Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

10 Gleichungssysteme

Bis jetzt haben wir jeweils Gleichungen mit einer Variablen angetroffen und gelöst. D.h. es war eine Zahl gesucht und man kannte für die Zahl eine Bedingung, die in Form einer Gleichung formuliert wurde.

Sind mehrere Unbekannte gesucht, sind oft ebenso viele Bedingungen gegeben. Als Beispiel betrachten wir folgende Aufgabe:

Aufgabe 10.1

Für welche Werte von x und y sind die beiden folgenden Gleichungen gleichzeitig erfüllt?

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 & (G_1) \\ -x + 7y = 25 & (G_2) \end{cases}$$

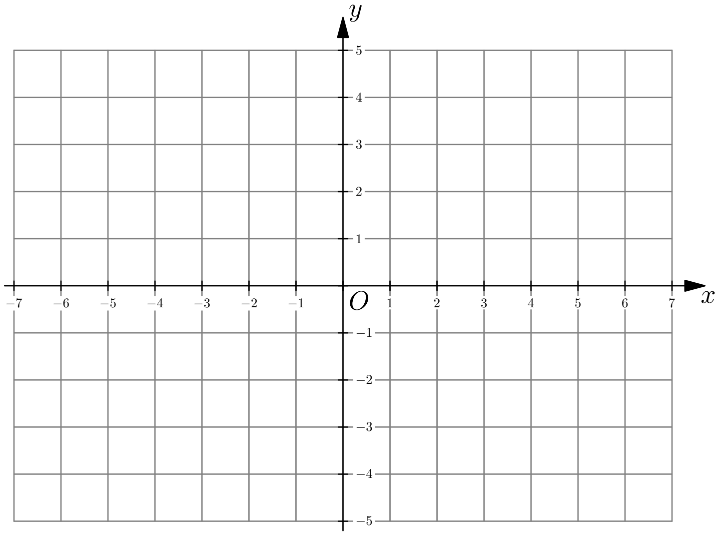
Die Gleichung (G_2) ist *linear*, weil nur reelle Vielfache der Variablen und Konstanten (= reelle Zahlen) als Summanden vorkommen. (Mit anderen Worten, beide Seiten der Gleichung sind Polynome vom Grad 1 oder kleiner.)

Die Gleichung (G_1) ist *nicht-linear*, weil die Variablen quadriert vorkommen (Polynom vom Grad 2); ausserdem kann die Gleichung auch nicht so umgeformt werden, dass sie linear wird.

Sobald man mehrere Gleichungen in mehreren Variablen betrachtet, spricht man von einem *Gleichungssystem*. Eine *Lösung eines Gleichungssystems* ist eine Zuordnung von reellen Zahlen zu allen Variablen so, dass alle Gleichungen zu wahren Aussagen werden.

Versuchen Sie jetzt mit folgender Anleitung die Lösungen für das Gleichungssystem zu bestimmen:

- Finden Sie jeweils 10 Wertepaare (x, y), die Lösungen der Gleichungen (G_1) bzw. (G_2) sind und zeichnen Sie diese Punkte mit zwei verschiedenen Farben ins folgende Koordinatensystem ein. Wählen Sie Wertepaare, die möglichst einfach zu berechnen sind.



- Würde man alle möglichen Wertepaare für (G_2) einzeichnen, was würde man erhalten und warum?

  ✎

- Beantworten Sie die gleiche Frage für (G_1)! *Hinweis: Denken Sie an einen alten Griechen!*

  ✎

 Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

- Lesen Sie die ungefähren Schnittpunkte ab und beweisen Sie rechnerisch, dass Ihre «Schätzung» exakt ist.

  ✎

10.1 Lösungsmethoden

Gleichungssysteme grafisch zu lösen ist in den meisten Fällen unpraktikabel, ungenau und zu aufwändig. Darum sind wir an exakten rechnerischen Methoden interessiert.

Es gibt verschiedene Lösungsmethoden für Gleichungssysteme. Einige funktionieren allgemein, andere nur bei *linearen Gleichungssystemen* (= Gleichungssysteme, in denen alle Gleichungen linear sind).

10.1.1 Allgemeine Lösungsmethode: Auflösen und Einsetzen

Die Methode «Auflösen und Einsetzen» funktioniert wie:

- Eine Gleichung nach einer Variablen auflösen (sofern möglich). *Am besten wird die «einfachste» Gleichung nach der «einfachsten» Variablen aufgelöst.*
- Das Resultat in alle anderen Gleichungen einsetzen (und damit eine Variable eliminieren).
- Das so erhaltene, neue Gleichungssystem hat eine Variable und eine Gleichung weniger. Man löst es mit demselben Verfahren etc.
- Am Schluss die Lösungen «rückwärts» einsetzen.

Bei nicht-linearen Gleichungssystemen ist dies oft die einzige Methode. Bei linearen Gleichungssystemen werden wir noch weitere Methoden kennenlernen, die oft mit weniger Aufwand verbunden sind.

