte A , B , C geht. Wenn Sie die Funktion bestimmt haben, skizzieren Sie deren Graphen.

✂ Aufgabe 10.10

Es soll eine Notenskala bestimmt werden, so dass 0 Punkte die Note 1, 10 Punkte die Note 4 und 20 Punkte die Note 6 ergeben. Begründen Sie, warum diese Notenskala nicht eine lineare Funktion sein kann. Finden Sie die quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$, die ein solche Skala ergibt. Zeichnen Sie dann den Graphen dieser Funktion.

Mathe-Lösungsweg (ohne Einheiten)

Wichtig: Alle $\begin{cases} \text{Längen} \\ \text{Zeiten} \\ \text{Massen} \end{cases}$ sind in derselben Einheit zu messen.
Hier: Längen in km
Zeiten in h

$$\text{Fahrzeit} = (\text{Zeit für BC})^* + (\text{Zeit für Rest})$$

$$\textcircled{\star} \quad \frac{48}{60} = \frac{y}{40} + \frac{x-y}{90} \quad | \cdot 360$$

$$* \quad v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow vt = s \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$$

$$6 \frac{360 \cdot 48}{60} = 9 \frac{360}{40} y + 4 \frac{360}{90} (x-y)$$

$$288 = 9y + 4x - 4y$$

$$4x + 5y = 288$$

Rückfahrt liefert eine ähnliche Gleichung

$$\boxed{}$$

LGS in zwei Variablen
Löse es.

Physiker-Lösungsweg: mit Einheiten:

x: Strecke AD (mit Einheit)
y: Strecke BC

$$\textcircled{\star} \quad 48 \text{ min} = \frac{y}{40 \frac{\text{km}}{\text{h}}} + \frac{x-y}{90 \frac{\text{km}}{\text{h}}} \quad | \cdot 360 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$48 \cdot 360 \frac{\text{min} \cdot \text{km}}{\text{h}} = 9y + 4(x-y)$$

$$288 \text{ km} = 4x + 5y$$



10.4 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

✂ Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

✪ Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**

✂ Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

✂ Lösung zu Aufgabe 10.4 ex-lineare-gleichungssysteme-2var-einstieg

a) y eliminieren: $(G_1) + (G_2): -12x = -24 \Leftrightarrow x = 2.$

Eingesetzt in $(G_1): -6 + 8y = 26 \Leftrightarrow 8y = 32 \Leftrightarrow y = 4.$

Ein anderer Lösungsweg besteht darin, eine Gleichung nach einer Variablen aufzulösen, z.B. (G_1) nach x auflösen: $x = \frac{1}{3}(8y - 26).$ Eingesetzt in $(G_2):$

$$-9 \cdot \frac{1}{3}(8y - 26) - 8y = -50 \Leftrightarrow -24y + 78 - 8y = -50 \Leftrightarrow -32y = -128 \Leftrightarrow y = 4$$

Und damit $x = \frac{1}{3}(32 - 26) = 2.$

b) y eliminieren: $(G_1) + 10(G_2): -x - 60x = -61 + 610 \Leftrightarrow -61x = -61(1 - 10) \Leftrightarrow x = -9$

Eingesetzt in $(G_2): -6 \cdot (-9) - y = 61 \Leftrightarrow 54 = 61 + y \Leftrightarrow y = -7$

Ein anderer Lösungsweg besteht darin, z.B. (G_2) nach y aufzulösen und in (G_1) einzusetzen:

$(G_2): y = -6x - 61,$ eingesetzt in $(G_1):$

$$-x + 10(-6x - 61) = -61 \Leftrightarrow -61x - 610 = -61 \Leftrightarrow -x - 10 = -1 \Leftrightarrow x = -9$$

Und damit $y = y = -6 \cdot (-9) - 61 = 54 - 61 = -7.$

✂ Lösung zu Aufgabe 10.5 ex-lineare-gleichungssysteme-von-hand

a)

$$\begin{array}{rcl} -2x & -3y & = -1 & (G_0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 3x & +3y & = -3 & (G_1) \end{array}$$

Variable y eliminieren:

$$(G_0) + (G_1): \quad \quad \quad x \quad \quad \quad = -4 \quad \quad \quad (G'_0)$$

Aus (G'_0) folgt: $x = -4.$ Eingesetzt in $(G_0):$

$$\begin{array}{rcl} -2 \cdot (-4) - 3y = -1 & & | \text{TU} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -3y + 8 = -1 & & | -8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -3y = -9 & & | : -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} y = 3 & & \end{array}$$