Aufgabe 10.2

Lösen Sie das Gleichungssystem aus Aufgabe 10.1 mit der Methode «Auflösen und Einsetzen» wie folgt:

- Lösen Sie (G_2) nach x auf («einfachere» Gleichung, schon fast nach x aufgelöst). Die Lösung für x ist ein Ausdruck mit y.

  ✎

- Ersetzen Sie x in (G_1) durch diesen Ausdruck.

  ✎

- Quadrieren Sie aus und formen Sie die entstehende Gleichung so um, dass die rechte Seite zu Null wird. Dividieren Sie dann durch den ggT. ✎

- Faktorisieren Sie die linke Seite und lesen die Lösungen für y ab. ✎

- Setzen Sie die gefundenen Werte für y in den Ausdruck für x ein, um die zugehörigen Werte für x zu erhalten.

  ✎

Im Folgenden betrachten wir fast ausschliesslich lineare Gleichungssysteme.

Aufgabe 10.3

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem rechnerisch mit der obigen Methode:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 & (G_1) \\ x + 3y + 2z = 5 & (G_2) \\ -2x + 4y + 4z = 2 & (G_3) \end{cases}$$

✎

Aus der Lösung dieser Aufgabe ist für lineare Gleichungssysteme Folgendes ersichtlich: Im Allgemeinen braucht es genau so viele Gleichungen wie Variablen, damit das System genau eine Lösung hat.

In jedem Schritt wird nämlich eine Variable eliminiert und man erhält ein lineares System mit einer Gleichung weniger.

In Spezialfällen kann es aber trotzdem keine oder unendlich viele Lösungen geben, siehe Abschnitt 10.3.

Merke

Der TR kann Gleichungssysteme lösen. Dazu werden die Gleichungen mit **and** verknüpft und die Liste der Variablen zwischen **{}** geschrieben. Beispiel:

```
solve(x+y=60 and x-y=40, {x,y})
```

10.1.2 Lösungsmethode: Variablen eliminieren durch Linearkombinationen von Gleichungen

Die in diesem Abschnitt erklärte Lösungsmethode ist unsere Standardmethode für lineare Gleichungssysteme. Sie beruht auf der folgenden Beobachtung:

> Addiert (bzw. subtrahiert) man zwei Gleichungen (oder Vielfache davon) eines linearen Gleichungssystems (voneinander), so erhält man eine neue lineare Gleichung, die von jeder Lösung der beiden Gleichungen erfüllt wird.

Unsere Lösungsmethode geht (grob) wie folgt:

> Führe solche Additionen (bzw. Subtraktionen) zweier Gleichungen mehrfach durch. Das Ziel dabei ist, eine bestimmte Variable zu eliminieren und die Anzahl der Gleichungen um eins zu reduzieren.
>
> Man erhält so ein neues Gleichungssystem (mit einer Variablen und einer Gleichung weniger), auf das man dasselbe Verfahren anwendet etc.
>
> Wenn man bei einem aus einer Gleichung bestehenden System angekommen ist, kann man seine Lösung(en) unmittelbar ablesen und erhält durch Rückwärts-Einsetzen die Lösung(en) des ursprünglichen Gleichungssystems.

Beispiel: $$\begin{cases} 2x + y - z = 0 & (G_1) \\ x + 3y + 2z = 5 & (G_2) \\ -2x + 4y + 4z = 2 & (G_3) \end{cases}$$

✎

Achtung:

- Jede mögliche Menge von n Gleichungen eines jeden „neuen" Gleichungssystems muss aus mindestens $n+1$ Gleichungen des „alten" Gleichungssystems entstanden sein. (Ansonsten kriegt man redundante Gleichungen und gewinnt neue Lösungen.)
- Gleichungen, die die zu eliminierende Variable gar nicht enthalten, werden stets unverändert vom alten in das neue Gleichungssystem übernommen.

Aufgabe 10.4 Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungssystemen.

a) $$\begin{cases} -3x + 8y = 26 & (G_1) \\ -9x - 8y = -50 & (G_2) \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} -x + 10y = -61 & (G_1) \\ -6x - y = 61 & (G_2) \end{cases}$$

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

10.2 Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen

Hat ein Gleichungssystem weniger Gleichungen als Variablen, so hat dieses System meistens unendlich viele Lösungen. Das kann aber auch passieren, wenn es «genug» Gleichungen hat, aber eine der Gleichungen aus den anderen folgt.

Man sagt, dass das Gleichungssystem *unterbestimmt* ist.

Beispiel: Bestimmen Sie alle möglichen Lösungen von folgendem unterbestimmten «Gleichungssystem» (zwei Unbekannte, aber nur eine Gleichung). Finden Sie eine geometrische Interpretation aller möglichen Lösungen:

$$x + 2y = 4 \quad (G_1)$$

✎

Löst man ein unterbestimmtes Gleichungssystem durch Auflösen und Einsetzen, erhält man am Schluss eine Gleichung mit mehr als einer Variablen. Nach einer kann aufgelöst werden, alle restlichen können frei gewählt werden (im Definitionsbereich des entsprechenden Ausdrucks). Geometrisch ergibt sich dann eine ein- oder mehrdimensionale Punktemenge. D.h. Geraden und Ebenen etc. im Falle von linearen Gleichungssytemen, bzw. Kurven und Flächen etc. im Falle von nicht-linearen Gleichungen:

Anzahl Variablen	**Anzahl Gleichungen**	**Zu erwartende Lösungsmenge**
2	1	Gerade (bzw. Kurve) in der Ebene
3	1	Ebene (bzw. Fläche) im Raum
3	2	Gerade (bzw. Kurve) im Raum
4	2	Ebene (bzw. Fläche) im 4-dimensionalen Raum
4	3	Gerade (bzw. Kurve) im 4-dimensionalen Raum

10.3 Zu erwartende Lösungsmengen

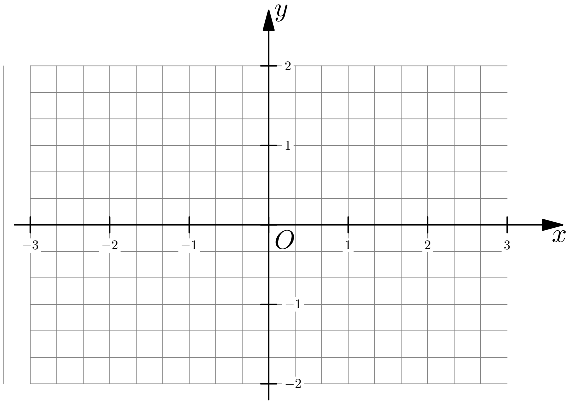
«Normalerweise» hat eine lineares Gleichungssystem mit gleich vielen Variablen wie Gleichungen genau eine Lösung. Wie schon bei einfachen linearen Gleichungen kann es aber durchaus vorkommen, dass auch Gleichungssysteme dieser Art keine oder unendlich viele Lösungen haben.

Beispiel 1: $\begin{cases} 4x - 3y = 2 & (G_1) \\ -8x + 6y = 1 & (G_2) \end{cases}$

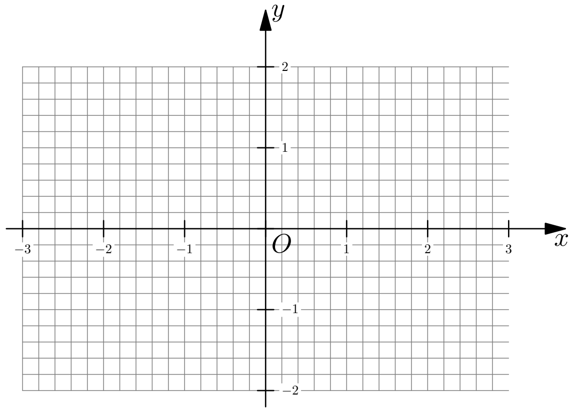
Beispiel 2: $\begin{cases} -4x - 10y = 8 & (G_1) \\ 6x + 15y = -12 & (G_2) \end{cases}$

Zeichnen Sie für beide Beispiele jeweils die beiden Lösungsmengen von (G_1) und (G_2) in einem Koordinatensystem:

Beispiel 1 $\begin{cases} 4x - 3y = 2 & (G_1) \\ -8x + 6y = 1 & (G_2) \end{cases}$



Beispiel 2 $\begin{cases} -4x - 10y = 8 & (G_1) \\ 6x + 15y = -12 & (G_2) \end{cases}$



10.3.1 2 Variablen, 2 lineare Gleichungen

Die Lösungen einer einzelnen linearen Gleichung mit zwei Variablen entsprichen normalerweise den Koordinaten aller Punkte auf einer Geraden. Die Gerade kann sogar vertikal sein, z.B. $x + 0y = 4$.

Der Spezialfall, wo gar keine Variable vorkommt, interessiert uns wenig: Er führt entweder auf eine nicht lösbare Gleichung (z.B. $0x + 0y = 1$) oder auf stets wahre Gleichung $0x + 0y = 0$. Im ersten Fall hat das System keine Lösung, im zweiten Fall sind alle Punkte (x, y) der Ebene Lösungen.