Lösung: $x = -4, y = 3$

b)

$$\begin{array}{rcl} 2x & -3y & = -2 & (G_0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -2x & +2y & = -2 & (G_1) \end{array}$$



Variable x eliminieren:

$$(G_0) + (G_1) : \quad -y \quad = -4 \quad (G'_0)$$

Aus (G'_0) folgt: $y = 4$. Eingesetzt in (G_0) :

$$\begin{array}{rcl} 2x - 3 \cdot 4 = -2 & & | \text{ TU} \\ 2x - 12 = -2 & & | + 12 \\ 2x = 10 & & | : 2 \\ x = 5 & & \end{array}$$

Lösung: $x = 5, y = 4$

c)

$$\begin{array}{rcl} 2x & -y & = 1 & (G_0) \\ 5x & -2y & = 1 & (G_1) \end{array}$$

Variable y eliminieren:

$$2(G_0) - (G_1) : \quad -x \quad = 1 \quad (G'_0)$$

Aus (G'_0) folgt: $x = -1$. Eingesetzt in (G_0) :

$$\begin{array}{rcl} 2 \cdot (-1) - y = 1 & & | \text{ TU} \\ -y - 2 = 1 & & | + 2 \\ -y = 3 & & | : -1 \\ y = -3 & & \end{array}$$

Lösung: $x = -1, y = -3$

d)

$$\begin{array}{rcl} x & +2y & = -1 & (G_0) \\ x & +5y & = 5 & (G_1) \end{array}$$

Variable x eliminieren:

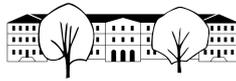
$$(G_0) - (G_1) : \quad -3y \quad = -6 \quad (G'_0)$$

Aus (G'_0) folgt: $y = 2$. Eingesetzt in (G_0) :

$$\begin{array}{rcl} x + 2 \cdot 2 = -1 & & | \text{ TU} \\ x + 4 = -1 & & | - 4 \\ x = -5 & & \end{array}$$

Lösung: $x = -5, y = 2$

e)



$$\begin{array}{rclcrcl} 3x & +y & +2z & = 0 & (G_0) \\ 4x & +2y & +3z & = -4 & (G_1) \\ 2x & +4y & -z & = -4 & (G_2) \end{array}$$

Variable y eliminieren:

$$\begin{array}{rclcrcl} 2(G_0) - (G_1) : & 2x & +z & = 4 & (G'_0) \\ 2(G_1) - (G_2) : & 6x & +7z & = -4 & (G'_1) \end{array}$$

Variable x eliminieren:

$$3(G'_0) - (G'_1) : \quad -4z \quad = 16 \quad (G''_0)$$

Aus (G''_0) folgt: $z = -4$. Eingesetzt in (G'_0) :

$$\begin{array}{rcl} 2x + \cdot(-4) = 4 & | \text{TU} \\ 2x - 4 = 4 & | +4 \\ 2x = 8 & | :2 \\ x = 4 & \end{array}$$

Eingesetzt in (G_0) :

$$\begin{array}{rcl} 3 \cdot 4 + y + 2 \cdot (-4) = 0 & | \text{TU} \\ y + 4 = 0 & | -4 \\ y = -4 & \end{array}$$

Lösung: $x = 4, y = -4, z = -4$

f)

$$\begin{array}{rclcrcl} -2x & -3y & +8z & = 1 & (G_0) \\ -2x & -y & +4z & = 3 & (G_1) \\ 4x & -6y & +3z & = 1 & (G_2) \end{array}$$

Variable x eliminieren:

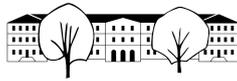
$$\begin{array}{rclcrcl} (G_0) - (G_1) : & -2y & +4z & = -2 & (G'_0) \\ 2(G_1) + (G_2) : & -8y & +11z & = 7 & (G'_1) \end{array}$$

Variable y eliminieren:

$$4(G'_0) - (G'_1) : \quad 5z \quad = -15 \quad (G''_0)$$

Aus (G''_0) folgt: $z = -3$. Eingesetzt in (G'_0) :

$$\begin{array}{rcl} -2y + 4 \cdot (-3) = -2 & | \text{TU} \\ -2y - 12 = -2 & | +12 \\ -2y = 10 & | : -2 \\ y = -5 & \end{array}$$