Die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit 2 Variablen und 2 Gleichungen entspricht im Normalfall den Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Geraden, die man aus den beiden beteiligten Gleichungen erhält. Es gibt somit 3 Fälle:

Fall 1: ✎

Fall 2: ✎

Fall 3: ✎

10.3.2 3 Variablen, 3 Gleichungen

Wenn man wie oben von Spezialfällen absieht, entsprechen die Lösungen einer einzelnen Gleichung den Koordinaten der Punkte einer Ebene im Raum. (Warum und dass das so ist, werden wir später in der Vektorgeometrie untersuchen). Im Allgemeinen schneiden sich zwei Ebenen in einer Geraden (vgl. Rücken eines Schulhefts). Die Lösung der Gleichung entspricht also dem Schnittpunkt dreier Ebenen, falls es diesen gibt. Es ergeben sich folgende Fälle:

- Fall 1: Je zwei der drei Ebenen sind parallel zueinander oder gleich.
  - Falls zwei der drei Ebenen verschieden sind, gibt es keine Lösung.
  - Sonst sind alle drei Ebenen gleich und alle Punkte dieser Ebene sind Lösungen.
- Fall 2: Genau zwei der drei Ebenen sind parallel zueinander oder gleich. (Dann ist die dritte nicht parallel zu jeder diese beiden.)
  - Falls diese beiden parallelen Ebenen verschieden sind, gibt es keine Lösung.
  - Sonst bilden sie eine Ebene, die die dritte in einer Geraden schneidet; die (Koordinaten der) Punkte dieser Geraden sind die Lösungen.
- Fall 3: Keine zwei der drei Ebenen sind parallel zueinander oder gleich. Dann schneiden sich je zwei der drei Ebenen in einer Geraden.

  Wir betrachten eine beliebige der drei Ebenen. Sie enthält dann zwei Schnittgeraden (mit den anderen beiden Ebenen).
  - Fall 3.1: Diese beiden Schnittgeraden sind parallel und verschieden: Es gibt keine Lösung. (Dies ist wohl die Toblerone-Situation)
  - Fall 3.2: Diese beiden Schnittgeraden stimmen überein. Dann schneiden sich die drei Ebenen in dieser Geraden, und die (Koordinaten der) Punkte dieser Geraden sind die Lösungen.
  - Fall 3.3: Diese beiden Schnittgeraden schneiden sich in einem Punkt. Dann ist dieser Punkt (oder seine Koordinaten) die einzige Lösung.

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Aufgabe 10.5 Hier und in den folgenden ähnlichen Aufgaben sind jeweils die Lösungen des angegebenen Gleichungssystems zu bestimmen.

a) $\begin{cases} 7x - 10y = -36 & (G_1) \\ -10x = -20 & (G_2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x - y = -7 & (G_1) \\ -6x - 2y = -14 & (G_2) \end{cases}$

c) $\begin{cases} -10x + 6y = -70 & (G_1) \\ -2x = -20 & (G_2) \end{cases}$

d) $\begin{cases} -6x = 30 & (G_1) \\ -5x + 10y = 25 & (G_2) \end{cases}$

Aufgabe 10.6

a) $\begin{cases} -10x - 4y - 5z = -85 & (G_1) \\ 3x - 5y + 9z = -74 & (G_2) \\ 7y + 9z = 25 & (G_3) \end{cases}$

b) $\begin{cases} -8x - y + 6z = -58 & (G_1) \\ 3x + 10y - 2z = 99 & (G_2) \\ -x - 2y - 2z = -25 & (G_3) \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x - 8y - 9z = 6 & (G_1) \\ -3y + 9z = 54 & (G_2) \\ 7x + 7y = -21 & (G_3) \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2y - 8z = -48 & (G_1) \\ 8x + 6y + z = 69 & (G_2) \\ x + 2y + 10z = 63 & (G_3) \end{cases}$

Aufgabe 10.7

a) $\begin{cases} -5a - 2b + 6c - 10d = 10 & (G_1) \\ 10a + 10b - 3c + 3d = 50 & (G_2) \\ -c - 9d = 50 & (G_3) \\ 8a - 4b + 2d = -30 & (G_4) \end{cases}$

b) $\begin{cases} -b + 10c + 7d = -130 & (G_1) \\ -7a - 7b - 7c - 8d = 10 & (G_2) \\ 10a + 3b + 3d = 50 & (G_3) \\ -9a - 9b - 10c + 4d = -125 & (G_4) \end{cases}$

Aufgabe 10.8

a) $\begin{cases} -a - b + 6c + 10d - 6e = -55 & (G_1) \\ 3b - 5c + 8d + 10e = 81 & (G_2) \\ -2a - b + 8c + 4d + 10e = -6 & (G_3) \\ -4a + 7b - 7c - 7d + 7e = 10 & (G_4) \\ 10a + 10b + 9c + 4d - 2e = -173 & (G_5) \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6a + 5b - 3c - 3d + 3e = 12 & (G_1) \\ 8a - 3b - 7c + 8d + 5e = -44 & (G_2) \\ -8a - 5b - c + 3d - e = 16 & (G_3) \\ -5a - 2b + 8c - 2e = -34 & (G_4) \\ -8a - 4c - 7d - 9e = 124 & (G_5) \end{cases}$

Aufgabe 10.9

a) $\begin{cases} \frac{4}{x+y} = 8 \\ \frac{\frac{2}{13}}{x} = -\frac{\frac{1}{3}}{y} \end{cases}$

b) $\begin{cases} xy = -1 \\ 2x + \frac{1}{y} = \frac{23}{42} \end{cases}$

c) Lösen Sie nach x und y auf, ohne Diskussion der Spezialfälle:
$\begin{cases} ax + y = a + 2 \\ a^2x - y = -1 \end{cases}$

d) Lösen Sie nach x und y auf, ohne Diskussion der Spezialfälle:
$\begin{cases} (a-1)x + (a+1)y = \frac{2}{a+1} \\ (a+1)x + (a+1)y = \frac{2a}{a^2-1} \end{cases}$

Aufgabe 10.10 Folgende Aufgaben sind aus einer alten Ausgabe von Algebra 1 S. 181-186

Hinweis: Notieren Sie zuerst immer Ihre Unbekannten, mit **Angabe der Masseinheit**. Bei den Gleichungen, notieren Sie sich jeweils, was Sie in welcher Masseinheit ausrechnen.

Die Gleichungen dürfen mit dem TR ausgerechnet werden.

a) *A108 S. 183*
Ein Goldschmied besitzt zwei Sorten Gold. Legiert er 50 g der ersten Sorte mit 100 g der zweiten, so erhält er 14-karätiges Gold. Wenn er zu dieser Legierung noch 150 g der ersten Sorte hinzufügt, so wird die neue Legierung 16-karätig. Welchen Goldgehalt besitzt jede Sorte?
Hinweis: 24 Karat entspricht reinem Gold.

b) *A114 S. 184*
Herr Merz fährt in 48 min auf einer Autostrasse von A nach D und in 55 min zurück. Das Teilstück BC ist in beiden Richtungen nur mit 40 km/h befahrbar, im Übrigen kann Herr Merz auf der Hin- und der Rückfahrt eine mittlere Geschwindigkeit von 90 km/h bzw. 70 km/h einhalten. Wie lang sind AD und BC?

c) *A118 S. 184*
Von zwei Eisenbahnstationen, deren Entfernung d Meter beträgt, gehen gleichzeitig zwei Züge ab, jeder mit konstanter Geschwindigkeit.Wenn sie einander entgegenfahren, treffen sie sich nach a Minuten, wenn sie aber in derselben Richtung fahren, nach b Minuten. Wie viele Meter legt jeder Zug pro Minute zurück? Lösen Sie mit $\quad a=4, \quad b=20, \quad d=8600$.

d) Lösen Sie Aufgabe c) allgemein. *Das Resultat ist eine Formel, die a, b und d enthält.*

e) *122 S. 184*
Zwei Zuleitungen füllen zusammen ein Gefäss, wenn die erste 6 h lang geöffnet ist und die zweite 4 h lang. Verwechselt man die Öffnungzeiten, so läuft ein Sechstel des Gefässinhaltes über. Welchen Bruchteil des Gefässinhaltes liefert jede Leitung pro Stunde? In wie vielen Stunden wird das Gefäss durch jede Leitung einzeln gefüllt, in wie vielen durch beide zusammen?

Aufgabe 10.11 Gegeben sind 3 Punkte $A=(-2,-1)$, $B=(0,2)$ und $C=(2,1)$. Gesucht sind die Koeffizienten a, b, c einer quadratischen Funktion $f(x)=ax^2+bx+c$ so, dass der Graph von f durch die drei Punkte A, B, C geht. Wenn Sie die Funktion bestimmt haben, skizzieren Sie deren Graphen.

Aufgabe 10.12 Es soll eine Notenskala bestimmt werden, so dass 0 Punkte die Note 1, 10 Punkte die Note 4 und 20 Punkte die Note 6 ergeben. Begründen Sie, warum diese Notenskala nicht eine lineare Funktion sein kann. Finden Sie die quadratische Funktion $f(x)=ax^2+bx+c$, die ein solche Skala ergibt. Zeichnen Sie dann den Graphen dieser Funktion.

10.4 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 10.4 ex-lineare-gleichungssysteme-2var-einstieg

a) y eliminieren: $(G_1)+(G_2)$: $\quad -12x=-24 \quad\Leftrightarrow\quad x=2$.
Eingesetzt in $(G_1):\quad -6+8y=26 \quad\Leftrightarrow\quad 8y=32 \quad\Leftrightarrow\quad y=4$.
Ein anderer Lösungsweg besteht darin, eine Gleichung nach einer Variablen aufzulösen, z.B. (G_1) nach x auflösen: $x=\frac{1}{3}(8y-26)$. Eingesetzt in (G_2):
$-9\cdot\frac{1}{3}(8y-26)-8y=-50 \quad\Leftrightarrow\quad -24y+78-8y=-50 \quad\Leftrightarrow\quad -32y=-128 \quad\Leftrightarrow\quad y=4$
Und damit $x=\frac{1}{3}(32-26)=2$.

b) y eliminieren: $(G_1)+10(G_2):\quad -x-60x=-61+610 \quad\Leftrightarrow\quad -61x=-61(1-10) \quad\Leftrightarrow\quad x=-9$
Eingesetzt in (G_2): $-6\cdot(-9)-y=61 \quad\Leftrightarrow\quad 54=61+y \quad\Leftrightarrow\quad y=-7$
Ein anderer Lösungsweg besteht darin, z.B. (G_2) nach y aufzulösen und in (G_1) einzusetzen:
$(G_2):\quad y=-6x-61$, eingesetzt in (G_1):
$-x+10(-6x-61)=-61 \quad\Leftrightarrow\quad -61x-610=-61 \quad\Leftrightarrow\quad -x-10=-1 \quad\Leftrightarrow\quad x=-9$
Und damit $y=y=-6\cdot(-9)-61=54-61=-7$.