Eingesetzt in (G_0):

$$\begin{array}{rcl}
 -2x - 3 \cdot (-5) + 8 \cdot (-3) = 1 & & | \text{TU} \\
 -2x - 9 = 1 & & | + 9 \\
 -2x = 10 & & | : -2 \\
 x = -5 & &
 \end{array}$$

Lösung: $x = -5, y = -5, z = -3$

g)

$$\begin{array}{rclcl}
 -5x & -3y & -3z & = 5 & (G_0) \\
 -5x & +5y & -z & = -1 & (G_1) \\
 3x & +y & +z & = -3 & (G_2)
 \end{array}$$

Variable z eliminieren:

$$\begin{array}{rclcl}
 (G_0) - 3(G_1) : & 10x & -18y & = 8 & (G'_0) \\
 (G_1) + (G_2) : & -2x & +6y & = -4 & (G'_1)
 \end{array}$$

Variable y eliminieren:

$$(G'_0) + 3(G'_1) : \quad 4x \quad = -4 \quad (G''_0)$$

Aus (G''_0) folgt: $x = -1$. Eingesetzt in (G'_0):

$$\begin{array}{rcl}
 10 \cdot (-1) - 18y = 8 & & | \text{TU} \\
 -18y - 10 = 8 & & | + 10 \\
 -18y = 18 & & | : -18 \\
 y = -1 & &
 \end{array}$$

Eingesetzt in (G_0):

$$\begin{array}{rcl}
 -5 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) - 3z = 5 & & | \text{TU} \\
 -3z + 8 = 5 & & | - 8 \\
 -3z = -3 & & | : -3 \\
 z = 1 & &
 \end{array}$$

Lösung: $x = -1, y = -1, z = 1$

h)

$$\begin{array}{rclcl}
 -x & +y & +2z & = 3 & (G_0) \\
 x & & +z & = -1 & (G_1) \\
 -2x & +4y & -4z & = -4 & (G_2)
 \end{array}$$

Variable x eliminieren:

$$\begin{array}{rclcl}
 (G_0) + (G_1) : & y & +3z & = 2 & (G'_0) \\
 2(G_1) + (G_2) : & 4y & -2z & = -6 & (G'_1)
 \end{array}$$

Variable y eliminieren:

$$4(G'_0) - (G'_1) : \quad 14z \quad = 14 \quad (G''_0)$$

Aus (G''_0) folgt: $z = 1$. Eingesetzt in (G'_0) :

$$\begin{array}{rcl} y + 3 \cdot 1 = 2 & & | \text{ TU} \\ y + 3 = 2 & & | - 3 \\ y = -1 & & \end{array}$$

Eingesetzt in (G_0) :

$$\begin{array}{rcl} -x + \cdot(-1) + 2 \cdot 1 = 3 & & | \text{ TU} \\ -x + = 3 & & | - \\ -x = 2 & & | : -1 \\ x = -2 & & \end{array}$$

Lösung: $x = -2, y = -1, z = 1$

i)

$$\begin{array}{rcccccc} -3a & -8b & +5c & +d & = -4 & (G_0) \\ a & +4b & -8c & -3d & = -2 & (G_1) \\ -3a & -5b & +c & +d & = -2 & (G_2) \\ a & +9b & +8c & +5d & = -4 & (G_3) \end{array}$$

Variable a eliminieren:

$$\begin{array}{rcccccc} (G_0) - (G_2) : & -3b & +4c & & = -2 & (G'_0) \\ (G_1) - (G_3) : & -5b & -16c & -8d & = 2 & (G'_1) \\ (G_2) + 3(G_1) : & 7b & -23c & -8d & = -8 & (G'_2) \end{array}$$

Variable d eliminieren:

$$\begin{array}{rcccccc} (G'_0) : & -3b & +4c & & = -2 & (G''_0) \\ (G'_1) - (G'_2) : & -12b & +7c & & = 10 & (G''_1) \end{array}$$

Variable b eliminieren:

$$4(G''_0) - (G''_1) : \quad 9c \quad = -18 \quad (G'''_0)$$

Aus (G'''_0) folgt: $c = -2$. Eingesetzt in (G''_0) :

$$\begin{array}{rcl} -3b + 4 \cdot (-2) = -2 & & | \text{ TU} \\ -3b - 8 = -2 & & | + 8 \\ -3b = 6 & & | : -3 \\ b = -2 & & \end{array}$$