Lösung zu Aufgabe 10.5 ex-lineare-gleichungssysteme-2var

a) $x=2,\quad y=5$

b) Elimination von x: $2(G_1)-(G_2):\quad 0=0$. D.h. man kann $y\in\mathbb{R}$ beliebig wählen. x ergibt sich aus dieser Wahl wenn man z.B. (G_1) nach x auflöst: $x=\frac{7-y}{3}$.

c) $x=10,\quad y=5$

d) $x=-5,\quad y=0$

Lösung zu Aufgabe 10.6 ex-lineare-gleichungssysteme-3var

a) x=7, y=10, z=-5

b) x=7, y=8, z=1

c) x=3, y=-6, z=4

d) x=5, y=4, z=5

Lösung zu Aufgabe 10.7 ex-lineare-gleichungssysteme-4var

a) a=0, b=5, c=-5, d=-5

b) a=5, b=10, c=-5, d=-10

Lösung zu Aufgabe 10.8 ex-lineare-gleichungssysteme-5var

a) a=1, b=-10, c=-9, d=2, e=5

b) a=-4, b=3, c=-7, d=-4, e=-4

Lösung zu Aufgabe 10.9 ex-lineare-gleichungssysteme-mit-umformungen-und-bruechen

a) $\begin{cases} \frac{4}{x+y} = 8 & \mid \cdot (x+y) \quad ⚠\ (x+y) \neq 0 \\ \frac{\frac{2}{13}}{x} = -\frac{\frac{1}{3}}{y} & \mid \cdot xy \quad ⚠\ x \neq 0 \text{ und } y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 8(x+y) & \mid : 4 \\ \frac{2}{13} \cdot y = -\frac{1}{3} \cdot x & \mid \cdot 39 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 1 = 2x + 2y & (G_1) \\ 6y = -13x & (G_2) \end{cases}$

(G_1) nach y aufgelöst: $y = -\frac{13}{6}x$ (G_1'). Eingesetzt in (G_1):

$$\begin{aligned} 1 &= 2x + 2 \cdot \left(-\frac{13}{6}x\right) \\ 1 &= \frac{6}{3}x - \frac{13}{3}x \\ 1 &= -\frac{7}{3}x && \mid : -\frac{7}{3} \\ -\frac{3}{7} &= x \end{aligned}$$

Eingesetzt in (G_1'): $y = -\frac{13}{6} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{13}{14}$.
Lösung: $x = -\frac{3}{7}$, $y = \frac{13}{14}$.

b) $\begin{cases} xy = -1 & (G_1) \\ 2x + \frac{1}{y} = \frac{23}{42} & (G_2) \quad ⚠\ y \neq 0 \end{cases}$ (G_1) nach y aufgelöst: $y = -\frac{1}{x}$ (G_1'). Eingesetzt in (G_2):

$2x + \frac{1}{-\frac{1}{x}} = \frac{23}{42} \quad \Leftrightarrow \quad 2x - x = \frac{23}{42} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{23}{42}$

In (G_1') eingesetzt: $y = -\frac{1}{\frac{23}{42}} = -\frac{42}{23}$.
Lösung: $x = \frac{23}{42}4$, $y = -\frac{42}{23}$.

c) $\begin{cases} ax + y = a + 2 & (G_1) \\ a^2x - y = -1 & (G_2) \end{cases}$ y elminieren: $(G_1) + (G_2)$: $ax + a^2x = a + 2 - 1 \quad \Leftrightarrow$

$x(a + a^2) = a + 1 \quad \mid : (a + a^2) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{a+1}{a+a^2} = \frac{a+1}{a(a+1)} = \frac{1}{a}$

Eingesetzt in (G_1): $a \cdot \frac{1}{a} + y = a + 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = a + 1$
Lösung: $x = \frac{1}{a}$, $y = a + 1$.

d) $\begin{cases} (a-1)x + (a+1)y = \frac{2}{a+1} & (G_1) \\ (a+1)x + (a+1)y = \frac{2a}{a^2-1} & (G_1) \end{cases}$ y eliminieren: $(G_1) - (G_2)$:

$$\begin{aligned} (a-1)x - (a+1)x &= \frac{2}{a+1} - \frac{2a}{a^2-1} \\ x((a-1) - (a+1)) &= \frac{2}{a+1} - \frac{2a}{(a+1)(a-1)} \\ x(a - 1 - a - 1) &= \frac{2(a-1)}{(a+1)(a-1)} - \frac{2a}{(a+1)(a-1)} \\ x \cdot (-2) &= \frac{2(a-1) - 2a}{(a+1)(a-1)} && \mid : (-2) \\ x &= \frac{1}{(a+1)(a-1)} \end{aligned}$$

Eingesetzt in (G_1): $(a-1) \cdot \frac{1}{(a+1)(a-1)} + (a+1)y = \frac{2}{a+1} \quad \Leftrightarrow \quad (a+1)y = \frac{2}{a+1} - \frac{1}{a+1} \quad \mid : (a+1)$
$y = \frac{1}{(a+1)^2}$.
Lösung: $x = \frac{1}{a^2-1}$, $y = \frac{1}{(a+1)^2}$.

Lösung zu Aufgabe 10.10 ex-textaufgaben

a) Festlegen der Unbekannten (inkl. Masseinheit!):
Goldgehalt Sorte 1: x [karat], Goldgehalt Sorte 2: y [karat].
Vergleichen wird jeweils die **Masse in Gramm** an reinem Gold:

$$\left\{\begin{array}{rcll} 50\cdot\frac{x}{24}+100\cdot\frac{y}{24} &=& \frac{14}{24}\cdot 150 & \text{Mischung 1}\\ (50+150)\cdot\frac{x}{24}+100\cdot\frac{y}{24} &=& \frac{16}{24}\cdot 300 & \text{Mischung 2}\end{array}\right.$$

Lösung: $x=18$, $y=12$.
Antwort: Die erste Sorte ist 18-karätig, die zweite ist 12-karätig.

b) Festlegen der Unbekannten (inkl. Masseinheit!):
Strecke AD: x [km], Strecke BC: y [km]
Berechnet wird jeweils die benötigte **Zeit in Stunden** , also Strecke geteilt durch Geschwindigkeit:

$$\left\{\begin{array}{rcll} \frac{x-y}{90}+\frac{y}{40} &=& \frac{48}{60} & \text{Hinweg}\\ \frac{x-y}{70}+\frac{y}{40} &=& \frac{55}{60} & \text{Rückweg}\end{array}\right.$$

Lösung: $x=\frac{629}{12}$, $y=\frac{47}{3}$
Antwort: Die ganze Strecke ist ungefähr 52.4 km lang, das Teilstück etwa 15.7 km.

c) Festlegen der Unbekannten (inkl. Masseinheit!):
Geschwindigkeit Zug 1: x [m/min], Geschwindigkeit Zug 2: y [m/min].
Variante 1: Man betrachtet die Strecken, die die Züge zurücklegen. Im ersten Fall legen Sie zusammen die Distanz d der Bahnhöfe zurück. Im zweiten Falle beträgt die Differenz der Strecken die Distanz d der Bahnhöfe:

$$\left\{\begin{array}{rcll} 4x+4y &=& 8600 & \text{Fall 1: Summe der Strecken [m]}\\ 20x-20y &=& 8600 & \text{Fall 2: Differenz der Strecken [m]}\end{array}\right.$$

Variante 2: Man kann die Situation relativ zu einem der beiden Züge zu betrachten. D.h. dessen Geschwindigkeit ist dann Null, die eigene Geschwindigkeit wird zur Geschwindigkeit des anderen Zuges addiert (bzw. davon subtrahiert).
Verglichen wird die benötigte **Zeit in min** (Strecke durch relative Geschwindigkeit):

$$\left\{\begin{array}{rcll} \frac{8600}{x+y} &=& 4 & \text{Entgegengesetzte Richtung}\\ \frac{8600}{x-y} &=& 20 & \text{Gleiche Richtung}\end{array}\right.$$

Lösung: $x=1290$, $y=860$
Antwort: Der erste Zug legt 1290 m/min zurück, der zweite 860 m/min.

d) Variante 1:

$$\left\{\begin{array}{rcll} ax+ay &=& d & \text{Entgegengesetzte Richtung}\\ bx-by &=& d & \text{Gleiche Richtung}\end{array}\right.$$

Variante 2:

$$\left\{\begin{array}{rcll} \frac{d}{x+y} &=& a & \text{Entgegengesetzte Richtung}\\ \frac{d}{x-y} &=& b & \text{Gleiche Richtung}\end{array}\right.$$

Lösung: $x=\frac{d(a+b)}{2ab}$, $y=\frac{d(b-a)}{2ab}$

e) Festlegen der Unbekannten (inkl. Masseinheit!):
Fülleistung Zuleitung 1: x [Gefässe pro Stunde], Fülleistung Zuleitung 2: y [Gefässe pro Stunde]
Berechnet werden die Füllmengen (Leistung mal Zeit):

$$\begin{cases} 6x+4y &= 1 \quad \text{korrekte Einstellung} \\ 4x+6y &= \frac{7}{6} \quad \text{falsche Einstellung} \end{cases}$$

Lösung: $x = \frac{1}{15}$, $y = \frac{3}{20}$.
Antwort: Die erste Zuleitung liefert $\frac{1}{15}$ des Gefässinhaltes, die zweite liefert $\frac{3}{20}$ des Inhaltes pro Stunde. Die erste Zuleitung benötigt $\frac{1}{\frac{1}{15}} = 15$ h, die zweite $\frac{1}{\frac{3}{20}} = \frac{20}{3} = 6$ h 40 min um das Gefäss alleine zu füllen.
Zusammen leisten die Zuleitungen $\frac{1}{15} + \frac{3}{20} = \frac{13}{60}$ Gefässe pro Stunde. Also eine Füllzeit von $\frac{1}{\frac{13}{60}} = \frac{60}{13} \approx 4.62$ h, bzw. 4 h 37 min.

Lösung zu Aufgabe 10.11 ex-parabel-durch-punkte

Setzt man die x-Koordinate eines Punktes in f ein, muss dessen y-Koordinate herauskommen. Wir haben also folgendes Gleichungssystem für a, b und c:

$$\begin{cases} f(-2) &= -1 \quad \text{Punkt } A \\ f(0) &= 2 \quad \text{Punkt } B \\ f(2) &= 1 \quad \text{Punkt } C \end{cases} \qquad \begin{cases} 4a-2b+c &= -1 \quad (G_1) \\ c &= 2 \quad (G_2) \\ 4a+2b+c &= 1 \quad (G_3) \end{cases}$$

(G_2) ist schon nach c aufgelöst, also einsetzen in (G_1) und (G_3):

$$\begin{cases} 4a-2b+2 &= -1 \quad (G_1') \\ 4a+2b+2 &= 1 \quad (G_3') \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4a-2b &= -3 \quad (G_1') \\ 4a+2b &= -1 \quad (G_3') \end{cases}$$

Die Unbekannte b wird eliminiert: $(G_1') + (G_3')$:

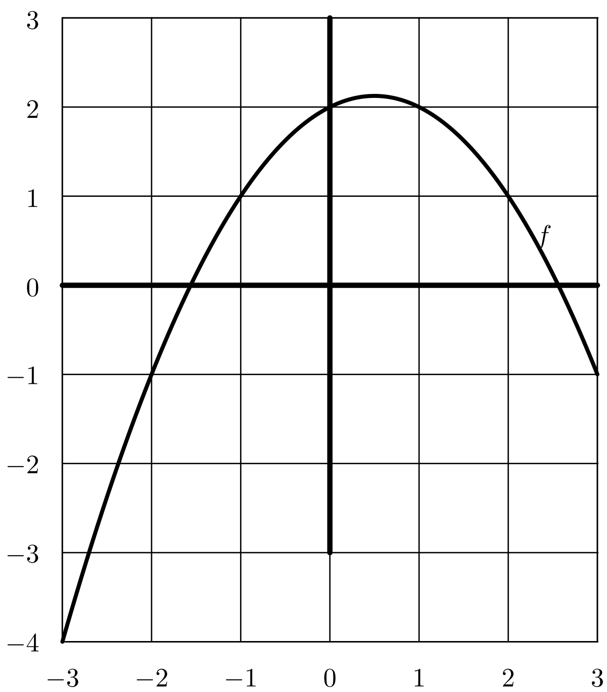
$$8a = -4 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{1}{2}$$

Eingesetzt in (G_1'):

$$-2 - 2b = -3 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{1}{2}$$

Und damit ist die gesuchte Funktion $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + 2$.

Der Graph ist wie folgt:



Lösung zu Aufgabe 10.12 ex-quadratische-notenskala

Die Punkte (0,1), (10,4), und (20,6) liegen nicht auf einer Geraden. Dies kann man belegen, indem man z.B. die Steigung der zwischen den Punkten berechnet: $\frac{3}{10} \neq \frac{2}{10}$.

Wir kennen wieder für drei Argumente (0, 10 und 20) die Funktionswerte (1, 4 und 6). Wir erhalten also folgendes System:

$$\begin{cases} f(0) &= 1 \quad \text{Punkt } (0,1) \\ f(10) &= 4 \quad \text{Punkt } (10,4) \\ f(20) &= 6 \quad \text{Punkt } (20,4) \end{cases} \qquad \begin{cases} c &= 1 \quad (G_1) \\ 100a + 10b + c &= 4 \quad (G_2) \\ 400a + 20b + c &= 6 \quad (G_3) \end{cases}$$

(G_1) ist bereits nach c aufgelöst. Eingesetzt in (G_2), (G_3):

$$\begin{cases} 100a + 10b &= 3 \quad (G_2') \\ 400a + 20b &= 5 \quad (G_3') \end{cases}$$

b eliminieren: $2(G_2') - (G_3')$: $\quad -200a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{1}{200}$. Eingesetzt in (G_2'):

$$-\frac{1}{2} + 10b = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 10b = \frac{7}{2} \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{7}{20}$$

Und damit ist die Notenfunktion $f(x) = -\frac{1}{200}x^2 + \frac{7}{20}x + 1$. Der Graph sieht wie folgt aus: